

修士論文

階層的三体系の力学進化による
ブラックホール連星合体
(Binary blackhole mergers induced by dynamical
interaction of hierarchical triple systems)

2023年8月

東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻

稲熊穂乃里

概要

重力波検出器によって、現在までに 90 以上の重力波信号が観測されている。これらのうち近年注目を集めているのは、合体した連星の質量差が大きいものである。質量差の大きな連星の合体は、従来の孤立連星の進化によってできたブラックホール連星が合体するとするシナリオでは説明し難いと考えられている。そこで近年、これらの合体を説明できるものとして Kozai-Lidov 機構という機構が注目を集めている。Kozai-Lidov 機構は、連星が少し遠方にある 3 体目に束縛されているような系 (階層的 3 体系とよぶ) に特有のものであり、連星の離心率を増幅させ 2 つの天体の距離を近づけることで合体を誘発することができる。階層的 3 体系は宇宙に様々なスケールで多数存在するが、本研究では宇宙に多数存在するとされている球状星団に着目し、中心に中間質量ブラックホールをもつ球状星団における中間質量ブラックホールと恒星質量ブラックホール連星の階層的 3 体系を考える。Kozai-Lidov 機構による合体は時には 10^8 年以上もかけてゆっくりと起こるが、直接 N 体計算コードでは様々な技術的な問題により長期進化を追うことができない。従ってこれまで短い時間スケールの摂動を平均化する近似を取り入れた摂動計算コードが用いられてきた。しかし、摂動計算コードは近似を含むため、時には系の進化を誤って予測してしまう。摂動計算コードの結果を適切に解釈するためには、多数の系に対してある程度長期の進化を両方のコードで追い、結果を統計的に比較する必要があるが、このような研究は現在まで進んでいない。本研究では、初めて、多数の系に対して 2 つのコードで 3.0×10^7 年までの進化を追い、結果を比較することで、初期条件において摂動計算コードの結果が妥当である領域を特定した。その結果を用いて、長時間合体を考慮した Kozai-Lidov 機構による合体のより詳細な連星の質量比分布を予測し、さらに実際の合体率を予測し観測と比較することで、球状星団における KL 機構によって誘発された合体は質量差の大きい合体 (特に質量比 $q < 0.3$ ($0 \leq q \leq 1$) の合体) の主なソースである可能性が高いと示唆した。

Contents

1	イントロダクション	1
2	2 体問題	6
2.1	Newton 力学による 2 体問題	6
2.2	積分定数	7
2.3	Kepler の第 1 法則	9
2.4	Kepler の第 2 法則	9
2.5	軌道要素	10
2.6	Kepler の第 3 法則	12
2.7	Hamilton 力学	12
2.7.1	Lagrange 力学	12
2.7.2	Hamilton 力学	12
2.7.3	正準変換	13
2.7.4	Hamilton-Jacobi 理論	13
2.8	Hamilton 力学による 2 体問題	14
2.9	Delaunay's elements	18
3	Kozai-Lidov 機構	21
3.1	階層的 3 体系	21
3.1.1	階層的 3 体系と Secular 近似	21
3.1.2	Jacobi 座標	22
3.1.3	階層的 3 体系における Delaunay's elements	22
3.2	Kozai-Lidov 機構	24
3.2.1	Quadrupole レベルの Secular 近似	24
3.2.2	Elimination of nodes に関する問題点	29
3.2.3	軌道パラメータの時間変化	30
3.2.4	Kozai-Lidov 機構	33
3.2.5	Octupole レベルの Secular 近似	34
3.2.6	Eccentric Kozai-Lidov 機構	37
3.3	Kozai-Lidov 機構に関する様々な時間スケール	38
3.3.1	Kozai-Lidov 時間	38
3.3.2	Octupole 振動の周期と Flip 時間	42
3.4	Flip の判定条件	43
3.5	近似の妥当性	45
3.5.1	Secular 近似の妥当性	45
3.5.2	階層的 3 体系の安定性条件	47
3.6	一般相対論的効果の Kozai-Lidov 振動への影響	47

3.6.1	近日点移動の時間スケール	48
3.6.2	近日点移動の効果の例	50
4	様々な時間スケール	52
4.1	軌道周期 (Orbital period)	52
4.2	緩和時間 (Relaxation time)	52
4.3	分離時間 (Evaporation time)	55
4.4	捕獲時間 (Capture time) と遭遇時間 (Encounter time)	55
4.5	重力波による合体時間スケール	56
5	球状星団中の階層的 3 体系	60
5.1	Kozai-Lidov 機構による合体	60
5.2	初期条件による Inner binary の最大離心率の違い	61
5.2.1	Quadrupole レベルの場合: 先行研究 Hamers (2021)	64
5.2.2	Octupole 項による影響の考察	66
5.3	短周期の摂動による影響	70
5.4	本研究の手法	77
5.4.1	摂動計算コードと直接 N 体計算コードについて	77
5.4.2	初期条件の生成と合体判定条件	78
5.5	本研究の結果	79
5.5.1	2つのコードにおけるシミュレーションの結果違い	80
5.5.2	長時間合体を考慮した質量比分布の予測	86
5.5.3	3 体目の質量を変えた場合	91
5.5.4	質量比の初期分布を変化させた場合	93
5.6	議論および結論	95
6	まとめ	98
	謝辞	101
	参考文献	102
	付録	144
A	2 体の Kepler 運動	145
A.1	長軸半径と離心率の定義	145
A.2	離心率と離心率ベクトル	147

Chapter 1

イントロダクション

アメリカに設置されたレーザー干渉型重力波検出器 LIGO とイタリアに設置された欧州重力波観測所の重力波検出器 VIRGO が、2015 年 9 月 14 日に初めて重力波の直接検出に成功した (GW150914, Abbott et al. 2016)。この重力波はブラックホール連星の合体により放出されたものであったが、その後、中性子星連星の合体 (GW170817, Abbott et al. 2017) や中性子星とブラックホールの連星合体 (GW200105, GW200115, Abbott et al. 2021a) の事例も検出され、現在までに 90 以上の重力波が観測されている (図 1.1, The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021a, The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021b)。その中でも、近年注目を集めているのが、合体した 2 つの天体の質量差が非常に大きいものである。LIGO-VIRGO による初期の観測 (Observation 1, Observation 2) では、同程度の質量をもつ 2 天体の合体が多く観測されていた (The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021a)。しかし、最近の観測 (Observation 3) で、質量差の大きい 2 天体の合体からの重力波が複数観測された。例えば、GW190412 (Abbott et al. 2020a) は合体した 2 つのブラックホールの質量比が 0.28 程度、GW190814 (Abbott et al. 2020b) は質量比が 0.11 程度であった。質量差が大きい連星合体が注目される理由は、それらの連星の形成機構が未解明だからである。

合体した連星の形成機構として広く考えられているシナリオでは、孤立した連星の進化によってブラックホール連星ができると考えられる。2 つの恒星から成る連星が恒星進化の後に超新星爆発を経験してブラックホールとなり、ブラックホール連星ができる。こうして形成されたブラックホール連星の質量比は 0.5 から 1.0 の間の値をとることが多く、質量の差が大きいブラックホール連星は形成されにくいと考えられている (Giacobbo and Mapelli 2018)。そのため、GW190412 や GW190814 のような質量差の大きいブラックホール連星合体を自然に生み出すことができるかは不明である。他の連星の形成機構として広く考えられているものは、星の個数密度が高い星団 (Dense star clusters) の中で、力学的相互作用によってブラックホール連星が形成され、合体するというものである。このシナリオにおいても、質量差の大きいブラックホール連星合体は起こりにくいことが示されている (e.g. Samsing and Hotokezaka 2021)。では、質量差の大きいブラックホール連星はどのように形成されるのだろうか。最近になって、Kozai-Lidov 機構によって質量差の大きいブラックホール連星合体が引き起こされるという考えが注目されている。

Kozai-Lidov 機構とは、階層的 3 体系に特徴的な機構である。階層的 3 体系とは、連星 (Inner binary) が少し遠方の 3 体目 (m_3) に束縛されているような系のことである。1 体目 (m_1) と 2 体目 (m_2) が小さな長軸半径をもつ連星 (Inner binary) を、3 体目と Inner binary が大きな長軸半径をも

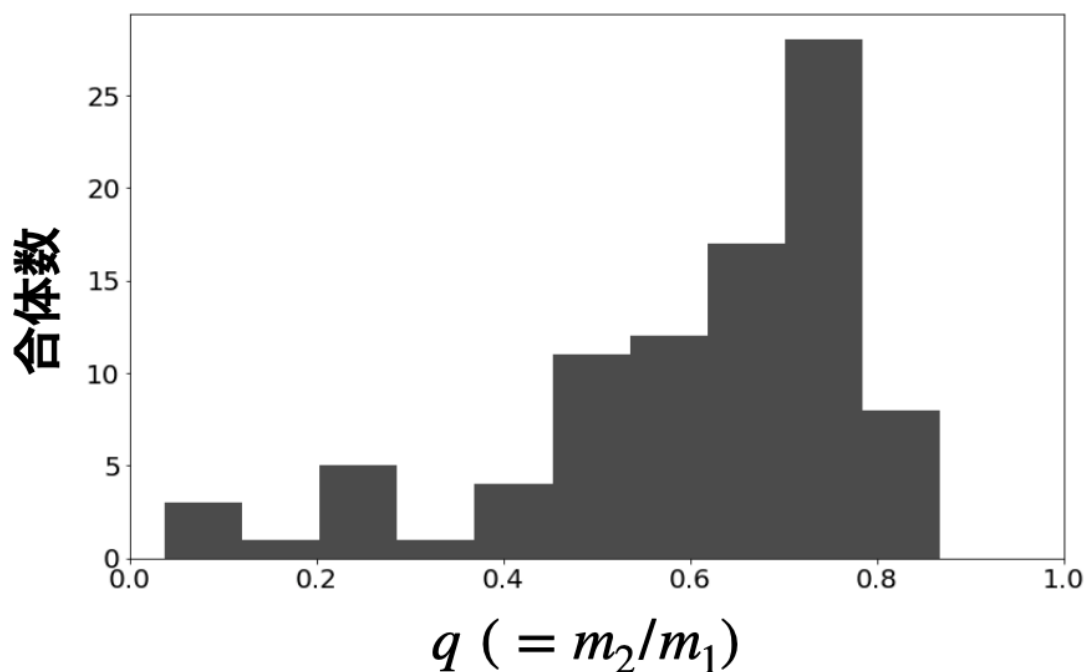


図 1.1: これまでに LIGO-VIRGO Collaboration で観測された重力波信号の質量比分布。重い方の天体を分母 (m_1) にとるため、質量比 q は $0 \leq q \leq 1$ である。縦軸は合体数、横軸は質量比 q である。なお、エラーバーは考慮していない。(The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021a と The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021b を参考に作成)

つ連星 (Outer binary) をなすという階層構造となっている (図 1.2)。Inner binary と Outer binary の軌道平面のなす角度を軌道傾斜角 (相互 Inclination) とよぶ。このような系の進化の時間スケールは Inner binary と Outer binary の軌道周期よりも十分に長く、系の進化を 2 つの軌道周期で平均化するという近似 (Secular 近似) をすることが多い。Inner binary の軌道平面が Outer binary の軌道平面に対して十分傾いている場合、この近似のもとでは、Inner binary と Outer binary はエネルギーのやり取りをせず、角運動量のみをやり取りする。このやり取りによって、Inner binary の軌道離心率と相互 Inclination が対応して振動的に変化する。これを Kozai-Lidov (KL) 機構とよぶ。また、KL 機構によって引き起こされた Inner binary の軌道離心率と相互 Inclination の振動を KL 振動と呼ぶ。

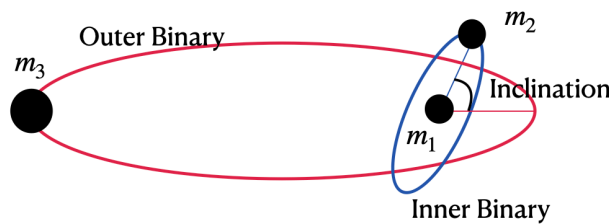


図 1.2: 階層的 3 体系: 1 体目 (m_1) と 2 体目 (m_2) が相対的に小さな長軸半径をもつ連星をなし (青の楕円, Inner binary)、3 体目 (m_3) と Inner binary が大きい長軸半径をもつ連星 (赤の楕円, Outer binary) をなす。Inner binary と Outer binary の軌道平面のなす角度を相互 Inclination とよぶ。

KL 機構により説明できる物理現象が 2 つある。1 つ目は、単独では長軸半径が大きく Hubble 時間以内に合体できない Inner binary が、3 体目との相互作用によって合体することである。これは、KL 機構によって Inner binary の離心率が振動的に変化し、極めて大きな値を取ることで 2 つの天体の距離が十分近くなり、重力波放出による合体に至るためである。2 つ目は、質量差が大きい 2 天体の連星の合体の割合は KL 機構により多くなることが示唆されている点である (e.g. Su et al. 2021, Martinez et al. 2022)。これは、質量差が大きい Inner binary をもつ階層的 3 体系では、KL 機構により離心率の増幅が非常に大きくなるため、合体が誘発されやすいためである。では、このような KL 機構をおこす階層的 3 体系は宇宙のどこに、またどれくらいあるのだろうか。

階層的 3 体系は、様々なスケールで宇宙に数多く存在していると考えられている。例えば、銀河中心に存在するとされている超巨大ブラックホールとその周囲にある連星 (e.g. Valtonen 1996, Khan et al. 2012) や、恒星とそれに束縛された周囲の惑星や小惑星や矮星の連星 (e.g. Polishook and Brosh 2006, Nesvorný et al. 2011, Margot et al. 2015)、星団中心に存在する重い天体 (中間質量ブラックホールなど) とそれに束縛された連星やブラックホール連星 (e.g. Fragione and Bromberg 2019) などである。本研究では、球状星団中にある中間質量ブラックホールとそれに束縛された恒星質量ブラックホール連星の階層的 3 体系に着目する。

球状星団とは、銀河形成の初期に生まれた数十万から数百万の恒星が球状に分布する古い星団であり、年齢はおおよそ 100 億年以上と言われている。球状星団中の天体の総質量はおおよそ数十万から数百万太陽質量であり、中心にいくほど天体は密集しており、中心付近には多くの恒星質量ブラックホールや恒星質量ブラックホール連星が集まっているとされている。また、数十パー

4 イントロダクション

セント以上の割合の球状星団の中心には中間質量ブラックホールが存在することを考えられており (e.g. Miller and Hamilton 2002, Giersz et al. 2015)、球状星団には中間質量ブラックホールと恒星質量ブラックホール連星の階層的 3 体系が多数存在すると考えられている (e.g. Fragione and Bromberg 2019)。天の川銀河の中の球状星団は現在までに 150 個以上観測されており、非常に数の多い天体だと考えられている。そのため、本研究では球状星団中の中間質量ブラックホールと恒星質量ブラックホール連星の階層的 3 体系が、観測された重力波源と考え、このような系に着目する。

KL 機構の影響を受けた階層的 3 体系の力学進化については、これまでシミュレーション (e.g. Fragione and Bromberg 2019) や半解析的、解析的な手法が用いられてきた (e.g. Naoz et al. 2013a, Su et al. 2021)。シミュレーションには直接 N 体計算コードと摂動計算コードが用いられてきた。直接 N 体計算コードとは、3 つの天体の力学的進化を追う数値シミュレーションであり、Secular 近似などの近似を取り入れていないため短周期の摂動を捉えることができる。その一方、非常に計算時間が長い点や累積誤差の影響によって、長時間の進化を追うことは難しいとされている。摂動計算コードとは、Secular 近似のもとで階層的 3 体系の力学進化を計算するシミュレーションコードであり、近似を取り入れているため直接 N 体計算コードよりも数百倍以上計算時間が短い。一方で、近似を取り入れているために短い時間スケールの摂動は捉えることができず、短い時間スケールの摂動が大きく影響するような系では、系の進化を見誤ってしまう。

KL 機構によって誘発される合体には 2 種類ある。1 つ目は One Shot 合体とよばれ、KL 振動の 1 周期の間に唐突に重力波を放出して合体するものである。2 つ目は、Smooth 合体とよばれ、KL 振動によって Inner binary の離心率が大きくなる度に少しずつ重力波を放出し、時には 10^8 年近い時間をかけてゆっくり合体するものである (Su et al. 2021)。直接 N 体計算コードは計算時間が非常に長く、長時間の進化を追うことは技術的に不可能とされているため、長時間かけて引き起こされる Smooth 合体を考慮した KL 機構によるブラックホール連星合体についての研究は、これまで摂動計算コードのみを用いて行われてきた。摂動計算コードによる結果を適切に解釈するには、 1.0×10^7 年以上の長時間進化を 2 つのコード両方で追い、結果を統計的に比較することが非常に重要であるが、このような研究は現在まで進んでいない。

本研究では、初めて、直接 N 体計算コードと摂動計算コードの両方で多数の全く同じ系に対して 3.0×10^7 年までの長時間の進化を追い、結果を統計的に比較し、2 つのコードでの結果の違いを定量的に明らかにする。本研究で用いる直接 N 体計算コード (TSUNAMI, Trani 2020) は計算のタイムステップを離心率の関数として変化させるなどの様々な手法により、従来の直接 N 体計算コードよりも速く精度高く系の進化を追うことができ、比較的長期の時間進化を追うことができるように改良されている。そのため、本研究では 3.0×10^7 年までという長期の進化を直接 N 体計算コードと摂動計算コードの両方でシミュレーションすることが可能である。なお、2 つのコードはともに、孤立した階層的 3 体系のシミュレーションを行う。

また、本研究では上記の比較に基づいて、階層的 3 体系の初期条件において摂動計算コードの結果が妥当な領域を特定する。さらにこの結果を用いて、長時間合体を考慮したより正確な、KL 機構による合体の質量比分布を予測し、加えて 3 体目の質量や質量比の初期分布が与える影響を明らかにする。最後に、上記の結果をもとに、長時間合体を考慮した KL 機構による合体の質量比 q に対する実際の合体率を予測し、LIGO-VIRGO の観測による結果と比較することで、KL 機構によって誘発された合体の寄与について議論する。

本論文は以下のように構成される。まず、第2章では、天体力学において重要な概念を2体問題の場合について述べる。次に、第3章では、階層的3体系の定義と階層的3体系における力学について述べ、KL機構とKL機構に関連する様々な効果や時間スケールについて述べる。また、第4章では、中心に中間質量ブラックホールをもつ球状星団における様々な時間スケールについて述べる。続いて、第5章で本研究に重要となる先行研究と、本研究の手法、結果とその解釈および結論について述べる。最後に、第6章で本論文全体のまとめを述べる。

Chapter 2

2体問題

階層的3体系における力学について述べる前に、まず2体問題の力学について述べる。まず、2.1節でNewton力学における2体問題を再導入し、2.2節で2体の運動を決定する積分定数について述べる。続いて2.3節、2.4節、2.6節でKepler法則について述べ、2.5節で2体運動の軌道を記述する直感的にわかりやすいパラメータ(軌道要素)を導入する。その後、2.7節でHamilton力学の復習をし、2.8節で2体問題をHamilton力学によって記述する。最後に、2.9節で天体力学で多く用いられる正準変数 Delaunay's elements について述べる。

2.1 Newton力学による2体問題

2つの物体が重力相互作用のみで運動をする系を考える (Valtonen and Karttunen 2006)。天体1の質量、位置ベクトルをそれぞれ m_1 , \mathbf{r}_1 、天体2の質量、位置ベクトルをそれぞれ m_2 , \mathbf{r}_2 とし、天体2の天体1に対する相対位置ベクトルを $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ とすると、Newtonの運動方程式より、

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= G \frac{m_2 \mathbf{r}}{r^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -G \frac{m_1 \mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}\tag{2.1}$$

が成り立つ。ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ とし、万有引力定数を G とおいた。式(2.1)の下式から上式を辺々引くと、相対位置ベクトルを用いて、

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3}\tag{2.2}$$

が成り立つ。ここで、 $M = m_1 + m_2$ とおいた。次に、2つの天体の重心の位置ベクトルを \mathbf{R} とすると、重心の位置ベクトル \mathbf{R} は

$$M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2\tag{2.3}$$

をみताす。重心に対する天体1、天体2の相対位置ベクトルをそれぞれ \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 とすると、 $m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2 = 0$ より、

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{R}_1\tag{2.4}$$

が成り立つ。したがって、天体 2 の天体 1 に対する相対位置ベクトル \mathbf{r} は、

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \\ &= -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{R}_1 \\ &= -\frac{M}{m_2} \mathbf{R}_1\end{aligned}\tag{2.5}$$

であるから、これを用いて $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ を \mathbf{r} で表すと、

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= -\frac{m_2}{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{r}\end{aligned}\tag{2.6}$$

となる。

2.2 積分定数

2 体問題を解くには、12 個の積分定数が必要である (Valtonen and Karttunen 2006)。12 個のうち 6 個は重心の運動を表す。残り 6 つは軌道を定めるのに必要であるが、特にそのうちの 3 つは重心系における角運動量、1 つは重心系のエネルギーを決めるのに必要である。以下では軌道を定める 6 つの定数を求めていく。

まず、角運動量に関する 3 つの積分定数を求める。角運動量の代わりによく用いられる、単位質量あたりの角運動量 $\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ を考える。 \mathbf{k} の時間の一階微分をとると、

$$\dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}\tag{2.7}$$

となり、 \mathbf{k} は定数ベクトルであることがわかる。すなわちこれによって 3 つの積分定数が得られた。定義より、このベクトルは常に位置ベクトルと速度ベクトルに垂直である。つまり、天体の運動はこのベクトルに垂直な平面に制限されている。

次に、ベクトル $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}$ について考える。このベクトルの時間の一階微分を考えると、 \mathbf{k} は定数ベクトルであるから、式 (2.2) を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) &= \mathbf{k} \times \ddot{\mathbf{r}} \\ &= -(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} \\ &= -\frac{\mu}{r^3} ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{r}) \\ &= -\mu \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\dot{r} \mathbf{r}}{r^2} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right)\end{aligned}\tag{2.8}$$

となる。ここで、 $\mu = GM = G(m_1 + m_2)$ とおいた。よって、

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{0}\tag{2.9}$$

が成り立つ。ここで、

$$\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mu \mathbf{e} \quad (2.10)$$

によってベクトル \mathbf{e} を定義すると、このベクトルは時間に依らない定数ベクトルである。このベクトル \mathbf{e} を離心率ベクトルとよぶ。また、このベクトルの大きさ $e (= |\mathbf{e}|)$ は軌道離心率である (Appendix.A を参照)。これによって3つの積分定数が得られた。

これまでに定数ベクトルが2つ得られたが、これらのベクトル \mathbf{k} , \mathbf{e} は独立ではない。これら2つのベクトルの内積をとると、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} &= -\frac{1}{\mu} \left(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mu \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu} \left((\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{r} \right) \\ &= -\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{r} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

となり、定数ベクトル \mathbf{e} に対して、定数ベクトル \mathbf{k} に垂直な平面に存在するという1つの拘束条件が課せられる。したがって、これまでに得られた独立な積分定数は5つである。

次に、単位質量あたりの運動エネルギーの時間の一階微分をとると、式(2.2)より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \\ &= -\mu \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\mu \frac{\dot{r}}{r^2} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。よって、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (2.13)$$

が成り立つ。ここで、

$$\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{\mu}{r} = h \quad (2.14)$$

によって h を定義すると、 h は定数であり、単位質量あたりの運動エネルギーと位置エネルギーの和になっていることが分かる。この定数 h はエネルギー積分とよばれる。これは、定数ベクトル \mathbf{k} 、 \mathbf{e} の大きさ k 、 e を用いて、

$$h = \frac{G^2 M^2}{2k^2} (e^2 - 1) \quad (2.15)$$

と書くこともできる。よって、これは2つの定数ベクトル \mathbf{k} 、 \mathbf{e} と独立な物理量ではない。

これまで得られた積分定数は軌道の傾きや形を記述するものであり、ある時刻に天体 2 が天体 1 に対してどこにいるかに関する積分定数が不足している。式 (2.14) を $|\dot{\mathbf{r}}|$ について解くと、

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{2 \left(h + \frac{\mu}{r} \right)} \quad (2.16)$$

となる。これより、天体 2 が天体 1 に対して時刻 τ に位置 \mathbf{r}_0 にあったとすると、

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{|d\mathbf{r}|}{\sqrt{2 \left(h + \frac{\mu}{r} \right)}} &= \int_{\tau}^t dt \\ &= t - \tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

が得られる。この τ は定数ベクトル \mathbf{e} 、 \mathbf{k} と独立な定数である。こうして 6 個目の積分定数が得られた。 τ はしばしば近点通過時刻に取られ、その場合には近点時間とよばれる。

2.3 Kepler の第 1 法則

離心率ベクトル \mathbf{e} と相対位置ベクトル \mathbf{r} の内積をとると、式 (2.10) とベクトル \mathbf{k} の定義より、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} &= -\frac{1}{\mu} \left[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mu \frac{r^2}{r} \right] \\ &= -\frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) + \mu r) \\ &= \frac{k^2}{\mu} - r \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。これと $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r e \cos \phi$ を用いると、天体 1 と天体 2 の相対距離 r は、

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e \cos \phi} \quad (2.19)$$

と求められる。これは、極座標における軌道方程式である。ここで、 ϕ はベクトル \mathbf{r} とベクトル \mathbf{e} のなす角度であり、真近点角 (True anomaly) とよばれる。

以上により、天体 2 は天体 1 を 1 つの焦点とする楕円軌道を描くことが確かめられた。これは、Kepler の第 1 法則 (楕円軌道の法則) である (Valtonen and Karttunen 2006)。

2.4 Kepler の第 2 法則

極座標 (r, ϕ, z) を用いて考える。 r 方向の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{e}}_r$ 、それに垂直な軌道平面上の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ 、軌道平面に垂直な単位ベクトルを $\hat{\mathbf{e}}_z$ とする。このとき、速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}$ は、

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.20)$$

と表せる。また、単位質量当たりの角運動量ベクトル \mathbf{k} は、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= r \hat{\mathbf{e}}_r \times (\dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi) \\ &= r^2 \dot{\phi} \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad (2.21)$$

と表せる。

時間 dt の間に天体 2 が掃いた面積を dA とすると、この面積は、時間 dt の間の 2 天体間の距離の変化 dr と真近点角の変化 $d\phi$ を用いて、

$$\begin{aligned} dA &= \int_0^r r dr d\phi \\ &= \frac{1}{2} r^2 d\phi \end{aligned} \quad (2.22)$$

である。よって、面積速度 \dot{A} は、式 (2.21) より、

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} \\ &= \frac{1}{2} k \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。 k は定数なので、面積速度 \dot{A} も定数である。これは、Kepler の第 2 法則 (面積速度一定の法則) である。

2.5 軌道要素

2.2 節で、軌道を記述する 6 つの積分定数を求めた。これらの 6 つの積分定数は軌道を完全に決定するが、ここでは、これらをより扱いやすい 6 つの軌道を決定する定数に変換する (Valtonen and Karttunen 2006)。

まず、天体 1 を原点に取り、直交座標 (x, y, z) をとる (図 2.1)。このとき、軌道平面と xy 平面 ($x > 0$) の交差線を Line of nodes とよび、天体 1 と近点を結ぶ直線を Line of apses とよぶ。ここで、Line of nodes は天体 1 を通る。

軌道平面に垂直な定数ベクトル \mathbf{k} には、3 つの積分定数が含まれる。これらはベクトルの大きさ k と、ベクトルの向き、すなわち軌道の傾きを決定する 2 つの積分定数と考えることができる。軌道の傾きは、ある 2 つの角度によって完全に決定することができる。1 つ目の角度はベクトル \mathbf{k} と z 軸のなす角度 i であり、これは Inclination とよばれる (図 2.1 の角度 i)。2 つ目の角度は、 x 軸 ($x > 0$) と Line of nodes のなす角度 Ω であり、これは Longitude of the ascending node とよばれる (図 2.1 の角度 Ω)。3 つ目の角度は、Line of apses と Line of nodes のなす角度 ω であり、これは Argument of perihelion とよばれる (図 2.1 の角度 ω)。

ここで、式 (2.19) より、 k^2/μ は $\phi = \pi/2$ の時の天体 2 と天体 1 の相対距離に等しいから、軌道長軸半径を a とすると、

$$\frac{k^2}{\mu} = a(1 - e^2) \quad (2.24)$$

が成り立つ。ただし、天体 2 が天体 1 に束縛されている場合 ($0 \leq e < 1$) のみを考えた。 e , k , μ は定数であるから、 a も定数である。したがって、積分定数 k の代わりに軌道長軸半径 a を使うことができるので、幾何的にわかりやすい軌道長軸半径 a を新しい積分定数として採用する。以上から、軌道の位置や大きさ、形を決定する新しい 5 つの積分定数 (i, Ω, ω, e, a) が得られた。最後に、天体 2 の位置を決定する積分定数として、2.2 節で定義した近点時間 τ を採用する。

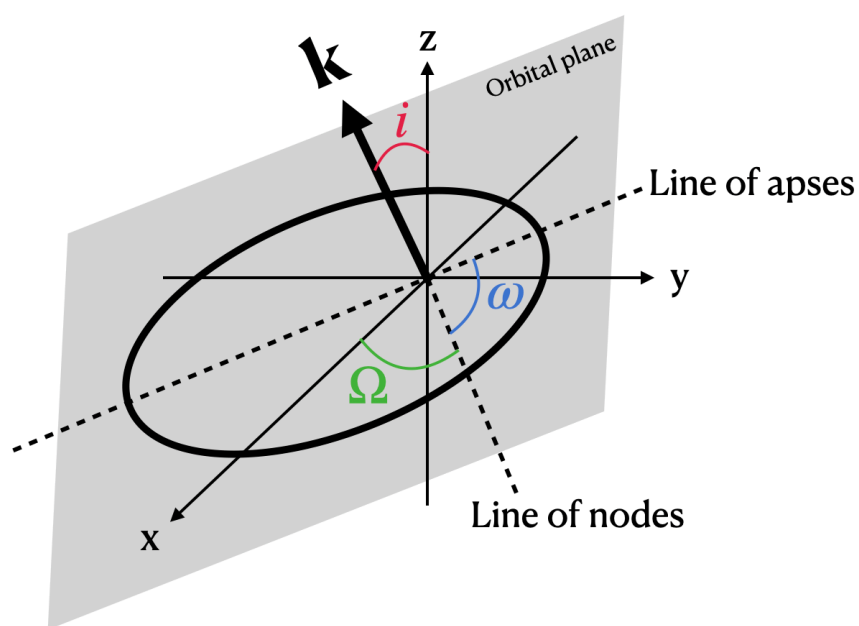


図 2.1: 軌道の向きを決定する 3 つの角度: 天体 1 を原点にとり、直交座標 (x, y, z) をとる。このとき、軌道平面と xy 平面 ($x > 0$) の交差線を Line of nodes とよび、天体 1 と近点を結ぶ直線を Line of apses とよぶ。また、軌道平面に垂直なベクトル \mathbf{k} と z 軸のなす角度 i を Inclination といひ、 x 軸 ($x > 0$) と Line of nodes のなす角度 Ω を Longitude of the ascending node、Line of apses と Line of nodes のなす角度 ω を Argument of perihelion といひ。

2.6 Kepler の第3法則

面積速度 (式 (2.23)) より、時間 dt の間に天体 2 が掃いた面積を dA とすると、

$$dA = \frac{1}{2}kdt \quad (2.25)$$

である。これを両辺積分すると、

$$\int_{\text{orbital ellipse}} dA = \int_0^P \frac{1}{2}kdt \quad (2.26)$$

となる。ここで、軌道周期を P とした。したがって、楕円の面積 $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ を用いて、

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}kP \quad (2.27)$$

が成り立つ。式 (2.24) より、 $k = \sqrt{a\mu(1-e^2)}$ であるから、これを代入して整理すると、

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \quad (2.28)$$

が得られる。これは、Kepler の第3法則 (調和の法則) である。

2.7 Hamilton 力学

2.7.1 Lagrange 力学

系の運動エネルギーを T 、ポテンシャルエネルギーを V としたとき、Lagrangian \mathcal{L} を、

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.29)$$

で定義する。このとき、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.30)$$

が運動方程式を与える。ここで、 q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は一般化座標である。

また、一般化座標 q_i に共役な一般化運動量 p_i を、

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.31)$$

で定義する。

2.7.2 Hamilton 力学

Hamiltonian \mathcal{H} を、

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.32)$$

と定義する。このとき、Hamilton の正準運動方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.33)$$

は Euler-Lagrange 方程式 (式 (2.30)) と等価である。ここで、

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} \quad (2.34)$$

が成り立つ。

2.7.3 正準変換

正準変換とは、正準変数 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) からその関数として与えられる別の変数 $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t))$ への変換のうち、特に変換後の変数が Hamilton の正準運動方程式 (式 (2.33)) をみたすような変換のことをいう (畑 et al. 2014)。

変換後の Hamiltonian を \mathcal{K} としたとき、 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) に対する Hamilton の正準運動方程式 (式 (2.33)) から、 $(\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t))$ に対する Hamilton の正準運動方程式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.35)$$

が導かれるためには、

$$p_i = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial P_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.36)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t}$$

をみたす母関数 $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ が存在すればよい。すなわち、母関数 $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ を 1 つ与えると、式 (2.36) によって正準変換が 1 つ定められる。

2.7.4 Hamilton-Jacobi 理論

Hamilton-Jacobi 理論とは、変換後の Hamiltonian \mathcal{K} が 0 となるような正準変換を考えることにより、扱いやすい運動方程式の解を得る方法である (畑 et al. 2014)。

$\mathcal{K} = 0$ の時、Hamilton の正準運動方程式 (式 (2.35)) より、

$$\dot{Q}_i = 0, \quad \dot{P}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.37)$$

となるから、この解は、

$$Q_i(t) = \beta_i, \quad P_i(t) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.38)$$

と求められる。ここで、 α_i と β_i は定数であり、初期条件によって定められる。変換前の運動方程式の解は、 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) を (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) で表すことによって求められる。

この正準変換の母関数 $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \Phi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$ は、式 (2.36) より、

$$p_i = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.39)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} = 0$$

をみます。ここで、Hamilton の主関数 $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ を $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ によって定義すると、式 (2.39) より、これは、

$$\mathcal{H}\left(q_1, q_2, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.40)$$

をみます。これを Hamilton-Jacobi 方程式とよぶ。ここで、

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.41)$$

である。

2.8 Hamilton 力学による 2 体問題

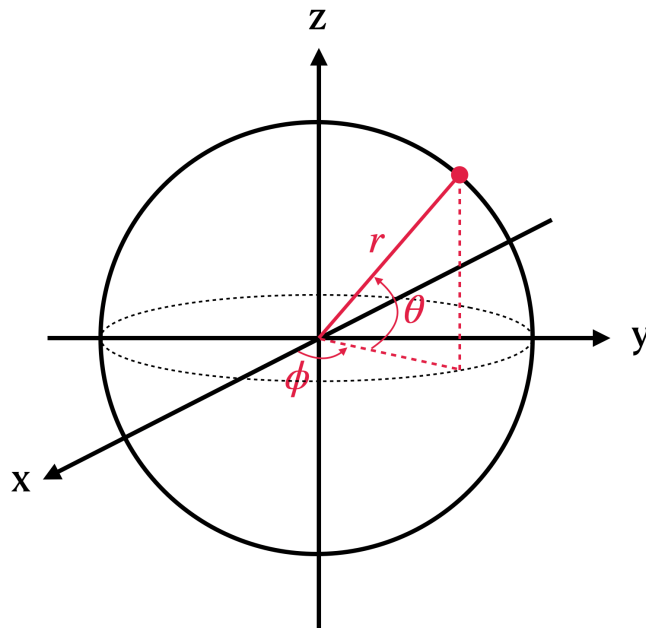


図 2.2: 球面座標 (r, θ, ϕ) と直交座標 (x, y, z) の関係図

図 2.2 のような球面座標 (r, θ, ϕ) を用いる。この力学系の運動エネルギー T は、

$$T = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \quad (2.42)$$

であり、ポテンシャルエネルギー V は、

$$V = -\mu \frac{m_2}{r} \quad (2.43)$$

である。よって、この系の Lagrangian は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + \mu \frac{m_2}{r} \end{aligned} \quad (2.44)$$

である。これより、一般化座標 (r, θ, ϕ) に共役な一般化運動量 (p_r, p_θ, p_ϕ) を求めると、

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m_2 \dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_2 r^2 \dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_2 r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる。また、この系の Hamiltonian \mathcal{H} は、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ &= \left(p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} \right) - \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \mu \frac{m_2}{r} \\ &= \frac{1}{m_2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \frac{1}{2m_2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \mu \frac{m_2}{r} \\ &= \frac{1}{2m_2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \mu \frac{m_2}{r} \end{aligned} \quad (2.46)$$

であり、これは系の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の和である。

変換後の Hamiltonian が 0 になるような正準変換を考える。このとき、主関数 S は、Hamilton-Jacobi 方程式 (式 (2.40))

$$\frac{1}{2m_2} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right) - \mu \frac{m_2}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.47)$$

をみたく。この方程式の解を変数分離型で

$$S = S_t(t) + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi) \quad (2.48)$$

とすると、式 (2.47) より、

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{dt} &= -\alpha_1 \\ \frac{dS_\phi}{d\phi} &= \alpha_2 \\ \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta} &= \alpha_3 \\ \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2} &= 2m_2 \left(\alpha_1 + \frac{\mu m_2}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

が成り立つ。ここで、定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ をそれぞれ正準変換後の一般化運動量だとすると、

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \alpha_1 \\
 P_2 &= \alpha_2 \\
 P_3 &= \alpha_3 \\
 Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \\
 Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} \\
 Q_3 &= \frac{\partial S}{\partial P_3} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

である。

一般化運動量 P_1, P_2, P_3 を求める。まず、式 (2.47)~式 (2.50) より、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} &= \mathcal{H} - \alpha_1 \\
 &= m_2 h - P_1 \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

であるから、 $P_1 = m_2 h$ である。ここで、 h は単位質量当たりの系の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の和であり、したがって式 (2.15) と式 (2.24) を用いると、

$$\begin{aligned}
 P_1 &= m_2 h \\
 &= m_2 \frac{G^2 M^2}{2\mu a (1 - e^2)} (e^2 - 1) \\
 &= -m_2 \frac{\mu}{2a}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

である。すなわち P_1 はこの力学系の総エネルギーに等しい。

次に、 $\frac{\partial S}{\partial \phi} = p_\phi$ であるから、式 (2.45)、式 (2.48)~式 (2.50) より、

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \alpha_2 \\
 &= \frac{dS_\phi}{d\phi} \\
 &= \frac{\partial S}{\partial \phi} \\
 &= p_\phi \\
 &= m_2 r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

である。したがって、 P_2 は系の角運動量の z 成分であるから、式 (2.24) と Inclination(図 2.1) を用いて、

$$P_2 = m_2 \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i \tag{2.54}$$

とかける。

最後に、 $\frac{\partial S}{\partial \theta} = p_\theta$ であるから、式 (2.45)、式 (2.48)~式 (2.50) より、

$$\begin{aligned}
 P_3 &= \alpha_3 \\
 &= \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta} \\
 &= \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta} \\
 &= p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\cos^2 \theta} \\
 &= m_2 r^2 \sqrt{\dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\phi}^2}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

となる。これは系の全角運動量であるから、

$$P_3 = m_2 \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \tag{2.56}$$

とかける。以上より、一般化運動量 P_1, P_2, P_3 が

$$\begin{aligned}
 P_1 &= m_2 h = -m_2 \frac{\mu}{2a} \\
 P_2 &= m_2 \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i \\
 P_3 &= m_2 \sqrt{\mu a (1 - e^2)}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

と求められた。

次に、一般化座標 Q_1, Q_2, Q_3 を求める。

式 (2.48) と式 (2.49) より、主関数 S は、

$$S = -t\alpha_1 + \phi\alpha_2 + \int d\theta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta}} + \int dr \sqrt{2m_2 \left(\alpha_1 + \frac{\mu m_2}{r} \right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}} \tag{2.58}$$

と求められる。したがって、式 (2.50) より、

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{m \, dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 + \mu m/r) - \alpha_3^2/r^2}} = -t + I_1 \\
 Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \phi - \alpha_2 \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{\alpha_3^2 - \alpha_2^2/\cos^2 \theta}} = \phi - \alpha_2 I_3 \\
 Q_3 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \alpha_3 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \alpha_2^2/\cos^2 \theta}} - \frac{\alpha_3}{m_2} \int \frac{m_2 dr}{r^2 \sqrt{2m_2(\alpha_1 + \mu m_2/r) - \alpha_3^2/r^2}} \\
 &= \alpha_3 (I_4 - I_2/m_2)
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

となる。ここで、煩雑な計算により、

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{m \, dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 + \mu m/r) - \alpha_3^2/r^2}} = t - \tau \\
I_2 &= \int \frac{m_2 dr}{r^2 \sqrt{2m_2(\alpha_1 + \mu m_2/r) - \alpha_3^2/r^2}} = \frac{f}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}} \\
\alpha_2 I_3 &= \alpha_2 \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{\alpha_3^2 - \alpha_2^2/\cos^2 \theta}} = \phi - \Omega \\
\alpha_3 I_4 &= \alpha_3 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \alpha_2^2/\cos^2 \theta}} = \omega + f
\end{aligned} \tag{2.60}$$

が導かれる。 f は真近点角 (True anomaly) である。したがって、式 (2.59) と式 (2.57) より、一般化座標 Q_1, Q_2, Q_3 が

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -t + t - \tau = -\tau \\
Q_2 &= \phi - (\phi - \Omega) = \Omega \\
Q_3 &= \omega + f - \frac{\alpha_3}{m_2} \frac{f}{\sqrt{a\mu(1-e^2)}} = \omega
\end{aligned} \tag{2.61}$$

と求められた。

以上により、正準変数 ($Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$) が

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -\tau \\
Q_2 &= \Omega \\
Q_3 &= \omega \\
P_1 &= m_2 h = -m_2 \frac{\mu}{2a} \\
P_2 &= m_2 \sqrt{\mu a (1-e^2)} \cos i \\
P_3 &= m_2 \sqrt{\mu a (1-e^2)}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

と求められ、2体問題の Hamilton-Jacobi 方程式を完全に解くことができた。ここで得られた解 ($Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$) は全て定数である (Valtonen and Karttunen 2006)。

2.9 Delaunay's elements

天体力学でよく用いられる Delaunay's elements を導入する。Delaunay's elements では、3つの一般化座標は全て角度である。これは軌道の全角運動量や軌道を決定する特徴的な角度 (Argument of perihelion ω , Longitude of the ascending node Ω) を要素にもつため、天体の束縛運動を記述するのに適している。

最も単純な 2 体問題の解は、前節 (式 (2.62) より、

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -\tau \\
 q_2 &= \Omega \\
 q_3 &= \omega \\
 p_1 &= -\frac{\mu}{2a} \\
 p_2 &= \sqrt{a\mu(1-e^2)} \cos i \\
 p_3 &= \sqrt{a\mu(1-e^2)}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

と求められた。ここで、簡単のために式 (2.57) で求められた一般化運動量を質量 m_2 (定数) で割った。変数 q_2, q_3 は角度であるが、 q_1 は角度ではない。よって、 q_1 を平均近点角 (Mean anomaly) $M = \frac{2\pi}{P}(t-\tau) = n(t-\tau)$ という角度を表すものに取り直す。ここで、 P は軌道周期であり、 $n = \frac{2\pi}{P}$ とおいた。このときの正準変数を

$$\begin{aligned}
 l &= M = n(t-\tau) \\
 g &= \omega \\
 h &= \Omega \\
 L & \\
 G &= \sqrt{a\mu(1-e^2)} \\
 H &= \sqrt{a\mu(1-e^2)} \cos i
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

とおく。

一般化座標 l に共役な一般化運動量 L と変換後の Hamiltonian \mathcal{K} を求めていく。ある母関数 F を、

$$F = \left(nL - \frac{3\mu}{2a} \right) (t + q_1) + q_2 H + q_3 G \tag{2.65}$$

とおくと、 $p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = nL - \frac{3\mu}{2a}$ より、

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{n} \left(-\frac{\mu}{2a} + \frac{3\mu}{2a} \right) \\
 &= \frac{\mu}{an} \\
 &= \sqrt{a\mu}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

となる。ここで、 $n = 2\pi/P = a^{3/2}/\sqrt{\mu}$ を用いた。このとき、変換後の Hamiltonian \mathcal{K} は、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} &= \frac{\partial F}{\partial t} \\
 &= -\frac{3\mu}{2a} + \frac{\mu}{a} \\
 &= -\frac{\mu}{2a} \\
 &= -\frac{\mu^2}{2L^2}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

となる。以上より、一般化座標 l に共役な一般化運動量 L と変換後の Hamiltonian \mathcal{K} が求められ、

$$\begin{aligned}l &= M \\g &= \omega \\h &= \Omega \\L &= \sqrt{a\mu} \\G &= \sqrt{a\mu(1-e^2)} \\H &= \sqrt{a\mu(1-e^2)} \cos i \\ \mathcal{K} &= -\frac{\mu^2}{2L^2}\end{aligned} \tag{2.68}$$

となることがわかった。これらは Hamilton の正準運動方程式をみたし、Delaunay's elements とよばれる (Valtonen and Karttunen 2006)。

Chapter 3

Kozai-Lidov 機構

本研究のテーマである Kozai-Lidov 機構について述べる。まず、3.1 節で階層的三体系の力学や Secular 近似について述べ、3.2 節で Kozai-Lidov 機構について述べる。3.3 節では、Kozai-Lidov 機構による離心率や相互 Inclination の振動の周期などの Kozai-Lidov 機構に関する時間スケールを述べ、3.4 節で Kozai-Lidov 機構に特徴的な Flip という現象が起きる条件について述べる。さらに、3.5 節で Secular 近似における階層的 3 体系の力学について、近似の妥当性を議論する。最後に、3.6 節で Kozai-Lidov 機構による離心率や相互 Inclination の振動に影響を与える効果、特に一般相対論による効果について述べる。

3.1 階層的 3 体系

前章で、2 体問題は解析的に解け、軌道要素をあらわに求めることができることを示した。しかし天体が 1 つ増え、3 体問題となった場合には解析的に解くことは一般にできない。しかし、新たな拘束条件が付け加わった場合にはその限りではない。ここでは、3 体が階層構造をもつという拘束条件を課すことにする。

3.1.1 階層的 3 体系と Secular 近似

階層的 3 体系とは連星が少し遠方にある 3 体目の天体に束縛されているような系のことをいう (図 3.1)。すなわち、1 体目と 2 体目が連星をなし、その連星が 3 体目と大きな連星をなすという階層構造をもつ系である。1 体目と 2 体目がなす小さな連星のことを Inner binary といい、Inner binary と 3 体目のなす大きな連星のことを Outer binary という。ここで、階層的 3 体系は Inner binary の長軸半径と Outer binary の長軸半径の比が 1 よりも十分小さいという条件 ($\alpha = a_{\text{in}}/a_{\text{out}} \ll 1$) をみたすとする。以下では、下添字 in は Inner binary のことを、下添字 out は Outer binary のことを表す。

階層的 3 体系の力学進化を考える際には、階層的 3 体系の力学進化は Inner binary や Outer binary の軌道周期よりも十分長い時間スケールで起こると考え、系の時間発展を Inner binary と Outer binary の軌道周期で平均化するという近似をしばしばとる。これを Secular 近似という (e.g. Marchal 1990)。この近似のもとでは、Inner binary と Outer binary は角運動量をやり取りするが、エネルギーのやり取りは行われぬ。すなわち、各軌道の形や傾きは変化するが、長軸半径は変化しない (Appendix.A を参照)。また、この近似のもとでは、Inner binary と Outer binary

の軌道周期よりも短い時間スケールで起こる力学現象は捉えることができない(3.5節を参照)。しかし、十分安定な階層的3体系の力学進化を考える際にはこの近似は非常に有効である。

3.1.2 Jacobi 座標

階層的3体系を解析するためには、Jacobi 座標 (Murray and Dermott 2000, p. 441-443) を用いるのが便利である。Jacobi 座標では、1体目に対する2体目の相対座標 r_{in} と Inner binary の重心に対する3体目の相対座標 r_{out} を用いて記述する(図3.1)。このとき、この3体系の支配的な動きは、Inner binary の Kepler 軌道と Outer binary の Kepler 軌道の2つに分けることができる。したがって、この系の Hamiltonian \mathcal{H} は、2つの Kepler 項と、2つの軌道の相互作用項の和として書くことができ、

$$\mathcal{H} = \frac{k^2 m_1 m_2}{2a_{\text{in}}} + \frac{k^2 m_3 (m_1 + m_2)}{2a_{\text{out}}} + \frac{k^2}{a_{\text{out}}} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \right)^j M_j \left(\frac{r_{\text{in}}}{a_{\text{in}}} \right)^j \left(\frac{a_{\text{out}}}{r_{\text{out}}} \right)^{j+1} P_j(\cos \Phi) \quad (3.1)$$

となる。3項目の相互作用項は微量 $\alpha = a_{\text{in}}/a_{\text{out}}$ で展開されている (e.g. Harrington 1968)。ここで、万有引力定数を k^2 とし、1体目、2体目、3体目の質量をそれぞれ m_1, m_2, m_3 、Inner binary、Outer binary の長軸半径をそれぞれ $a_{\text{in}}, a_{\text{out}}$ 、相対位置ベクトル r_{in} と r_{out} のなす角度を Φ とした。また、 $P_j(x)$ はルジャンドル多項式であり、 M_j は、

$$M_j = m_1 m_2 m_3 \frac{m_1^{j-1} - (-m_2)^{j-1}}{(m_1 + m_2)^j} \quad (3.2)$$

である。ここで、Hamiltonian \mathcal{H} は、 $\mathcal{H} > 0$ の時に束縛系であるようにとった。

Hamiltonian \mathcal{H} (式(3.1)) の1項目は Inner binary の Kepler 項、2項目は Outer binary の Kepler 項であり、3項目は Inner binary と Outer binary の相互作用を記述している。

3.1.3 階層的3体系における Delaunay's elements

階層的3体系における Delaunay's elements は、

Mean anomalies $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$

Arguments of periapse (図2.1の ω) $g_{\text{in}}, g_{\text{out}}$

Longitudes of ascending nodes (図2.1の Ω) $h_{\text{in}}, h_{\text{out}}$

という6つの角度と、これらに共役な運動量

$$\begin{aligned} L_{\text{in}} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{k^2 (m_1 + m_2) a_{\text{in}}} \\ L_{\text{out}} &= \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} \sqrt{k^2 (m_1 + m_2 + m_3) a_{\text{out}}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} G_{\text{in}} &= L_{\text{in}} \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2} \\ G_{\text{out}} &= L_{\text{out}} \sqrt{1 - e_{\text{out}}^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

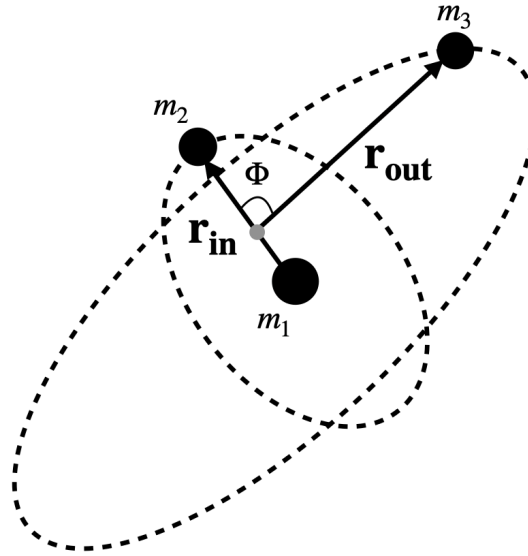


図 3.1: 階層的 3 体系で用いられる Jacobi 座標: m_1, m_2, m_3 はそれぞれ 1 体目、2 体目、3 体目の質量、 \mathbf{r}_{in} は 1 体目に対する 2 体目の相対位置ベクトル、 \mathbf{r}_{in} は Inner binary の重心に対する 3 体目の相対位置ベクトル、 \mathbf{r}_{in} と \mathbf{r}_{out} のなす角度を Φ とした (Naoz et al. 2013a を参考に作成した)

$$\begin{aligned} H_{\text{in}} &= G_{\text{in}} \cos i_{\text{in}} \\ H_{\text{out}} &= G_{\text{out}} \cos i_{\text{out}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

である。ここで、Inner binary、Outer binary の軌道離心率をそれぞれ $e_{\text{in}}, e_{\text{out}}$ とし、Inner binary、Outer binary の Inclination (図 2.1 の i) をそれぞれ $i_{\text{in}}, i_{\text{out}}$ とした。また、 $h_{\text{in}} - h_{\text{out}} = \pi$ が成り立つ。

$\mathbf{G}_{\text{in}}, \mathbf{G}_{\text{out}}$ はそれぞれ Inner binary、Outer binary の角運動量ベクトルであり、 $\mathbf{H}_{\text{in}}, \mathbf{H}_{\text{out}}$ は角運動量ベクトルの z 成分である。 $\mathbf{G}_{\text{tot}} = \mathbf{G}_{\text{in}} + \mathbf{G}_{\text{out}}$ 、 $i_{\text{tot}} = i_{\text{in}} + i_{\text{out}}$ によって \mathbf{G}_{tot} と i_{tot} を定義すると、 \mathbf{G}_{tot} は系の全角運動量、 i_{tot} は Inner binary と Outer binary の相互 Inclination を表す (図 3.2)。ここで、 z 軸が全角運動量 \mathbf{G}_{tot} に平行になるように座標をとった (e.g. Lidov and Ziglin 1974)。この座標系のことを Invariable 座標系とよぶ (Naoz et al. 2013a)。この系では、全角運動量 \mathbf{G}_{tot} は保存するので、図 3.2 と式 (3.5) より、

$$G_{\text{tot}} = H_{\text{in}} + H_{\text{out}} = \text{constant} \quad (3.6)$$

が成り立つ。

後の計算のために、 $i_{\text{tot}}, H_{\text{in}}, H_{\text{out}}, i_{\text{in}}, i_{\text{out}}$ を G_{tot} で表しておく、 $|\mathbf{G}_{\text{tot}}|^2 = |\mathbf{G}_{\text{in}} + \mathbf{G}_{\text{out}}|^2 = G_{\text{in}}^2 + G_{\text{out}}^2 + 2G_{\text{in}}G_{\text{out}} \cos i_{\text{tot}}$ と式 (3.5) より、

$$\cos i_{\text{tot}} = \frac{G_{\text{tot}}^2 - G_{\text{in}}^2 - G_{\text{out}}^2}{2G_{\text{in}}G_{\text{out}}} \quad (3.7)$$

$$H_{\text{in}} = \frac{G_{\text{tot}}^2 + G_{\text{in}}^2 - G_{\text{out}}^2}{2G_{\text{tot}}} \quad (3.8)$$

$$H_{\text{out}} = \frac{G_{\text{tot}}^2 + G_{\text{out}}^2 - G_{\text{in}}^2}{2G_{\text{tot}}} \quad (3.9)$$

$$\cos i_{\text{in}} = \frac{G_{\text{tot}}^2 + G_{\text{in}}^2 - G_{\text{out}}^2}{2G_{\text{tot}}G_{\text{in}}} \quad (3.10)$$

$$\cos i_{\text{out}} = \frac{G_{\text{tot}}^2 + G_{\text{out}}^2 - G_{\text{in}}^2}{2G_{\text{tot}}G_{\text{out}}} \quad (3.11)$$

となる。Hamilton の正準運動方程式 (式 (2.33)) より、

$$\begin{aligned} \frac{dL_n}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l_n}, & \frac{dl_n}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_n} \\ \frac{dG_n}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g_n}, & \frac{dg_n}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G_n} \\ \frac{dH_n}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_n}, & \frac{dh_n}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_n} \end{aligned} \quad (n = \text{in}, \text{out}) \quad (3.12)$$

が成り立つ (Naoz 2016)。ここで、 $\mathcal{H} > 0$ の時に束縛系であることに注意。

3.2 Kozai-Lidov 機構

Kozai-Lidov 機構とは、階層的 3 体系において、Inner binary と Outer binary が角運動量をやり取りすることによって、Inner binary の離心率と相互 Inclination が対応して振動的に変化する現象のことをいう。これは、2つの独立な研究 Kozai (1962) と Lidov (1962) によって初めて発見された。ここでは階層的 3 体系における力学を述べた後、Kozai-Lidov 機構とその拡張 Eccentric Kozai-Lidov 機構について述べる。

3.2.1 Quadrupole レベルの Secular 近似

階層的 3 体系の Hamiltonian (式 3.1) の相互作用項の最低次 ($\mathcal{O}(\alpha^2)$) までの近似を考える。相互作用項の最低次を Quadrupole 項とよび、この近似を Quadrupole レベルの Secular 近似とよぶ。式 3.1 より、相互作用項の最低次 ($\mathcal{O}(\alpha^2)$) までをとったときの Hamiltonian $\mathcal{H}_{\text{quad}}$ は、

$$\mathcal{H}_{\text{quad}} = \frac{\beta_{\text{in}}}{2L_{\text{in}}^2} + \frac{\beta_{\text{out}}}{2L_{\text{out}}^2} + 4\beta_{\text{mut}} \left(\frac{L_{\text{in}}^4}{L_{\text{out}}^6} \right) \left(\frac{r_{\text{in}}}{a_{\text{in}}} \right)^2 \left(\frac{a_{\text{out}}}{r_{\text{out}}} \right)^3 (3 \cos 2\Phi + 1) \quad (3.13)$$

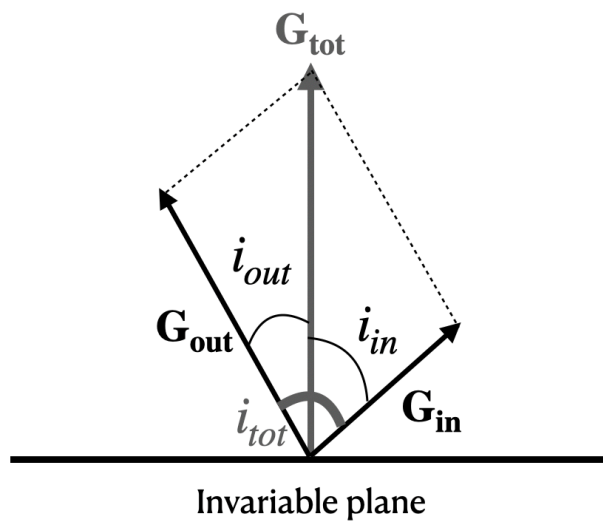


図 3.2: 系の角運動量と Inclination: \mathbf{G}_{in} , \mathbf{G}_{out} はそれぞれ Inner binary、Outer binary の角運動量ベクトルであり、 \mathbf{G}_{tot} は系の全角運動量である。また、 i_{in} , i_{out} はそれぞれ Inner binary、Outer binary の Inclination であり、 i_{tot} は Inner binary と Outer binary の相互 Inclination である。(Naoz et al. 2013a を参考に作成した)

である。ここで、見やすさのために、

$$\begin{aligned}\beta_{\text{in}} &= k^2 m_1 m_2 \frac{L_{\text{in}}^2}{a_{\text{in}}} \\ \beta_{\text{out}} &= k^2 (m_1 + m_2) m_3 \frac{L_{\text{out}}^2}{a_{\text{out}}} \\ \beta_{\text{mut}} &= \frac{k^4}{16} \frac{(m_1 + m_2)^7 m_3^7}{(m_1 m_2)^3 (m_1 + m_2 + m_3)^3}\end{aligned}\quad (3.14)$$

とおいた。式 (3.13) の Hamiltonian は $\cos 2\Phi$ の中に短周期の変数 (平均近点角 $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$) を含む。今、長期進化に着目したいので、これらの変数を正準変換によって Hamiltonian から消去することを考える (Secular 近似)。このとき、 $L_{\text{in}}, L_{\text{out}}$ は定数となり、したがって各軌道の長軸半径 $a_{\text{in}}, a_{\text{out}}$ が保存する。

準備: 相対角度 $\cos \Phi$ の Delaunay's elements による表記

前述の $\cos \Phi$ が短周期の変数 $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$ を含むことを確認しておこう。まず、各軌道について、軌道が xy 平面上にあり、 x 軸が原点と近点を通る座標を考える。この座標上での $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ をそれぞれ $\mathbf{r}_{\text{in,orb}}, \mathbf{r}_{\text{out,orb}}$ とする。これらを Invariable 座標系で表したものをそれぞれ $\mathbf{r}_{\text{in,inv}}, \mathbf{r}_{\text{out,inv}}$ とすると、

$$\mathbf{r}_{\text{in,inv}} = \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(h_{\text{in}}) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(i_{\text{in}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(g_{\text{in}}) \mathbf{r}_{\text{in,orb}} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{r}_{\text{out,inv}} = \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(h_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(i_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(g_{\text{out}}) \mathbf{r}_{\text{out,orb}} \quad (3.16)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ はそれぞれ z 軸まわり、 x 軸まわりの回転行列であり、

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\Theta_0^2) &= \begin{pmatrix} \cos \Theta_0^2 & -\sin \Theta_0^2 & 0 \\ \sin \Theta_0^2 & \cos \Theta_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(\Theta_0^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta_0^2 & -\sin \Theta_0^2 \\ 0 & \sin \Theta_0^2 & \cos \Theta_0^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.17)$$

である。したがって、 $\cos \Phi$ は、 $\hat{\mathbf{r}}_{\text{in,orb}} = \mathbf{r}_{\text{in,orb}}/r_{\text{in,orb}}$, $\hat{\mathbf{r}}_{\text{out,orb}} = \mathbf{r}_{\text{out,orb}}/r_{\text{out,orb}}$ を用いて、

$$\begin{aligned}\cos \Phi &= \hat{\mathbf{r}}_{\text{out,orb}}^T \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{-1}(g_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}(i_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{-1}(h_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(h_{\text{in}}) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(i_{\text{in}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(g_{\text{in}}) \hat{\mathbf{r}}_{\text{in,orb}} \\ &= \hat{\mathbf{r}}_{\text{out,orb}}^T \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{-1}(g_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}(i_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(h_{\text{in}} - h_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(i_{\text{in}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(g_{\text{in}}) \hat{\mathbf{r}}_{\text{in,orb}} \\ &= \hat{\mathbf{r}}_{\text{out,orb}}^T \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{-1}(g_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1}(i_{\text{out}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\Delta h) \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(i_{\text{in}}) \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(g_{\text{in}}) \hat{\mathbf{r}}_{\text{in,orb}}\end{aligned}\quad (3.18)$$

と表せる。ここで、 $\Delta h = h_{\text{in}} - h_{\text{out}}$ とおいた。今、Inner binary、Outer binary の真近点角をそれぞれ $f_{\text{in}}, f_{\text{out}}$ とすると、

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_{\text{in,orb}} &= \begin{pmatrix} \cos f_{\text{in}} \\ \sin f_{\text{in}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{r}}_{\text{out,orb}} &= \begin{pmatrix} \cos f_{\text{out}} \\ \sin f_{\text{out}} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.19)$$

が成り立つことと、面積速度より平均近点角と真近点角に

$$dl_i = \frac{1}{\sqrt{1-e_i^2}} \left(\frac{r_i}{a_i} \right)^2 df_i \quad (i = \text{in, out}) \quad (3.20)$$

という関係が成り立つことから、 $\cos \Phi$ が短周期の変数 (平均近点角 $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$) を含むことを確認できた。

Von Zeipel 変換による Secular 近似

次に、Quadrupole 項まで取り入れた場合の Hamiltonian $\mathcal{H}_{\text{quad}}$ から、正準変換によって $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$ を消去する (Secular 近似)。ここで用いる変換は Von Zeipel 変換 (Brouwer 1959) とよばれる。

この系の Hamiltonian $\mathcal{H}_{\text{quad}}$ を、

$$\mathcal{H}_{\text{quad}} = \mathcal{H}_{\text{in}}^K + \mathcal{H}_{\text{out}}^K + \mathcal{H}_2 \quad (3.21)$$

とおく。ここで、 $\mathcal{H}_{\text{in}}^K, \mathcal{H}_{\text{out}}^K$ はそれぞれ Inner binary と Outer binary の Kepler 項を、 \mathcal{H}_2 は相互作用項の最低次までとったものを表す。このとき、短周期の変数 (平均近点角 $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$) を含むのは \mathcal{H}_2 のみである。 \mathcal{H}_2 は $O(\alpha^2)$ より $\mathcal{H}_2 \ll \mathcal{H}_{\text{quad}}$ であるから、ここでの正準変換は恒等変換に近いはずである。よって、母関数 S を

$$S(L_j^*, G_j^*, H_j^*, l_j, g_j, h_j) = \sum_{j=\text{in, out}} [L_j^* l_j + G_j^* g_j + H_j^* h_j] + \alpha^2 S_2(L_j^*, G_j^*, H_j^*, l_j, g_j, h_j) \quad (3.22)$$

とする。ここで、変換後の運動量にアスタリスクをつけて区別した。 S_2 が恒等でない部分であり、これが短周期成分の消去を担う。このとき、元の正準変数と変換後の正準変数には、

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i^* + \alpha^2 \frac{\partial S_2}{\partial q_i} \quad (3.23)$$

$$q_i^* = \frac{\partial S}{\partial p_i^*} = q_i + \alpha^2 \frac{\partial S_2}{\partial p_i^*} \quad (3.24)$$

という関係がある。ここで、 $(q_i, p_i) \in \{(l_i, L_i), (g_i, G_i), (h_i, H_i)\}$ ($i = \text{in, out}$) である。また、母関数 S は時間に依存しないので、ある同一の点 $(q_i, p_i) \equiv (q_i^*, p_i^*)$ が定められ、

$$\mathcal{H}_{\text{quad}}(q_i, p_i) = \mathcal{H}^*(q_i^*, p_i^*) \quad (3.25)$$

が成り立つ。式 (3.23) と式 (3.24) を変換前の Hamiltonian に代入して、最低次 ($O(\alpha^2)$) まで展開すると、

$$\mathcal{H}(q_i^*, p_i^*) + \alpha^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{quad}}}{\partial p_i} \frac{\partial S_2}{\partial q_i} - \alpha^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{quad}}}{\partial q_i} \frac{\partial S_2}{\partial p_i^*} = \mathcal{H}^*(q_i^*, p_i^*) \quad (3.26)$$

となる。よって、 α についての係数比較により、

$$\mathcal{H}_{\text{in}}^K(q_i^*, p_i^*) = \mathcal{H}_{\text{in}}^{*K}(q_i^*, p_i^*) \quad (3.27)$$

$$\mathcal{H}_{\text{out}}^K(q_i^*, p_i^*) = \mathcal{H}_{\text{out}}^{*K}(q_i^*, p_i^*) \quad (3.28)$$

$$\mathcal{H}_2(q_i^*, p_i^*) + \alpha^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial S_2}{\partial q_i} - \alpha^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial S_2}{\partial p_i^*} = \mathcal{H}_2^*(q_i^*, p_i^*) \quad (3.29)$$

が成り立つことがわかる。ここで、式 (3.29) の左辺の第 2,3 項の和はすでに $\mathcal{O}(\alpha^2)$ であるから、和の中の変換前の Hamiltonian からは 2 つの Kepler 項のみの寄与を考えれば良い。したがって結局、

$$\mathcal{H}_2(q_i^*, p_i^*) + \alpha^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{in}}^K}{\partial L_{\text{in}}} \frac{\partial S_2}{\partial l_{\text{in}}} + \alpha^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{out}}^K}{\partial L_{\text{out}}} \frac{\partial S_2}{\partial l_{\text{out}}} = \mathcal{H}_2^*(q_i^*, p_i^*) \quad (3.30)$$

となる。

ここで、式 (3.18)~式 (3.20) より、 \mathcal{H}_2 は l_{in}^* , l_{out}^* の周期関数 (周期 2π) であるから、フーリエ級数展開できて、

$$\mathcal{H}_2(q_i^*, p_i^*) = \alpha^2 h_0 + \alpha^2 \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} h_{k_1 k_2} e^{-ik_1 l_{\text{in}}^* - ik_2 l_{\text{out}}^*} \quad (3.31)$$

とかける。ここで、

$$h_{k_1 k_2} = \frac{1}{4\pi^2 \alpha^2} \int_0^{2\pi} dl_{\text{in}}^* \int_0^{2\pi} dl_{\text{out}}^* \mathcal{H}_2(q_i^*, p_i^*) e^{ik_1 l_{\text{in}}^* + ik_2 l_{\text{out}}^*} \quad (3.32)$$

である。

見やすさのために、式 (3.30) 中で $\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{in}}^K}{\partial L_{\text{in}}} \equiv \omega_1(L_{\text{in}})$, $\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{out}}^K}{\partial L_{\text{out}}} \equiv \omega_2(L_{\text{out}})$ とおく。 S_2 が l_{in}^* , l_{out}^* の周期関数だとすると、フーリエ級数展開できて、

$$S_2 = s_0 + \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} s_{k_1 k_2} e^{-ik_1 l_{\text{in}} - ik_2 l_{\text{out}}} \quad (3.33)$$

とかける。これを式 (3.30) に代入すると、

$$\alpha^2 h_0 + \alpha^2 \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} h_{k_1 k_2} e^{-ik_1 l_{\text{in}}^* - ik_2 l_{\text{out}}^*} + \alpha^2 \omega_1 \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} -ik_1 s_{k_1 k_2} e^{-ik_1 l_{\text{in}} - ik_2 l_{\text{out}}} \quad (3.34)$$

$$+ \alpha^2 \omega_2 \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} -ik_2 s_{k_1 k_2} e^{-ik_1 l_{\text{in}} - ik_2 l_{\text{out}}} = \mathcal{H}_2^*(q_i^*, p_i^*) \quad (3.35)$$

となる。最低次では、 $l_{\text{in}}^* = l_{\text{in}}$, $l_{\text{out}}^* = l_{\text{out}}$ であるので、

$$s_{k_1 k_2} = -i \frac{h_{k_1 k_2}}{\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2} \quad (3.36)$$

のとき、 \mathcal{H}_2^* は短周期の変数 l_{in} , l_{out} に独立になる。よって、すべての k_1, k_2 について $\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \neq 0$ とすると、式 (3.36) をみたま S_2 が条件をみたす母関数を与え、このとき、

$$\mathcal{H}_2^*(q_i^*, p_i^*) = \alpha^2 h_0 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dl_{\text{in}}^* \int_0^{2\pi} dl_{\text{out}}^* \mathcal{H}_2(q_i^*, p_i^*) \quad (3.37)$$

となる。したがって、Quadrupole レベルの Secular 近似では、階層的 3 体系の Hamiltonian (式 (3.13)) は、平均近点角 $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$ で平均化され、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^* = & \frac{C_2}{8} \{ [1 + 3 \cos(2i_{\text{out}})] ([2 + 3e_{\text{in}}^2] [1 + 3 \cos(2i_{\text{in}})] + 30e_{\text{in}}^2 \cos(2g_{\text{in}}) \sin^2(i_{\text{in}})) \\ & + 3 \cos(2\Delta h) [10e_{\text{in}}^2 \cos(2g_{\text{in}}) \times (3 + \cos(2i_{\text{in}})) + 4(2 + 3e_{\text{in}}^2) \sin(i_{\text{in}})^2] \sin^2(i_{\text{out}}) \\ & + 12(2 + 3e_{\text{in}}^2 - 5e_{\text{in}}^2 \cos(2g_{\text{in}})) \cos(\Delta h) \sin(2i_{\text{in}}) \sin(2i_{\text{out}}) \\ & + 120e_{\text{in}}^2 \sin(i_{\text{in}}) \sin(2i_{\text{out}}) \sin(2g_{\text{in}}) \sin(\Delta h) \\ & - 120e_{\text{in}}^2 \cos(i_{\text{in}}) \sin^2(i_{\text{out}}) \sin(2g_{\text{in}}) \sin(2\Delta h) \} \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。ここで、

$$C_2 = \frac{k^4}{16} \frac{(m_1 + m_2)^7}{(m_1 + m_2 + m_3)^3} \frac{m_3^7}{(m_1 m_2)^3} \frac{L_{\text{in}}^4}{L_{\text{out}}^3 G_{\text{out}}^3} \quad (3.39)$$

とおいた。

なお、ここでみた 2 つの平均近点角 $l_{\text{in}}, l_{\text{out}}$ で平均化する手法、すなわち Hamiltonian を Inner binary と Outer binary の周期の両方で平均化する手法を Double average とよび、Inner binary の周期 (平均近点角 l_{in}) のみで平均化する手法を Single average とよぶ。Single average では Outer binary の周期で平均化されていないので、Inner binary に対する 3 体目の位置の変化による効果が考慮される。近年の研究では、長軸半径比 $\alpha = a_{\text{in}}/a_{\text{out}}$ が十分小さくない場合には、Single average をとることによって Double average の場合とは違った力学的挙動が見られることが示されている (e.g. Luo et al. 2016, Grishin et al. 2018, Mangipudi et al. 2022, Tremaine 2023)。Single average については 5.3 節で詳しく述べる。

3.2.2 Elimination of nodes に関する問題点

3.2.1 節で階層的 3 体系の Quadrupole レベルの Hamiltonian を求めた。この Hamiltonian から、軌道パラメータ変化を求める前に、Elimination of nodes に関する問題点について述べる。

階層的 3 体系において、Inner binary と Outer binary の Longitudes of ascending nodes の間には $\Delta h = h_{\text{in}} - h_{\text{out}} = \pi$ という関係が成り立つ。この関係を階層的 3 体系の力学に導入することを Elimination of nodes とよぶ (e.g. Jefferys and Moser 1966)。

Naoz et al. (2013a) 以前の多くの研究では、式 (3.38) の Hamiltonian から正準方程式にしたがって軌道パラメータの進化を求める前に、式 (3.38) の Hamiltonian に直接 $\Delta h = \pi$ を代入していた。これによって得られる Hamiltonian

$$\mathcal{H}_2^*(\Delta h = \pi) = C_2 \{ (2 + 3e_{\text{in}}^2) (3 \cos^2 i_{\text{tot}} - 1) + 15e_{\text{in}}^2 \sin^2 i_{\text{tot}} \cos(2g_{\text{in}}) \} \quad (3.40)$$

は $h_{\text{in}}, h_{\text{out}}$ を含まない。すなわち、正準方程式より、

$$\frac{dH_{\text{in}}}{dt} = 0, \quad \frac{dH_{\text{out}}}{dt} = 0 \quad (3.41)$$

が得られ、これは、Inner binary と Outer binary の角運動量の z 成分が保存されていることを意味する。しかし、これは 2 体目の質量が十分小さい場合にしか成り立たず、一般にこれは誤りで

あることが示された (Naoz et al. 2013a)。2 体目の質量が十分小さい場合 ($m_2 \rightarrow 0$, $G_{\text{in}} \ll G_{\text{tot}}$) では、 $\dot{H}_{\text{in}} = -\dot{H}_{\text{out}} \approx 0$ となり、Inner binary と Outer binary の角運動量の z 成分は確かに保存される。この極限は Test particle quadrupole (TPQ) limit とよばれる。

TPQ の極限を外した場合、Inner binary と Outer binary の角運動量の z 成分は保存されない (Naoz et al. 2013a)。すなわち、式 (3.38) の Hamiltonian に直接 $\Delta h = \pi$ を代入する手法は誤りであり、正しい軌道パラメータ進化を得るためには、式 (3.38) の Hamiltonian から正準方程式にしたがって軌道パラメータの時間微分を求め、その結果に $\Delta h = \pi$ を代入しなければならない。このように求められた軌道パラメータの進化の様子と、式 (3.38) の Hamiltonian に直接 $\Delta h = \pi$ を代入して求められた軌道パラメータの進化の様子は、大きく異なってしまうことがある。図 3.3 にその例を示す (Naoz et al. 2013a)。図 3.3 より、式 (3.38) の Hamiltonian に直接 $\Delta h = \pi$ を代入して求められた軌道パラメータの進化の様子 (青線) と式 (3.38) の Hamiltonian から正準方程式にしたがって軌道パラメータの時間微分を求めた後に $\Delta h = \pi$ を代入して得られた軌道パラメータの進化の様子 (赤線、3.2.3 節を参照) では、Inner binary の離心率 e_{in} (図 3.3 中では e_1) の振幅や、相互 Inclination i_{tot} が取りうる値の大きく違っていることがわかる。

なお、この問題を式 (3.38) の Hamiltonian に直接 $\Delta h = \pi$ を代入した後に別の変換を導入することによって解決している例もある (e.g. Lidov and Ziglin 1976, Malige et al. 2002)。また、Elimination of nodes ($\Delta h = \pi$ の代入) を用いない別の手法によってこの問題を回避している例もある (e.g. Farago and Laskar 2010, Laskar and Boué 2010, Mardling 2010, Katz and Dong 2011)。また、Inner binary と Outer binary の角運動量の z 成分が保存しないという前提のもと、式 (3.40) の Hamiltonian を用いることもある。

3.2.3 軌道パラメータの時間変化

3.2.2 節で述べた問題点を解決した Naoz et al. (2013a) の手法によって得られた階層的 3 体系の Quadrupole レベルの Secular 近似における軌道パラメータの時間変化について述べる。3.2.2 節で述べたように、正準方程式に従って式 (3.38) で得られた Hamiltonian を微分し、その結果得られた Quadrupole レベルの Secular 近似における軌道パラメータの時間変化に、Elimination of nodes $\Delta h = h_{\text{in}} - h_{\text{out}} = \pi$ を代入している (Naoz et al. 2013a)。ここでは煩雑さを避けるために、正準方程式から得られた軌道パラメータの時間変化に Elimination of nodes $\Delta h = \pi$ を代入した結果のみを示している。

まず、式 (3.8) と $\dot{G}_{\text{out}} = 0$ (式 (3.38) は g_{out} に依存しないため) より、

$$\begin{aligned}\dot{H}_{\text{in}} &= \frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{tot}}} \dot{G}_{\text{in}} - \frac{G_{\text{out}}}{G_{\text{tot}}} \dot{G}_{\text{out}} \\ &= \frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{tot}}} \dot{G}_{\text{in}}\end{aligned}\quad (3.42)$$

が成り立つ。なお、 $\dot{H}_{\text{in}} = -\dot{H}_{\text{out}}$ である。また、式 (3.12) より、

$$\dot{H}_{\text{in}} = \frac{\partial \mathcal{H}_2^*}{\partial h_{\text{in}}} = -30C_2 e_{\text{in}}^2 \sin i_{\text{out}} \sin i_{\text{tot}} \sin (2g_{\text{in}}) \quad (3.43)$$

$$\dot{G}_{\text{in}} = \frac{\partial \mathcal{H}_2^*}{\partial g_{\text{in}}} = -30C_2 e_{\text{in}}^2 \sin^2 i_{\text{tot}} \sin (2g_{\text{in}}) \quad (3.44)$$

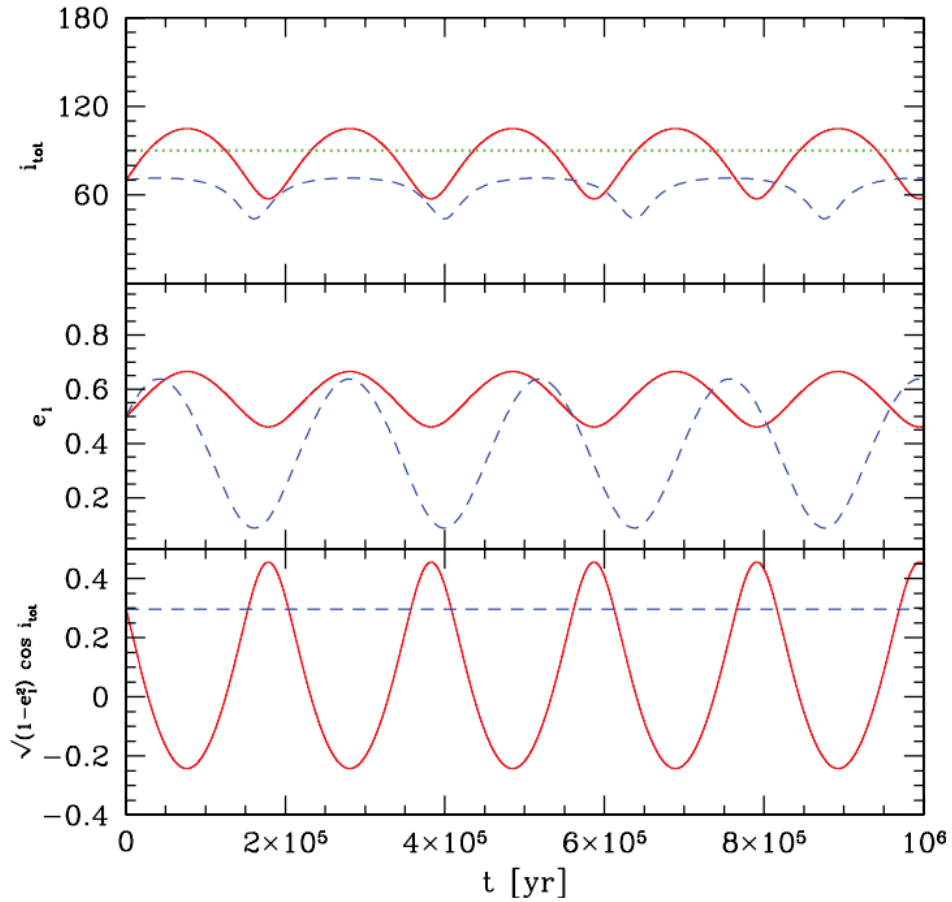


図 3.3: Elimination of nodes の従来の手法と Naoz et al. 2013a の手法による軌道パラメータ時間進化の比較 (Naoz et al. 2013a の Figure 4 を引用): 青線は式 (3.38) の Hamiltonian に直接 $\Delta h = \pi$ を代入して求められた軌道パラメータの進化の様子を、赤線は式 (3.38) の Hamiltonian から正準方程式にしたがって軌道パラメータの時間微分を求めた後に $\Delta h = \pi$ を代入して得られた軌道パラメータの進化の様子である。青線の場合と赤線の場合で Inner binary の離心率 e_{in} (図中では e_1) の振幅が大きく違い、さらに相互 Inclination が取りうる値の大きく違っていることがわかる。また、青線は 3.2.4 節で説明する Kozai 定数 (式 (3.57)) が定数であるのに対し、赤線の場合はもはや定数ではなくなっていることがわかる。ここで、 $m_1 = 1.4M_\odot$, $m_2 = 0.3M_\odot$, $m_3 = 0.01M_\odot$, $a_{\text{in}} = 5 \text{ AU}$, $a_{\text{out}} = 50 \text{ AU}$ とし、その他の軌道パラメータの初期値は $e_{\text{in}} = 0.5$, $e_{\text{out}} = 0$, $i_{\text{tot}} = 70^\circ$, $g_{\text{in}} = 120^\circ$, $g_{\text{out}} = 0^\circ$ とした。

であるから、 $G_{\text{tot}}/\sin i_{\text{tot}} = G_{\text{in}}/\sin i_{\text{out}} = G_{\text{out}}/\sin i_{\text{in}}$ より、

$$\dot{H}_{\text{in}} = -\frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{tot}}} 30C_2 e_{\text{in}}^2 \sin^2 i_{\text{tot}} \sin(2g_{\text{in}}) \quad (3.45)$$

となり、これは式 (3.42) をみたくことが確認できた。

式 (3.12) より、Arguments of periaapse g_{in} , g_{out} の時間変化は、

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\text{in}} = & 6C_2 \left\{ \frac{1}{G_{\text{in}}} [4 \cos^2 i_{\text{tot}} + (5 \cos(2g_{\text{in}}) - 1)] \right. \\ & \left. \times (1 - e_{\text{in}}^2 - \cos^2 i_{\text{tot}})] + \frac{\cos i_{\text{tot}}}{G_{\text{out}}} [2 + e_{\text{in}}^2 (3 - 5 \cos(2g_{\text{in}}))] \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\text{out}} = & 3C_2 \left\{ \frac{2 \cos i_{\text{tot}}}{G_{\text{in}}} [2 + e_{\text{in}}^2 (3 - 5 \cos(2g_{\text{in}}))] \right. \\ & \left. + \frac{1}{G_{\text{out}}} [4 + 6e_{\text{in}}^2 + (5 \cos^2 i_{\text{tot}} - 3) (2 + e_{\text{in}}^2 [3 - 5 \cos(2g_{\text{in}})])] \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

と求められ、また、Longitudes of ascending nodes h_{in} , h_{out} の時間変化は、

$$\dot{h}_{\text{in}} = -\frac{3C_2}{G_{\text{in}} \sin i_{\text{in}}} \{2 + 3e_{\text{in}}^2 - 5e_{\text{in}}^2 \cos(2g_{\text{in}})\} \sin(2i_{\text{tot}}) \quad (3.48)$$

$$\dot{h}_{\text{out}} = -\frac{3C_2}{G_{\text{out}} \sin i_{\text{out}}} \{2 + 3e_{\text{in}}^2 - 5e_{\text{in}}^2 \cos(2g_{\text{in}})\} \sin(2i_{\text{tot}}) \quad (3.49)$$

と求められる。ここで、 $G_{\text{in}} \sin i_{\text{in}} = G_{\text{out}} \sin i_{\text{out}}$ より、 $\dot{h}_{\text{in}} = \dot{h}_{\text{out}}$ とわかる。これは Elimination of nodes $h_{\text{in}} - h_{\text{out}} = \pi$ より要求される $\dot{h}_{\text{in}} - \dot{h}_{\text{out}} = 0$ をみたく。

ここで、Inner binary と Outer binary の離心率 e_{in} , e_{out} と Inclination i_{in} , i_{out} の時間変化を求める。これらは階層的 3 体系の時間発展について理解する上で非常に重要である。

式 (3.12) より、

$$\frac{de_j}{dt} = \frac{\partial e_j}{\partial G_j} \frac{\partial \mathcal{H}_2^*}{\partial g_j} \quad (j = \text{in}, \text{out}) \quad (3.50)$$

となるから、Inner binary の離心率の時間変化は、

$$\dot{e}_{\text{in}} = C_2 \frac{1 - e_{\text{in}}^2}{G_{\text{in}}} 30e_{\text{in}} \sin^2 i_{\text{tot}} \sin(2g_{\text{in}}) \quad (3.51)$$

と求められる。ここで、 $\frac{\partial \mathcal{H}_{\text{quad}}}{\partial g_{\text{out}}} = 0$ より、Quadrupole レベルでは、 $\dot{e}_{\text{out}} = \dot{G}_{\text{out}} = 0$ である。また、式 (3.10) と式 (3.11) より、

$$\frac{d(\cos i_{\text{in}})}{dt} = \frac{\dot{H}_{\text{in}}}{G_{\text{in}}} - \frac{\dot{G}_{\text{in}}}{G_{\text{in}}} \cos i_{\text{in}} \quad (3.52)$$

$$\frac{d(\cos i_{\text{out}})}{dt} = \frac{\dot{H}_{\text{out}}}{G_{\text{out}}} = -\frac{\dot{H}_{\text{in}}}{G_{\text{out}}} \quad (3.53)$$

が成り立つ。ここで、Quadrupole レベルでは $\dot{G}_{\text{out}} = 0$ であることを用いた。ここで得られた Inner binary の離心率 e_{in} (図 3.3 中では e_1) の変化や相互 Inclination i_{tot} の変化 (赤線) を、Naoz et al. (2013a) 以前の式 (3.38) の Hamiltonian に直接 Elimination of nodes $\Delta h = \pi$ を代入する手法により得られた時間変化 (青線) と比較したものが図 3.3 である。赤線と青線では、Inner binary の離心率や相互 Inclination が取りうる値が大きく異なっており、さらに、青線の場合は 3.2.4 節で説明する Kozai 定数 (式 (3.57)) が定数であるのに対し、赤線の場合はもはや定数ではなくなっていることがわかる。

3.2.4 Kozai-Lidov 機構

Quadrupole レベルの Secular 近似において導かれる Kozai-Lidov (KL) 機構をみる。前述の通り、KL 機構とは、階層的 3 体系において Inner binary の離心率 e_{in} と相互 Inclination i_{tot} が対応して振動的に変化する現象のことをいう。

式 (3.51) より、 $g_{\text{in}} = \pi n/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) のとき、 $\dot{e}_{\text{in}} = 0$ となることがわかる。このとき、 e_{in} は極値 ($e_{\text{in,max}}, e_{\text{in,min}}$) をとる。ここで、 $\dot{e}_{\text{in}} = 0$ のときはすなわち $\dot{G}_{\text{in}} = 0$ のときである。このとき、式 (3.42) より、 $\dot{H}_{\text{in}} = 0$ であり、したがって式 (3.52) より $di_{\text{in}}/dt = 0$ である。よって、 e_{in} が極値をとるとき、同時に i_{in} も極値をとる。なお、このとき同時に i_{out} も極値をとる。

角運動量保存則 ($\mathbf{G}_{\text{in}} + \mathbf{G}_{\text{out}} = \mathbf{G}_{\text{tot}}$) より、式 (3.4) を用いると、

$$L_{\text{in}}^2 (1 - e_{\text{in}}^2) + 2L_{\text{in}}L_{\text{out}}\sqrt{1 - e_{\text{in}}^2}\sqrt{1 - e_{\text{out}}^2}\cos i_{\text{tot}} = G_{\text{tot}}^2 - G_{\text{out}}^2 \quad (3.54)$$

が成り立つ。右辺は初期値で決まる定数なので、初期値 $e_{\text{in},0}$, $e_{\text{out},0}(= e_{\text{out}})$, $g_{\text{in},0}$, $i_{\text{tot},0}$ を定めれば、

$$\begin{aligned} L_{\text{in}}^2 (1 - e_{\text{in}}^2) + 2L_{\text{in}}L_{\text{out}}\sqrt{1 - e_{\text{in}}^2}\sqrt{1 - e_{\text{out},0}^2}\cos i_{\text{tot}} \\ = L_{\text{in}}^2 (1 - e_{\text{in},0}^2) + 2L_{\text{in}}L_{\text{out}}\sqrt{1 - e_{\text{in},0}^2}\sqrt{1 - e_{\text{out},0}^2}\cos i_{\text{tot},0} \end{aligned} \quad (3.55)$$

とでき、これによって相互 Inclination i_{tot} と Inner binary の離心率 e_{in} の関係を求めることができる。今、例えば $e_{\text{in},0} = e_{\text{out},0} = 0$ とすると、

$$\sqrt{1 - e_{\text{in}}^2}\cos i_{\text{tot}} = \cos i_{\text{tot},0} + \frac{L_{\text{in}}}{2L_{\text{out}}}e_{\text{in}}^2 \quad (3.56)$$

となる。なお、 $L_{\text{in}} \ll L_{\text{out}}$ の極限 (TPQ limit) を考えると、この式は

$$\sqrt{1 - e_{\text{in}}^2}\cos i_{\text{tot}} = \cos i_{\text{tot},0} \quad (3.57)$$

となる。これは Kozai 定数とよばれる。

式 (3.51) より、 $g_{\text{in}} = 0$ のとき e_{in} は最小値 $e_{\text{in,min}}$ を、 $g_{\text{in}} = \pi/2$ のとき e_{in} は最大値 $e_{\text{in,max}}$ をとることがわかる。今、エネルギー保存則より、系のエネルギーを E (すなわち $E = \mathcal{H}_2^*$) とすると、

$$\frac{E}{2C_2} = 3\cos^2 i_{\text{tot}} (1 - e_{\text{in,min}}^2) - 1 + 6e_{\text{in,min}}^2 \quad (g_{\text{in}} = 0) \quad (3.58)$$

$$\frac{E}{2C_2} = 3 \cos^2 i_{\text{tot}} (1 + 4e_{\text{in,max}}^2) - 1 - 9e_{\text{in,max}}^2 \quad (g_{\text{in}} = \frac{\pi}{2}) \quad (3.59)$$

となる。ここで、Elimination of nodes $\Delta h = \pi$ を用いた。今、初期値を $e_{\text{in},0} = e_{\text{out},0} = g_{\text{in},0} = 0$, $i_{\text{tot},0}$ とすると、式 (3.58) と式 (3.59) より、

$$(1 + 4e_{\text{in,max}}^2) \cos^2 i_{\text{tot}} = \cos^2 i_{\text{tot},0} + 3e_{\text{in,max}}^2 \quad (3.60)$$

が成り立つ。ここで、 $e_{\text{in}} = e_{\text{in,max}}$ のときの相互 Inclination を i_{tot} とした。式 (3.60) に式 (3.56) を代入して $\cos i_{\text{tot}}$ を消去し整理すると、

$$\left(\frac{L_{\text{in}}}{L_{\text{out}}}\right)^2 e_{\text{in,max}}^4 + \left(3 + 4\frac{L_{\text{in}}}{L_{\text{out}}} \cos i_{\text{tot},0} + \left(\frac{L_{\text{in}}}{2L_{\text{out}}}\right)^2\right) e_{\text{in,max}}^2 + \frac{L_{\text{in}}}{L_{\text{out}}} \cos i_{\text{tot},0} - 3 + 5 \cos^2 i_{\text{tot},0} = 0 \quad (3.61)$$

が得られる。 $L_{\text{in}} \ll L_{\text{out}}$ の極限 (TPQ limit) を考えると、この式は

$$e_{\text{in,max}}^2 = 1 - \frac{5}{3} \cos^2 i_{\text{tot},0} \quad (3.62)$$

となる。これが解をもつための条件は、 $39.2^\circ \leq i_{\text{tot},0} \leq 140.8^\circ$ である。これを Kozai limit とよぶ。

3.2.5 Octupole レベルの Secular 近似

3.2.1 節では相互作用項の最低次の項 (Quadrupole 項) のみを取った場合を考えたが、本節では、その次の項 ($\mathcal{O}(\alpha^3)$) までとった場合で考える。相互作用項の最低次の次の項を Octupole 項とよび、この近似を Octupole レベルの Secular 近似とよぶ。Test particle 近似 ($m_2 \rightarrow 0$) の適用範囲外の場合や Outer binary が円ではない場合 ($e_{\text{out}} \neq 0$) には、Quadrupole 項のみでは不十分であることが示されており (Naoz et al. 2011, Naoz et al. 2013a)、Octupole 項まで含めた場合の力学について調べることは非常に重要である。

Octupole レベルの Secular 近似では、Hamiltonian に直接 Elimination of nodes を代入する手法によって e_{in} , e_{out} , g_{in} , g_{out} については正しい時間進化が得られている (e.g. Harrington 1968, Harrington 1969, Sidlichovsky 1983, Krymowski and Mazeh 1999, Ford et al. 2000, Blaes et al. 2002, Lee and Peale 2003, Thompson 2011)。これは、Hamiltonian を微分する際に、 h_{in} や h_{out} が関与してこないためである。 H_{in} や H_{out} の時間進化を得るためには、3.2.1 節と同様に、Hamiltonian を微分した後に Elimination of nodes を代入する必要がある。ただし、計算が非常に煩雑になるため、全角運動量保存則より求めることが多い。

3.2.1 節と同様に相互作用項の最低次の次の項 ($\mathcal{O}(\alpha^3)$) までの Hamiltonian \mathcal{H}_3^* を求めると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3^*(\Delta h = \pi) = & C_2 \left\{ (2 + 3e_{\text{in}}^2) (3 \cos^2 i_{\text{tot}} - 1) + 15e_{\text{in}}^2 \sin^2 i_{\text{tot}} \cos(2g_{\text{in}}) \right\} \\ & + C_3 e_{\text{in}} e_{\text{out}} \left\{ A \cos \phi + 10 \cos i_{\text{tot}} \sin^2 i_{\text{tot}} (1 - e_{\text{in}}^2) \sin g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

となる。ここで、Elimination of nodes ($\Delta h = \pi$) を代入した。また、

$$C_3 = -\frac{15}{16} \frac{k^4}{4} \frac{(m_1 + m_2)^9}{(m_1 + m_2 + m_3)^4} \frac{m_3^9 (m_1 - m_2)}{(m_1 m_2)^5} \frac{L_{\text{in}}^6}{L_{\text{out}}^3 G_{\text{out}}^5} \quad (3.64)$$

$$A = 4 + 3e_{\text{in}}^2 - \frac{5}{2}B \sin^2 i_{\text{tot}} \quad (3.65)$$

$$B = 2 + 5e_{\text{in}}^2 - 7e_{\text{in}}^2 \cos(2g_{\text{in}}) \quad (3.66)$$

$$\cos \phi = -\cos g_{\text{in}} \cos g_{\text{out}} - \cos i_{\text{tot}} \sin g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} \quad (3.67)$$

とおいた (Blaes et al. 2002, Ford et al. 2004)。ここで、 $m_1 = m_2$ の場合、 $e_{\text{out}} = 0$ の場合には $C_3 = 0$ となり、Quadrupole レベルに帰着する。

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{C_3}{C_2} &= -\frac{15}{4} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \left(\frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \right) \frac{1}{1 - e_{\text{out}}^2} \\ &= -\frac{15}{4} \frac{\epsilon_{\text{oct}}}{e_{\text{out}}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

によって定義される ϵ_{oct}

$$\epsilon_{\text{oct}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \frac{e_{\text{out}}}{1 - e_{\text{out}}^2} \quad (3.69)$$

を考えると、これが Quadrupole 項に対する Octupole の強さを表す。これより、 $m_1 = m_2$ の場合、もしくは $e_{\text{out}} = 0$ の場合は $\epsilon_{\text{oct}} = 0$ となり、Octupole 項が消えることがわかる。Octupole 項が重要となるのは、 $m_1 \neq m_2$ かつ $e_{\text{out}} \neq 0$ かつ、 α が十分大きいときである。

Octupole レベルの Secular 近似におけるパラメータの時間変化

式 (3.63) の Hamiltonian より、3.2.1 節と同様に計算すると、Arguments of periaapse g_{in} , g_{out} の時間変化は、

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\text{in}} &= 6C_2 \left\{ \frac{1}{G_{\text{in}}} [4 \cos^2 i_{\text{tot}} + (5 \cos(2g_{\text{in}}) - 1)] \right. \\ &\quad \times (1 - e_{\text{in}}^2 - \cos^2 i_{\text{tot}}) + \frac{\cos i_{\text{tot}}}{G_{\text{out}}} [2 + e_{\text{in}}^2 (3 - 5 \cos(2g_{\text{in}}))] \left. \right\} \\ &\quad - C_3 e_{\text{out}} \left\{ e_{\text{in}} \left(\frac{1}{G_{\text{out}}} + \frac{\cos i_{\text{tot}}}{G_{\text{in}}} \right) \right. \\ &\quad \times [\sin g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} (10 (3 \cos^2 i_{\text{tot}} - 1) (1 - e_{\text{in}}^2) + A) \\ &\quad - 5B \cos i_{\text{tot}} \cos \phi] - \frac{1 - e_{\text{in}}^2}{e_{\text{in}} G_{\text{in}}} \times [\sin g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} \\ &\quad \times 10 \cos i_{\text{tot}} \sin i_{\text{tot}}^2 (1 - 3e_{\text{in}}^2) \\ &\quad \left. \left. + \cos \phi (3A - 10 \cos^2 i_{\text{tot}} + 2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{g}_{\text{out}} = & 3C_2 \left\{ \frac{2 \cos i_{\text{tot}}}{G_{\text{in}}} [2 + e_{\text{in}}^2 (3 - 5 \cos (2g_{\text{in}}))] \right. \\
 & + \frac{1}{G_{\text{out}}} [4 + 6e_{\text{in}}^2 + (5 \cos^2 i_{\text{tot}} - 3) (2 + e_{\text{in}}^2 [3 - 5 \cos (2g_{\text{in}})])] \Big\} \\
 & + C_3 e_{\text{in}} \left\{ \sin g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} \left(\frac{4e_{\text{out}}^2 + 1}{e_{\text{out}} G_{\text{out}}} 10 \cos i_{\text{tot}} \sin^2 i_{\text{tot}} (1 - e_{\text{in}}^2) \right. \right. \\
 & - e_{\text{out}} \left(\frac{1}{G_{\text{in}}} + \frac{\cos i_{\text{tot}}}{G_{\text{out}}} \right) [A + 10 (3 \cos^2 i_{\text{tot}} - 1) (1 - e_{\text{in}}^2)] \Big\} \\
 & \left. + \cos \phi \left[5B \cos i_{\text{tot}} e_{\text{out}} \left(\frac{1}{G_{\text{in}}} + \frac{\cos i_{\text{tot}}}{G_{\text{out}}} \right) + \frac{4e_{\text{out}}^2 + 1}{e_{\text{out}} G_{\text{out}}} A \right] \right\} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

と求められ、また、Longitudes of ascending nodes h_{in} , h_{out} の時間変化は、

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_{\text{in}} = & -\frac{3C_2}{G_{\text{in}} \sin i_{\text{in}}} (2 + 3e_{\text{in}}^2 - 5e_{\text{in}}^2 \cos (2g_{\text{in}})) \sin (2i_{\text{tot}}) \\
 & - C_3 e_{\text{in}} e_{\text{out}} [5B \cos i_{\text{tot}} \cos \phi \\
 & - A \sin g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} + 10 (1 - 3 \cos^2 i_{\text{tot}}) \\
 & \times (1 - e_{\text{in}}^2) \sin g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}}] \frac{\sin i_{\text{tot}}}{G_{\text{in}} \sin i_{\text{in}}} \\
 = & \dot{h}_{\text{out}} \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

と求められる。ここで、 $\sin i_{\text{in}} = G_{\text{out}} \sin i_{\text{tot}} / G_{\text{tot}}$ を用いた。また、3.2.1 節と同様に離心率 e_{in} , e_{out} の時間変化を求めると、

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{\text{in}} = & C_2 \frac{1 - e_{\text{in}}^2}{G_{\text{in}}} [30e_{\text{in}} \sin^2 i_{\text{tot}} \sin (2g_{\text{in}})] \\
 & + C_3 e_{\text{out}} \frac{1 - e_{\text{in}}^2}{G_{\text{in}}} [35 \cos \phi \sin^2 i_{\text{tot}} e_{\text{in}}^2 \sin (2g_{\text{in}}) \\
 & - 10 \cos i_{\text{tot}} \sin^2 i_{\text{tot}} \cos g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} (1 - e_{\text{in}}^2) \\
 & - A (\sin g_{\text{in}} \cos g_{\text{out}} - \cos i_{\text{tot}} \cos g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}})] \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{\text{out}} = & -C_3 e_{\text{in}} \frac{1 - e_{\text{out}}^2}{G_{\text{out}}} [10 \cos i_{\text{tot}} \sin^2 i_{\text{tot}} (1 - e_{\text{in}}^2) \sin g_{\text{in}} \cos g_{\text{out}} \\
 & + A (\cos g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} - \cos i_{\text{tot}} \sin g_{\text{in}} \cos g_{\text{out}})] \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

となる。また、 H_{in} , H_{out} の時間変化を求めるために、各軌道の角運動量 G_{in} , G_{out} の時間変化を求めると、式 (3.12) より、

$$\begin{aligned}
 \dot{G}_{\text{in}} = & -C_2 30e_{\text{in}}^2 \sin (2g_{\text{in}}) \sin^2 i_{\text{tot}} + C_3 e_{\text{in}} e_{\text{out}} \\
 & (-35e_{\text{in}}^2 \sin^2 i_{\text{tot}} \sin (2g_{\text{in}}) \cos \phi + A [\sin g_{\text{in}} \cos g_{\text{out}} \\
 & - \cos i_{\text{tot}} \cos g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}}] + 10 \cos i_{\text{tot}} \sin^2 i_{\text{tot}} [1 - e_{\text{in}}^2] \cos g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}}) \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{G}_{\text{out}} = & C_3 e_{\text{in}} e_{\text{out}} [A \{ \cos g_{\text{in}} \sin g_{\text{out}} - \cos i_{\text{tot}} \sin g_{\text{in}} \cos g_{\text{out}} \} \\
 & + 10 \cos i_{\text{tot}} \sin^2 i_{\text{tot}} [1 - e_{\text{in}}^2] \sin g_{\text{in}} \cos g_{\text{out}}] \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

となる。これらと、全角運動量保存則より導かれる

$$\begin{aligned}\dot{H}_{\text{in}} &= \frac{G_{\text{in}}}{G_{\text{tot}}}\dot{G}_{\text{in}} - \frac{G_{\text{out}}}{G_{\text{tot}}}\dot{G}_{\text{out}} \\ &= \frac{\sin i_{\text{out}}}{\sin i_{\text{tot}}}\dot{G}_{\text{in}} - \frac{\sin i_{\text{in}}}{\sin i_{\text{tot}}}\dot{G}_{\text{out}}\end{aligned}\quad (3.77)$$

により、 $\dot{H}_{\text{in}} (= -\dot{H}_{\text{out}})$ を求めることができた。また、Inclination i_{in} , i_{out} の時間変化は、

$$\frac{d(\cos i_{\text{in}})}{dt} = \frac{\dot{H}_{\text{in}}}{G_{\text{in}}} - \frac{\dot{G}_{\text{in}}}{G_{\text{in}}}\cos i_{\text{in}}\quad (3.78)$$

$$\frac{d(\cos i_{\text{out}})}{dt} = \frac{\dot{H}_{\text{out}}}{G_{\text{out}}} - \frac{\dot{G}_{\text{out}}}{G_{\text{out}}}\cos i_{\text{out}}\quad (3.79)$$

より求めることができる (Naoz et al. 2013a)。

3.2.6 Eccentric Kozai-Lidov 機構

Octupole レベルの Secular 近似において導かれる KL 機構を Eccentric Kozai-Lidov (EKL) 機構とよぶ (Naoz 2016)。ここでは、最もわかりやすい例、Test particle 近似 ($m_2 \rightarrow 0$) を考える。Octupole 項まで考えた場合の Test particle 近似を、Test particle octupole (TPO) 近似とよぶ。TPO 近似における EKL 機構と TPQ 近似における KL 機構には力学的に大きな違いが見られる。

3.2.2 節と 3.2.4 節より、TPQ 近似において各軌道の角運動量の z 成分は変化しない ($\dot{H}_{\text{in}} = \dot{H}_{\text{out}} \approx 0$)。これは、1 体目から見たとき、3 体目の公転方向に対する 2 体目の公転方向が初期状態と変わらないことを示している。1 体目から見て 3 体目と 2 体目の公転方向が同じ場合を Prograde、反対の場合を Retrograde とよぶ。また、Prograde 状態と Retrograde 状態を遷移する現象 (すなわち、相互 Inclination が 90° をまたいで変化する現象) を Flip とよぶ。前述の $\dot{H}_{\text{in}} = \dot{H}_{\text{out}} \approx 0$ より、TPQ 近似における KL 機構では、Flip は起こらないことがわかる。

一方、TPO 近似における EKL 機構では、Flip が起こる (Naoz et al. 2011, Katz et al. 2011, Naoz et al. 2013a)。TPO limit ($m_2 \rightarrow 0$) における階層的 3 体系の Hamiltonian \mathcal{H}^{TP} は、

$$\mathcal{H}^{\text{TP}} = \frac{3}{8}k^2 \frac{m_1 m_3}{a_{\text{out}}} \left(\frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \right)^2 \frac{1}{(1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2}} (F_{\text{quad}} + \epsilon F_{\text{oct}})\quad (3.80)$$

とかける (e.g. Lithwick and Naoz 2011)。ここで、

$$\epsilon = \epsilon_{\text{oct}}(m_2 \rightarrow 0) = \frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \frac{e_{\text{out}}}{1 - e_{\text{out}}^2}\quad (3.81)$$

$$F_{\text{quad}} = -\frac{e_{\text{in}}^2}{2} + \cos^2 i_{\text{tot}} + \frac{3}{2}e_{\text{in}}^2 \cos^2 i_{\text{tot}} + \frac{5}{2}e_{\text{in}}^2 (1 - \cos^2 i_{\text{tot}}) \cos(2g_{\text{in}})\quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}
F_{\text{oct}} = & \frac{5}{16} \left(e_{\text{in}} + \frac{3e_{\text{in}}^3}{4} \right) \left[(1 - 11 \cos i_{\text{tot}} - 5 \cos^2 i_{\text{tot}} + 15 \cos^3 i_{\text{tot}}) \cos (g_{\text{in}} - h_{\text{in}}) \right. \\
& \left. + (1 + 11 \cos i_{\text{tot}} - 5 \cos^2 i_{\text{tot}} - 15 \cos^3 i_{\text{tot}}) \cos (g_{\text{in}} + h_{\text{in}}) \right] \\
& - \frac{175}{64} e_{\text{in}}^3 \left[(1 - \cos i_{\text{tot}} - \cos^2 i_{\text{tot}} + \cos^3 i_{\text{tot}}) \cos (3g_{\text{in}} - h_{\text{in}}) \right. \\
& \left. + (1 + \cos i_{\text{tot}} - \cos^2 i_{\text{tot}} - \cos^3 i_{\text{tot}}) \cos (3g_{\text{in}} + h_{\text{in}}) \right]
\end{aligned} \tag{3.83}$$

とおいた。なお、TPQ limit における Hamiltonian は式 (3.80) の Hamiltonian \mathcal{H}^{TP} から ϵF_{oct} を落としたものである。

式 (3.80) の Hamiltonian \mathcal{H}^{TP} より、TPO 近似においては、各軌道の角運動量の z 成分が変化することがわかる ($\frac{\partial \mathcal{H}^{\text{TP}}}{\partial h_{\text{in}}} = \dot{H}_{\text{in}} = -\dot{H}_{\text{out}} \neq 0$)。これによって TPO 近似における EKL 機構での Flip が可能になる。同時に、TPQ 近似においては、 $\frac{\partial \mathcal{H}^{\text{TP}}}{\partial h_{\text{in}}} = \dot{H}_{\text{in}} = -\dot{H}_{\text{out}} = 0$ であることが確認できる。

図 3.4 は TPQ 近似における KL 機構と TPO 近似における EKL 機構を数値計算によって比較したものである (Naoz 2016)。この例では、天の川銀河の中心の超巨大ブラックホールを 3 体目と考え、そこから 0.03 pc 離れた位置にある中間質量ブラックホール (1 体目) と質量が無視できるほど小さい天体 (2 体目) の連星 (長軸半径 135 AU) の力学に着目している。また、この図では、相互 Inclination i_{tot} を単に i 、Inner binary の離心率 e_{in} を e_1 と記している。左図は Kozai limit をみたす系 ($e_{\text{in},0} = 0.01$, $e_{\text{out},0} = 0.7$, $i_{\text{tot},0} = 60^\circ$, $g_{\text{in},0} = 0^\circ$, $h_{\text{in},0} = 60^\circ$) であり、この系では、TPQ 近似の場合では、Inclination が 90° をまたいで変化する Flip は起きていないが、TPO 近似まで拡張した場合は Flip が起きていることがわかる。また、それに伴って、Inner binary の離心率が非常に大きな値をとることがわかる。ここでは明瞭さのために、Quadrupole レベルの KL 機構による完全に周期的な振動を KL 振動、Octupole レベルで起こる Inner binary の離心率 e_{in} の最大値の大局的な振動的变化 (e.g. Katz et al. 2011, Lithwick and Naoz 2011, Naoz et al. 2013a) を Octupole 振動と呼ぶことにする。

さらに、右図は Kozai limit をみたさない系 ($e_{\text{in},0} = 0.85$, $e_{\text{out},0} = 0.85$, $i_{\text{tot},0} = 1^\circ$, $g_{\text{in},0} = 0^\circ$, $h_{\text{in},0} = 180^\circ$) である (すなわち KL 機構が起きない) が、TPO 近似まで拡張した場合には Inner binary の離心率が時間と共に変化していることがわかる。

以上のように、Octupole 項が重要となる系では、Octupole 項を考慮しないことにより重要な力学を捉え損ねてしまう恐れがあり、Octupole 項を考慮した EKL 機構を考えることは非常に重要である。

3.3 Kozai-Lidov 機構に関する様々な時間スケール

3.3.1 Kozai-Lidov 時間

前述の KL 機構 (3.2.4 節) の TPQ 近似における KL 振動の周期を求める (Antognini 2015)。KL 振動の周期を Kozai-Lidov (KL) 時間とよぶことにする。3.2.6 節の図 3.4 で見た通り、この KL 振動は完全に周期的であり、Inner binary の最大値は時間変化しない。

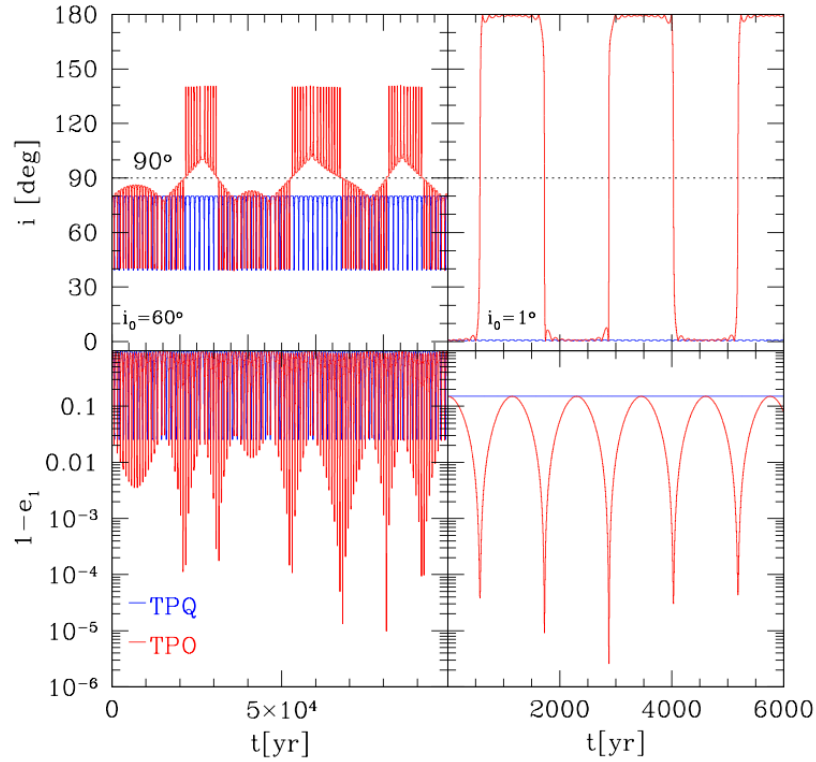


図 3.4: TPQ 近似における時間進化 (青線) と TPO 近似における時間進化 (赤線) の例 (Naoz 2016 の Figure 5 を引用): この図では、相互 Inclination i_{tot} を単に i 、Inner binary の離心率 e_{in} を e_1 と記している。これらの系の初期条件は 2 体目が Test particle、 $m_1 = 10^4 M_\odot$ 、 $m_3 = 4 \times 10^6 M_\odot$ 、 $a_{\text{in}} = 135 \text{ AU}$ 、 $a_{\text{out}} = 0.03 \text{ pc}$ の場合を計算している。左図は Kozai limit をみたく系 ($e_{\text{in},0} = 0.01$ 、 $e_{\text{out},0} = 0.7$ 、 $i_{\text{tot},0} = 60^\circ$ 、 $g_{\text{in},0} = 0^\circ$ 、 $h_{\text{in},0} = 60^\circ$) であり、右図は Kozai limit をみたくさない系 ($e_{\text{in},0} = 0.85$ 、 $e_{\text{out},0} = 0.85$ 、 $i_{\text{tot},0} = 1^\circ$ 、 $g_{\text{in},0} = 0^\circ$ 、 $h_{\text{in},0} = 180^\circ$) である。左図の系では、TPQ 近似の際には Flip は起きていないが、TPO 近似の際には起きていることがわかる。右図の系では、TPQ 近似の際には Inner binary の離心率は時間変化していないが、TPO 近似の際には時間変化していることがわかる。

全角運動量保存則より、TPQ limit($G_{\text{in}} \ll G_{\text{out}}$) では、

$$\begin{aligned} G_{\text{tot}} &= \sqrt{G_{\text{in}}^2 + G_{\text{out}}^2 + 2G_{\text{in}}G_{\text{out}} \cos i_{\text{tot}}} \\ &\simeq G_{\text{out}} + G_{\text{in}} \cos i_{\text{tot}} \end{aligned} \quad (3.84)$$

が成り立つ。 $G_{\text{tot}} = \text{const}$ であり、TPQ 近似では $G_{\text{out}} = \text{const}$ であるから、これより、 $G_{\text{in}} \cos i_{\text{tot}} = \text{const}$ となる。ここで、 $L_{\text{in}} = \text{const}$ と式 (3.4) より、 $\sqrt{1 - e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}} = \text{const}$ となる。したがって、 $j_1 = \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2}$ と定義すれば、

$$\Theta_0^2 \equiv (j_1 \cos i_{\text{tot}})^2 \quad (3.85)$$

は定数である。これを Kozai's integral とよび、 Θ_0 は Inner binary の Reduced 角運動量の z 成分である (Holman et al. 1997)。後の計算のために、TPQ における Hamiltonian $\mathcal{H}_{\text{quad}}^*(\Delta h = \pi)$ を C_2 で割ったものを j_1 と Θ_0^2 で書き表すと、式 (3.40) より、

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_q &\equiv \frac{\mathcal{H}_{\text{quad}}^*(\Delta h = \pi)}{C_2} \\ &= \frac{1}{j_1^2} [(5 - 3j_1^2)(j_1^2 - 3\Theta_0^2) - 15(1 - j_1^2)(j_1^2 - \Theta_0^2) \cos 2(g_{\text{in}})] \end{aligned} \quad (3.86)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathcal{H}}_q$ は無次元かつ定数である。また、TPQ 近似における g_{in} の時間変化と j_1 の時間変化は、

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\text{in}}}{dt} &= \frac{C_2}{L_{\text{in}}} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_q}{\partial j_1} \\ &= \frac{6C_2}{L_{\text{in}}} \frac{1}{j_1^3} [5(\Theta_0^2 - j_1^4)(1 - \cos 2g_{\text{in}}) + 4j_1^4] \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{dj_1}{dt} &= \frac{C_2}{L_{\text{in}}} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_q}{\partial g_{\text{in}}} \\ &= \frac{30C_2}{L_{\text{in}}} \frac{1}{j_1^2} (1 - j_1^2)(j_1^2 - \Theta_0^2) \sin(2g_{\text{in}}) \end{aligned} \quad (3.88)$$

となる。

ここで、 g_{in} のとりうる値による力学的挙動には 2 種類ある。1 つは g_{in} が $0 \sim 2\pi$ の全ての値をとる場合であり、このとき Inner binary の近点は軌道平面上でぐるぐると回転しているため、この状態は Rotation とよばれる ((Antognini 2015), Circulation とよばれることもある (e.g. Hamers 2021))。もう 1 つは g_{in} がある固定点 $j_{1,\text{fix}}$ 付近の値しかとらない場合であり、このとき Inner binary の近点は軌道平面上のある地点と中心に振動しているため、この状態は Libration とよばれる (Antognini 2015)。

式 (3.87) と式 (3.88) より、Libration 状態になるときは g_{in} が $\pm\pi/2$ 付近の値をとり、 $j_{1,\text{fix}}^2 = \sqrt{5\Theta_0^2/3}$ のときである。したがって、与えられた系 (ある $\hat{\mathcal{H}}_q$ と Θ_0^2 の組) に対して、その系が Libration か Rotation を調べるためには、 $g_{\text{in}} = 0$ の場合の式 (3.86) を j_1^2 について解いたとき、

$$j_1^2 = \frac{1}{12} (10 + \hat{\mathcal{H}}_q + 6\Theta_0^2) \quad (3.89)$$

が解として $j_1^2 > 1$ のものをもつ場合である。なお、 $j_1^2 = 1$ 付近のものは Libration と Rotation の境界にいる。したがって、Libration と Rotation を見分ける定数として

$$\begin{aligned} C_{\text{KL}} &\equiv 1 - \frac{1}{12} \left(10 + \hat{\mathcal{H}}_q + 6\Theta_0^2 \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(2 - \hat{\mathcal{H}}_q - 6\Theta_0^2 \right) \\ &= e_{\text{in}}^2 \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 i_{\text{tot}} \sin^2 g_{\text{in}} \right) \end{aligned} \quad (3.90)$$

を定義する (Lidov 1962) と、 $C_{\text{KL}} < 0$ のとき系は Libration、 $C_{\text{KL}} > 0$ のとき系は Rotation である。この定数 C_{KL} は Libration constant とよばれる (Antognini 2015)。なお、Test particle limit を外した場合の拡張は Hamers (2021) によって行われた (5.2.1 節を参照)。

TPQ 近似における Hamiltonian は積分可能であるから、KL 時間は厳密に定まる。KL 時間 t_{KL} は、

$$t_{\text{KL}} = \oint dt = \oint \frac{dt}{dj_1} dj_1 \quad (3.91)$$

によって定まる。これを計算するために、式 (3.86) より $\sin(2g_{\text{in}})$ を求めると、

$$\sin(2g_{\text{in}}) = \left[1 - \left(\frac{3j_1^4 + j_1^2 (\hat{\mathcal{H}}_q - 9\Theta_0^2 - 5) + 15\Theta_0^2}{15(1-j_1^2)(j_1^2 - \Theta_0^2)} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.92)$$

となるから、 t_{KL} は、式 (3.91) に式 (3.88) と式 (3.92) を代入することによって、

$$\begin{aligned} t_{\text{KL}} &= \frac{L_{\text{in}}}{30C_2} \oint \frac{j_1^2 dj_1}{(1-j_1^2)(j_1^2 - \Theta_0^2)} \left[1 - \left(\frac{3j_1^4 + j_1^2 (\hat{\mathcal{H}}_q - 9\Theta_0^2 - 5) + 15\Theta_0^2}{15(1-j_1^2)(j_1^2 - \Theta_0^2)} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= 2 \times \frac{L_{\text{in}}}{30C_2} \int_{j_{\text{min}}}^{j_{\text{max}}} \frac{dj_1}{(1-j_1^2)} \times \left[\left(1 - \frac{\Theta_0^2}{j_1^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{5} - \frac{\Theta_0^2}{j_1^2} + \frac{4}{5} \frac{C_{\text{KL}}}{1-j_1^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

となる。ここで、最後のイコールにおいて式 (3.90) を用いて $\hat{\mathcal{H}}_q$ を消去した。

式 (3.93) の最後の積分は高々 $\mathcal{O}(1)$ なので (Antognini 2015)、KL 時間 t_{KL} はおおよそ

$$t_{\text{KL}} \simeq \frac{L_{\text{in}}}{15C_2} \quad (3.94)$$

と求められる。これを式 (3.3) と式 (3.39) を用いて書き下すと、

$$\begin{aligned} t_{\text{KL}} &\simeq \frac{16}{15} \left(\frac{a_{\text{out}}^3}{a_{\text{in}}^{3/2}} \right) \sqrt{\frac{m_1}{Gm_3^2}} (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2} \\ &= \frac{8}{15\pi} \left(1 + \frac{m_1}{m_3} \right) \left(\frac{P_{\text{out}}^2}{P_{\text{in}}} \right) (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.95)$$

となる。ここで、係数 16/15 は数値計算により決定された (Antognini 2015)。

これは Test particle limit が外れた場合には、最も単純には、

$$\begin{aligned} t_{\text{KL}} &\simeq \frac{16}{15} \left(\frac{a_{\text{out}}^3}{a_{\text{in}}^{3/2}} \right) \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k^2 m_3^2}} (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2} \\ &= \frac{8}{15\pi} \left(1 + \frac{m_1 + m_2}{m_3} \right) \left(\frac{P_{\text{out}}^2}{P_{\text{in}}} \right) (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.96)$$

と拡張される (e.g. Naoz 2016)。

詳細は 3.6 節に譲るが、KL 時間よりも短い時間スケールで起こる力学的作用や効果が、KL 振動の様子を大きく変化させることがあるということが明らかとなっている (e.g. Ford et al. 2000, Fabrycky and Tremaine 2007, Naoz et al. 2013b, Naoz 2016)。

3.3.2 Octupole 振動の周期と Flip 時間

前述の EKL 機構 (3.2.6 節) の TPO 近似における Octupole 振動の周期を求める (Antognini 2015)。3.2.6 節の図 3.4 で見た通り、Octupole 振動は Inner binary の離心率の KL 振動 1 周期の間の最大値を変化させる。

Octupole 項は非可積分であり、TPO 近似では C_{KL} と Θ_0^2 はもはや定数ではない (Antognini 2015)。しかし、TPO 近似においても $\hat{\mathcal{H}}_q = \text{const}$ であるから、式 (3.90) より、

$$\begin{aligned} \phi_q &\equiv C_{\text{KL}} + \frac{1}{2}\Theta_0^2 \\ &= \frac{1}{12}(2 - \hat{\mathcal{H}}_q) \\ &= \text{const} \end{aligned} \quad (3.97)$$

によって ϕ_q を定義すれば、これは定数である。ここで、Katz et al. (2011) により、 Θ_0^2 の時間変化は、

$$\frac{d\Theta_0^2}{d\tau} = -\frac{15\pi\epsilon}{64\sqrt{10}} \frac{\sqrt{\Theta_0^2} \sin h_{\text{in}}}{K(x)} (4 - 11C_{\text{KL}}) \sqrt{6 + 4C_{\text{KL}}} \quad (3.98)$$

と求められている。ここで、

$$\tau = \frac{t}{t_{\text{sec}}} = \frac{m_3}{a_{\text{out}}^3 (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{k^2 a_{\text{in}}^3}{m_1}} t \quad (3.99)$$

であり、 t_{sec} は Secular 時間とよばれる (Antognini 2015)。すなわち τ は無次元である。また、 h_{in} は Inner binary の Longitude of ascending node (図 2.1) である。

Octupole 振動の無次元化された周期 τ_{oct} は直接積分によって求められる。式 (3.97) を用いる

と、 τ_{oct} は、

$$\begin{aligned}
 \tau_{\text{oct}} &= \oint d\tau \\
 &= \oint \frac{dC_{\text{KL}}}{\dot{C}_{\text{KL}}} \\
 &= \oint -2 \left(\frac{d\Theta_0^2}{d\tau} \right)^{-1} dC_{\text{KL}} \\
 &= \oint \frac{128\sqrt{10}}{15\pi\epsilon} \frac{K(x)}{\sqrt{2(\phi_q - C_{\text{KL}}) \sin h_{\text{in}}}} \frac{1}{(4 - 11C_{\text{KL}}) \sqrt{6 + 4C_{\text{KL}}}} dC_{\text{KL}}
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

と求められる。これは煩雑な計算により、結局、

$$\tau_{\text{oct}} \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \tag{3.101}$$

となる (Antognini 2015)。したがって、Octupole 振動の周期 t_{oct} は、

$$\begin{aligned}
 t_{\text{oct}} &\sim \frac{256\sqrt{10}}{15\pi\sqrt{\epsilon}} t_{\text{sec}} \\
 &= \frac{256a_{\text{out}}^3}{15\pi a_{\text{in}}^{3/2}} \sqrt{\frac{10}{\epsilon_{\text{oct}}} \left(\frac{m_1}{m_3} \right) \frac{(1 - e_{\text{out}}^2)^3}{k^2 m_3}}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

となる。

ここで、Flip が起こる周期を t_{flip} とすると、Flip は Octupole 振動の 1 周期の間に 2 回起こるから、

$$\begin{aligned}
 t_{\text{flip}} &= \frac{1}{2} t_{\text{oct}} \\
 &\sim \frac{128a_{\text{out}}^3}{15\pi a_{\text{in}}^{3/2}} \sqrt{\frac{10}{\epsilon_{\text{oct}}} \left(\frac{m_1}{m_3} \right) \frac{(1 - e_{\text{out}}^2)^3}{k^2 m_3}}
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

となる。これを Flip 時間とよぶ (Antognini 2015)。

3.4 Flip の判定条件

角運動量保存則 $\mathbf{G}_{\text{tot}} = \mathbf{G}_{\text{in}} + \mathbf{G}_{\text{out}}$ より、

$$\begin{aligned}
 G_{\text{tot}}^2 &= |\mathbf{G}_{\text{in}} + \mathbf{G}_{\text{out}}|^2 \\
 &= G_{\text{in}}^2 + G_{\text{out}}^2 + 2G_{\text{in}}G_{\text{out}} \cos i_{\text{tot}} \\
 &= L_{\text{in}}^2(1 - e_{\text{in}}^2) + L_{\text{out}}^2(1 - e_{\text{out}}^2) + 2L_{\text{in}}L_{\text{out}} \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2} \sqrt{1 - e_{\text{out}}^2} \cos i_{\text{tot}} \\
 &= G_0^2
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

が成り立つ。ここで、 G_0 は初期条件で定まる定数である。したがって、

$$\begin{aligned}
 \frac{G_0^2}{2L_{\text{in}}L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} &= \frac{L_{\text{in}}(1-e_{\text{in}}^2)}{2L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} + \frac{L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}}{2L_{\text{in}}} + \sqrt{1-e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}} \\
 &= \frac{L_{\text{in}}}{2L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} - \frac{L_{\text{in}}}{2L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} e_{\text{in}}^2 + \frac{L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}}{2L_{\text{in}}} + \sqrt{1-e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}} \\
 &= \frac{L_{\text{in}}}{2L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} + \frac{L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}}{2L_{\text{in}}} + \sqrt{1-e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}} - \frac{\eta}{2} e_{\text{in}}^2
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

ここで、

$$\eta = \frac{L_{\text{in}}}{L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} = \frac{L_{\text{in}}}{G_{\text{out}}} \tag{3.106}$$

とおいた。これより、

$$\begin{aligned}
 K &= \sqrt{1-e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}} - \frac{\eta}{2} e_{\text{in}}^2 \\
 &= \frac{G_0^2}{2L_{\text{in}}L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} - \frac{L_{\text{in}}}{2L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}} - \frac{L_{\text{out}}\sqrt{1-e_{\text{out}}^2}}{2L_{\text{in}}} \\
 &= \frac{G_0^2}{2L_{\text{in}}G_{\text{out}}} - \frac{L_{\text{in}}}{2G_{\text{out}}} - \frac{G_{\text{out}}}{2L_{\text{in}}} \\
 &= \frac{1}{2L_{\text{in}}G_{\text{out}}} (G_0^2 - L_{\text{in}}^2 - G_{\text{out}}^2)
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

によって K を定めると、これは Quadrupole 近似の場合には定数である。Octupole 近似の場合、これは定数ではないが、 $K = -\eta/2$ ($\equiv K_c$) のとき、

$$K_c = \sqrt{1-e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}} + K_c e_{\text{in}}^2 \tag{3.108}$$

より、

$$\cos i_{\text{tot}} = K_c \sqrt{1-e_{\text{in}}^2} \tag{3.109}$$

が成り立つため、このとき、式 (3.106) と $G_{\text{in}} \ll G_{\text{out}}$ より、

$$\begin{aligned}
 \cos i_{\text{tot}} &= -\frac{L_{\text{in}}\sqrt{1-e_{\text{in}}^2}}{2G_{\text{out}}} \\
 &= -\frac{G_{\text{in}}}{2G_{\text{out}}} \\
 &\simeq 0
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

となり、 $K = K_c$ が成り立つ時に Flip が起こることがわかる。よって、 K はしばしば Flip の判定条件として用いられる (Su et al. 2021)。

3.5 近似の妥当性

これまで、Secular 近似における階層的 3 体系の力学について述べてきた。これらの力学は、Secular 近似が妥当でなくなった場合や階層的 3 体系が不安定になった場合は成り立たない。では、Secular 近似が妥当でない場合とはどのような場合だろうか？ また、階層的 3 体系が安定に存在するための条件はなんだろうか？ ここでは、Secular 近似の妥当性と階層的 3 体系の安定性条件について述べる。

3.5.1 Secular 近似の妥当性

Secular 近似では、系の進化は Inner binary と Outer binary の軌道周期 P_{in} , P_{out} で平均化されてしまう (Double average の場合) ので、3 体目の位置の変化による効果などの Secular 時間 (式 (3.99)) よりも短い時間スケールの変動を捉えることができない (Mangipudi et al. 2022)。実際、図 3.5 のように、Secular 近似を取り入れずに計算された、すなわち直接 N 体計算の場合の Inner binary の離心率 (図 3.5 の黒実線) は、Double average の Secular 近似で計算された値の周りを Outer binary の周期 P_{out} 程度の短い時間スケールで変動していることが示されている (e.g., Ivanov et al. 2005, Antognini et al. 2014, Antonini et al. 2014)。ここで、図 3.5 において縦軸は Inner binary の離心率 e_{in} (図中では e_1)、横軸は時間 (年) であり、黒の実線は直接 N 体計算コードを用いて計算した場合を、赤の点線は Double average の Secular 近似で計算した場合を示している。この系の初期条件は $m_1 = m_3 = 10^7 M_{\odot}$, $m_2 = 10^5 M_{\odot}$, $e_{\text{in},0} = 0.1$, $e_{\text{out},0} = 0.2$, $a_{\text{in}} = 1 \text{ pc}$, $a_{\text{out}} = 20 \text{ pc}$, $i_{\text{tot},0} = 80^\circ$ とし、左図では $g_{\text{in},0} = g_{\text{out},0} = 0^\circ$ 、右図では $g_{\text{in},0} - g_{\text{out},0} = 90^\circ$ とした。なお、ここでは一般相対論の効果は考慮されていない。左図では、直接 N 体計算の場合と Double average の Secular 近似の場合は平均的に一致しているが、直接 N 体計算の場合には短い時間スケールの摂動があることがわかる。また、右図では、短い時間スケールの摂動によって、直接 N 体計算の場合では Double average の Secular 近似の場合よりも大きな離心率をとっていることがわかる。この短い時間スケールの摂動の周期は Outer binary の周期 P_{out} の 2 倍であった。

図 3.5 で示された振動 1 周期における Inner binary の角運動量の変化 ΔG_1 は、

$$\Delta G_1 = \frac{15}{4} \frac{m_1 m_2 m_3}{(m_1 + m_2)^2} \cos i_{\text{tot},\text{min}} \left(\frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \right)^2 k \sqrt{m_3 a_{\text{out}}} \quad (3.111)$$

で与えられる (Ivanov et al. 2005)。ここで、 $i_{\text{tot},\text{min}}$ はこの振動の間の相互 Inclination の最小値である。これより、Outer binary の長軸半径 a_{out} が小さいほど、この振動の間の Inner binary の角運動量変化は大きくなることがわかる。また、この式によって予測された短い時間スケールの摂動の幅 (図 3.5 の青点線) は直接 N 体計算の結果とよく一致していることがわかる。なお、この式が妥当であるのは e_{in} が KL 振動の最大値付近をとるときのみである。

通常、この振動は非常に小さく、無視できるものである。しかし、Inner binary の離心率が大きい ($e_{\text{in}} \sim 1$) 場合においては、Inner binary が高い離心率を保つ時間が長くなり、これによって短い時間スケールの振動による角運動量の変化が、Inner binary の総角運動量と同程度の値になってしまうことがある。これは、Inner binary が高い離心率をもつとき、3 体目が Line of nodes (図 2.1) を通過する際に Inner binary に対し非常に大きなトルクを与えるためである。このとき、Inner binary の周期 P_{in} よりも短い時間スケールで Inner binary の角運動量の値が 0 にむかう、す

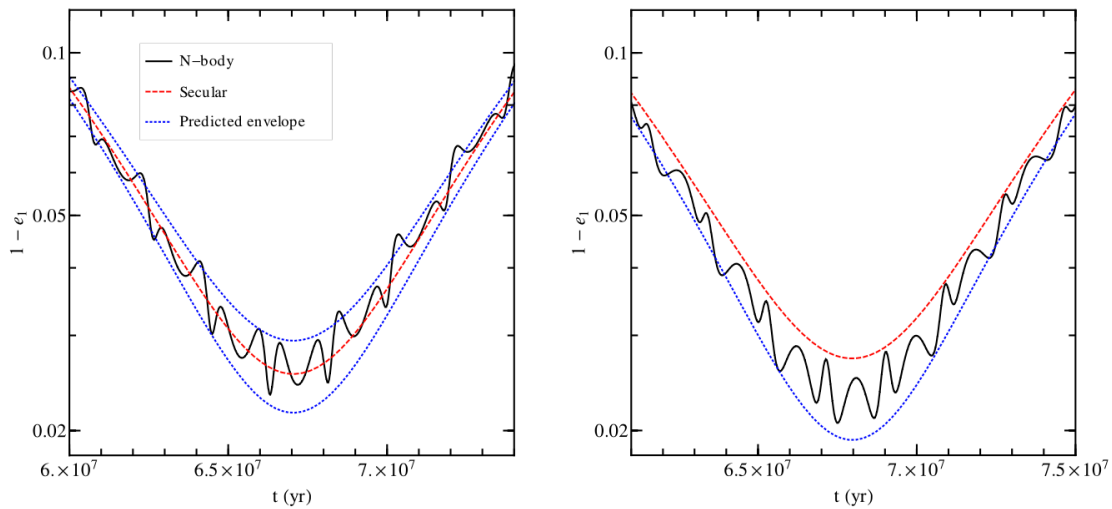


図 3.5: 直接 N 体計算コードと Secular 近似における Inner binary の離心率 e_{in} の時間進化の比較 (Antognini et al. 2014 の Figure 1 を引用): 縦軸は Inner binary の離心率 e_{in} (図中では e_1)、横軸は時間 (年) である。黒の実線は直接 N 体計算コードを用いて計算した場合を、赤の点線は Double average の Secular 近似で計算した場合を示している。この系の初期条件は $m_1 = m_3 = 10^7 M_{\odot}$, $m_2 = 10^5 M_{\odot}$, $e_{\text{in},0} = 0.1$, $e_{\text{out},0} = 0.2$, $a_{\text{in}} = 1 \text{ pc}$, $a_{\text{out}} = 20 \text{ pc}$, $i_{\text{tot},0} = 80^\circ$ とし、左図では $g_{\text{in},0} = g_{\text{out},0} = 0^\circ$ 、右図では $g_{\text{in},0} - g_{\text{out},0} = 90^\circ$ とした。なお、ここでは一般相対論の効果は考慮されていない。左図では、直接 N 体計算の場合と Secular 近似の場合に平均的に一致しているが、直接 N 体計算の場合には短い時間スケールの摂動があることがわかる。また、右図では、短い時間スケールの摂動によって、直接 N 体計算の場合では Secular 近似の場合よりも大きな離心率をとっていることがわかる。この短い時間スケールの摂動の周期は Outer binary の周期の 2 倍であった。ここで、青の点線は式 (3.112) より予測される短い時間スケールの摂動の幅を示しており、直接 N 体計算の結果とよく一致していることがわかる。

なわち離心率 e_{in} が 1 にむかう。このような場合にはこの振動は無視できず、もはや Secular 近似は妥当ではない。

Secular 近似が妥当であるための具体的な条件は、Antonini et al. (2014) によって明らかにされた。Antonini et al. (2014) は、固定された 3 体目を想定して瞬間的な Quadrupole レベルのトルクを考えることで、Inner binary の離心率が 1 に限りなく近づく場合 ($e_{\text{in}} \rightarrow 1$) において、Secular 近似が妥当であるための条件を

$$\sqrt{1 - e_{\text{in}}} \gtrsim 5\pi \frac{m_3}{m_1 + m_2} \left(\frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}} (1 - e_{\text{out}})} \right)^3 \quad (3.112)$$

と明らかにした。

3.5.2 階層的 3 体系の安定性条件

階層的 3 体系では、Inner binary と Outer binary が安定的に階層構造を成し、 $\alpha = a_{\text{in}}/a_{\text{out}} \ll 1$ が成り立つ。では、この階層構造が安定的に存在するための条件はなんだろうか？ ここでは、階層的 3 体系の安定性条件について述べる。

階層的 3 体系の安定性条件は、Mardling and Aarseth (2001) によって明らかにされた。Mardling and Aarseth (2001) は、同じくらいの質量をもつ階層的 3 体系の系において、相互 Inclination が 0° かつ 1 体目から見て 3 体目と 2 体目の公転方向が同じ (Prograde) 場合について、階層的 3 体系の安定性条件を求めた。なお、一般に、Retrograde の場合は Prograde の場合よりも安定である。これに相互 Inclination の影響を考慮に入れた式、

$$\frac{a_{\text{out}}}{a_{\text{in}}} > 2.8 \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2} \right)^{2/5} \frac{(1 + e_{\text{out}})^{2/5}}{(1 - e_{\text{out}})^{6/5}} \left(1 - \frac{0.3i_{\text{tot}}}{180^\circ} \right) \quad (3.113)$$

が階層的 3 体系の安定性条件として広く用いられている。これは同じくらいの質量をもつ階層的 3 体系の系において導かれた式であるが、様々な質量の階層的 3 体系の安定性条件として用いられている。

ここで、前節の Secular 近似の妥当性に関する条件式 (式 (3.112)) と階層的 3 体系の安定性条件 (式 (3.113)) の両方を考慮した条件式は、

$$\epsilon = \frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \frac{e_{\text{out}}}{1 - e_{\text{out}}^2} < 0.1 \quad (3.114)$$

となり、これは式 (3.113) の階層的 3 体系の安定性条件と矛盾しないことが数値計算で示されている (Naoz et al. 2013b)。

3.6 一般相対論的効果の Kozai-Lidov 振動への影響

KL 時間 t_{KL} や Octupole 振動の周期 t_{oct} よりも短い時間スケールで起こる力学的作用や効果が、KL 振動の様子を大きく変化させ、Inner binary のとりうる離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ が大きく変化することがある (e.g. Ford et al. 2000, Fabrycky and Tremaine 2007, Naoz et al. 2013b, Naoz 2016)。したがってこのような効果について考えることは、KL 振動によって Inner binary の離心

率が大きくなり、最終的に重力波を放出して合体することができるかどうかを議論する際に、非常に重要である。

一般相対性理論では、系の特徴的な速度 v が光速 c よりも十分小さいとき ($v/c \ll 1$)、Einstein 方程式を $(v/c)^2$ で展開することができる。この展開において、例えば、 $(v/c)^2$ の項を 1post-Newtonian (1pN)、 $(v/c)^4$ を 2pN、 $(v/c)^5$ を 2.5pN とよぶ。3 体系に力学進化に関しては、1pN, 2pN 項が近日点移動による効果を担い、2.5pN が重力波放出による効果を担う。 v/c が十分小さい場合には、2pN は 1pN に対して無視できる。以下では、近日点移動の効果が階層的 3 体系の力学進化に与える影響に着目する。

3.6.1 近日点移動の時間スケール

2 体問題においては、近日点移動の効果によって軌道の離心率や Inclination が変化することはない (Damour and Deruelle 1985)。しかし、3 体目が存在する階層的 3 体系においては、その限りではないことが明らかとなっている (Naoz et al. 2013b)。

1pN を考慮した場合の階層的 3 体系の Hamiltonian は、Newtonian の場合の Hamiltonian \mathcal{H} (式 (3.1)) と 1pN を表す Hamiltonian $\mathcal{H}_{1\text{pN}}$ の和 $\mathcal{H} + \mathcal{H}_{1\text{pN}}$ で表される。1pN Hamiltonian $\mathcal{H}_{1\text{pN}}$ は、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1\text{pN}} = & -\frac{1}{8c^2} \sum_{i=1}^3 m_i \left(\frac{p_i^2}{m_i^2} \right)^2 - \frac{k^2}{4c^2} \sum_{i,i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \\ & \times \left\{ 6 \frac{p_i^2}{m_i^2} - 7 \frac{(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j)}{m_i m_j} - \frac{(\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i)(\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{p}_j)}{m_i m_j} \right\} \\ & + \frac{k^4}{2c^2} \sum_{i,j \neq i, k' \neq i} \frac{m_i m_j m_{k'}}{r_{ij} r_{ik'}} \end{aligned} \quad (3.115)$$

で与えられる (e.g., Schäfer 1987, Lousto and Nakano 2008)。ここで、階層的 3 体系における 1pN Hamiltonian $\mathcal{H}_{1\text{pN}}$ は、Double average かつ $\mathcal{O}(\alpha^3)$ をとった場合 ($\overline{\mathcal{H}}^{1\text{pN}}$ とする)、

$$\overline{\mathcal{H}}^{1\text{pN}} = \overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{in}}}^{1\text{pN}} + \overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{in}} a_{\text{out}}}^{1\text{pN}} + \overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{out}}}^{1\text{pN}} + \overline{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{1\text{pN}} \quad (3.116)$$

と和の形で表すことができる。それぞれの項は

$$\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{in}}}^{1\text{pN}} = \frac{k^4 \mu_{\text{in}} (15m_1^2 + 29m_1 m_2 + 15m_2^2)}{8a_{\text{in}}^2 c^2} - \frac{3k^4 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a_{\text{in}}^2 c^2 \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2}} \quad (3.117)$$

$$\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{in}} a_{\text{out}}}^{1\text{pN}} = \frac{k^4 m_1 m_2 m_3 (2(m_1 + m_2) + 3m_3)}{4a_{\text{in}} a_{\text{out}} c^2 (m_1 + m_2 + m_3)} \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{out}}}^{1\text{pN}} = & \frac{k^4 \mu_{\text{out}} \left(15(m_1 + m_2)^2 + 29(m_1 + m_2) m_3 + 15m_3^2 \right)}{8a_{\text{out}}^2 c^2 (m_1 + m_2 + m_3)} \\ & - \frac{3k^4 (m_1 + m_2) m_3 (m_1 + m_2 + m_3)}{a_{\text{out}}^2 c^2 \sqrt{1 - e_{\text{out}}^2}} \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\text{1pN}} = & \frac{k^2}{4a_{\text{out}}^3 c^2 (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2} (m_1 + m_2)} \{G_1 G_2 [8(m_1 + m_2) \\ & + 6m_3] \cos i_{\text{tot}} + \frac{a_{\text{in}} k^2 m_1 m_2 m_3}{8(m_1 + m_2)} (f_{me_{\text{in}}} - 3f_{me_{\text{in}}} \cos^2 i_{\text{tot}} \\ & + 9e_{\text{in}}^2 (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2) \cos(2g_{\text{in}}) \sin^2 i_{\text{tot}})\} \end{aligned} \quad (3.120)$$

であり、

$$\mu_{\text{in}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.121)$$

$$\mu_{\text{out}} = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (3.122)$$

$$f_{me_{\text{in}}} = (2 - 5e_{\text{in}}^2) (m_1^2 + m_2^2) - 3(2 - e_{\text{in}}^2) m_1 m_2 \quad (3.123)$$

とおいた (Naoz et al. 2013b)。

$\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{in}}^{-2}}^{\text{1pN}}$ (式 (3.117)) と $\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{out}}^{-2}}^{\text{1pN}}$ (式 (3.119)) は、それぞれ Inner binary、Outer binary の 2 体問題の場合の 1pN Hamiltonian であり、それぞれ Inner binary、Outer binary の Argument of perihelion $g_{\text{in}}, g_{\text{out}}$ 以外は直接的には変化させない。これらの項による Argument of perihelion $g_{\text{in}}, g_{\text{out}}$ の変化はそれぞれ、

$$\left. \frac{dg_{\text{in}}}{dt} \right|_{\text{1pN}(a_{\text{in}}^{-2})} = \frac{3k^3 (m_1 + m_2)^{3/2}}{a_{\text{in}}^{5/2} c^2 (1 - e_{\text{in}}^2)} \quad (3.124)$$

$$\left. \frac{dg_{\text{out}}}{dt} \right|_{\text{1pN}(a_{\text{out}}^{-2})} = \frac{3k^3 (m_1 + m_2 + m_3)^{3/2}}{a_{\text{out}}^{5/2} c^2 (1 - e_{\text{out}}^2)} \quad (3.125)$$

である (Naoz et al. 2013b)。

$\overline{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\text{1pN}}$ は相互作用項であり、離心率や Inclination も直接的に変化させる。なお、この項は $\mathcal{O}(\alpha^{2.5})$ なので、Quadrupole $\mathcal{O}(\alpha^2)$ を考える場合には無視できる。また、 $\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{out}}^{-2}}^{\text{1pN}}$ は正準座標を含まないため、系の時間変化には寄与せず、系の総エネルギーの決定のみに寄与する。

それぞれの 1pN Hamiltonian による軌道パラメータの変化の時間スケールは、3.3.1 節の t_{KL} の導出において、 $\mathcal{H}_{\text{quad}}^*$ (式 (3.86)) を、それぞれ $\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{in}}^{-2}}^{\text{1pN}}$, $\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{out}}^{-2}}^{\text{1pN}}$, $\overline{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{\text{1pN}}$ にすることで求めることができ、

$$t_{a_{\text{in}}^{-2}}^{\text{1pN}} \sim 2\pi \frac{a_{\text{in}}^{5/2} c^2 (1 - e_{\text{in}}^2)}{3k^3 (m_1 + m_2)^{3/2}} \quad (3.126)$$

$$t_{a_{\text{out}}^{-2}}^{\text{1pN}} \sim 2\pi \frac{a_{\text{out}}^{5/2} c^2 (1 - e_{\text{out}}^2)}{3k^3 (m_1 + m_2 + m_3)^{3/2}} \quad (3.127)$$

$$t_{\text{int}}^{\text{1pN}} \sim \frac{16}{9} \frac{a_{\text{out}}^3 c^2 (1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2} (m_1 + m_2)^{3/2}}{\sqrt{a_{\text{in}} e_{\text{in}}} \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2} k^3 (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2) m_3} \quad (3.128)$$

となる (Naoz et al. 2013b)。

これらの時間スケールと KL 時間 t_{KL} 、Octupole 振動の周期 t_{oct} のうち、最も短いものに対応する Hamiltonian による効果が、系の進化を支配する。

3.6.2 近日点移動の効果の例

1pN Hamiltonian による階層的 3 体系における近日点移動の効果の例を示す。

近日点移動の効果には様々な場合があるが、一例として、 $\overline{\mathcal{H}}_{a_{\text{in}}}^{1\text{pN}}$ (式 (3.117)) が支配的な場合に KL 振動 (と Octupole 振動) の振動が抑制され、Newtonian では Flip が起こる系で Flip が起こらなくなる例を図 3.6 に示す。この図では、Inner binary の離心率 e_{in} を e_1 、Inner binary の Inclination i_{in} を i_1 、階層的 3 体系の総角運動量を G_{tot} 、Inner binary の角運動量の G_{tot} に平行な成分 H_{in} を H_1 と記している。この系の初期条件は、 $e_{\text{out}} = 0.6$, $e_{\text{in}} = 0.01$, $g_{\text{in}} = g_{\text{out}} = 0^\circ$, $i_{\text{tot}} = 85^\circ$, $m_1 = 1M_\odot$, $m_2 = 0.001M_\odot$, $m_3 = 10^4M_\odot$ とし、 $a_{\text{in}}/R_1^g = 10^4$, $a_{\text{out}}/R_3^g = 202$ とした。ここで、 R_1^g , R_3^g はそれぞれ Inner binary と Outer binary の重力半径であり、 $R_1^g = k^2(m_1 + m_2)/c^2$, $R_3^g = k^2m_3/c^2$ である。すなわちこの系では、近日点移動の時間スケールが KL 時間に比べて十分短い ($t_{a_{\text{in}}}^{1\text{pN}} \ll t_{\text{KL}}$)。図 3.6 より、この系では、Newtonian (赤線) の場合には Inner binary の離心率 e_{in} が EKL 機構によって大きく振動して非常に大きな値をとり、その際に Flip が起きていることがわかる。しかし 1pN の効果を考慮した場合には、Inner binary の離心率 e_{in} の振動が抑制され、Flip が起こらなくなっていることがわかる。

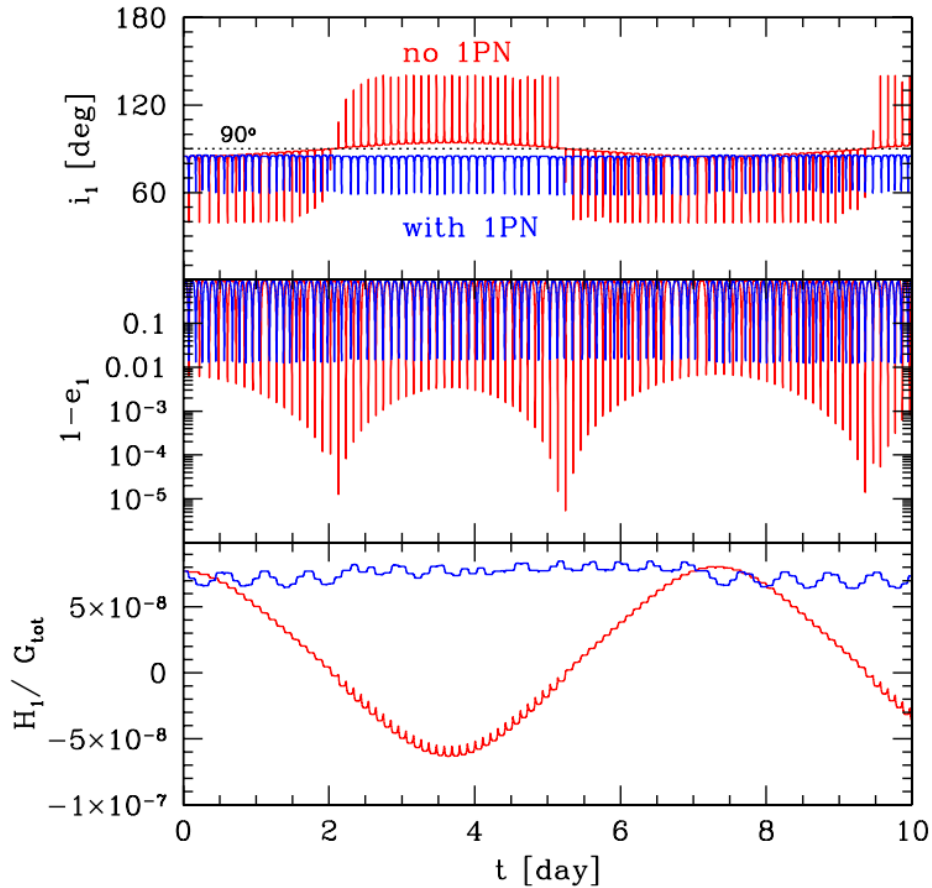


図 3.6: 1pN 効果による EKL 機構の振動の抑制 (Naoz et al. 2013b の Fig.2 を引用): この図では、Inner binary の離心率 e_{in} を e_1 、Inner binary の Inclination i_{in} を i_1 、階層的 3 体系の総角運動量を G_{tot} 、Inner binary の角運動量の G_{tot} に平行な成分 H_{in} を H_1 と記している。赤線が Newtonian の場合、青線が 1pN を考慮した場合を示している。Newtonian の場合では離心率 e_{in} が非常に大きな値をとり、その際に Flip が起きていることがわかる。一方 1pN の効果を考慮した場合は、離心率の振動が抑制され、Flip が起こらなくなっていることがわかる。この系の初期条件は、 $e_{\text{out}} = 0.6$, $e_{\text{in}} = 0.01$, $g_{\text{in}} = g_{\text{out}} = 0^\circ$, $i_{\text{tot}} = 85^\circ$, $m_1 = 1M_\odot$, $m_2 = 0.001M_\odot$, $m_3 = 10^4M_\odot$ とし、 $a_{\text{in}}/R_1^g = 10^4$, $a_{\text{out}}/R_3^g = 202$ とした。ここで、 R_1^g , R_3^g はそれぞれ Inner binary と Outer binary の重力半径であり、 $R_1^g = k^2(m_1 + m_2)/c^2$, $R_3^g = k^2m_3/c^2$ である。すなわちこの系では、近日点移動の時間スケールが KL 時間に比べて十分短い ($t_{a_{\text{in}}^{-2}}^{\text{1pN}} \ll t_{\text{KL}}$)。

Chapter 4

様々な時間スケール

ここでは、中心に中間質量ブラックホールをもつ球状星団における様々な時間スケールについて述べる。3.6節で述べたように、Kozai-Lidov 機構による離心率や相互 Inclination の振動の周期や Octupole 振動の周期よりも短い時間スケールで起こる力学的作用や効果が、KL 振動の様子を大きく変化させることがある。本章では、Kozai-Lidov 機構による離心率や相互 Inclination の振動に影響を与える様々な時間スケールを紹介する。なお、本章では、 c は光速、 G は万有引力定数を表す。

4.1 軌道周期 (Orbital period)

軌道周期 P を求める (Valtonen and Karttunen 2006)。面積速度 (式 (2.23)) より、

$$dA = \frac{1}{2}k dt \quad (4.1)$$

である。軌道長軸半径を a 、軌道短軸半径を b とすると、楕円の面積は πab であるから、

$$\pi ab = \frac{1}{2}kP \quad (4.2)$$

が成り立つ。ここで、 e を用いて $b = a\sqrt{1-e^2}$ と表され、また、式 (2.24) より $k = \sqrt{aGM(1-e^2)}$ であるから、軌道周期 P は、

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (4.3)$$

と求められる。

4.2 緩和時間 (Relaxation time)

天体数 N 、半径 R の星団中を、星団における典型的な速度 v で運動する天体の緩和時間を求める (Binney and Tremaine 2008)。緩和時間 (Relaxation time) とは、ある天体が星団内で十分に散乱されるまでの時間である。

ある質量 m の天体 (Subject star とする) を基準として座標をとる。Subject star に衝突径数 b で、速度 v ($|v| = v$ とおく) をもつ質量 m の別の天体 (Field star とする) が衝突することを考え

る (図 4.1)。このときの Field star の速度変化 δv を見積もる。簡単のために、 $|\delta v|/v \ll 1$ 、また、Field star は短い衝突時間の間は動かないと考える。

このとき、Field star が Subject star から受ける力の、速度 v に並行な成分は足し合わされて 0 となるので、速度変化 δv は $\delta v \perp v$ を満たす。

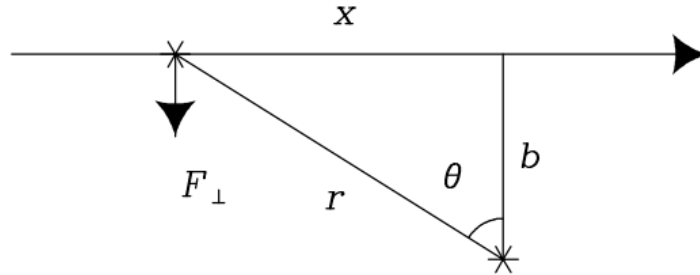


図 4.1: Field star が Subject star に速度 v 、衝突径数 b で接近する様子 (Binney and Tremaine 2008 の Fig1.5 を引用)

2つの天体が最も接近する時刻を 0 とすると、時刻 t で Field star が受ける力 F_{\perp} は、図 4.1 の表記を用いて、

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= \frac{Gm^2}{r^2} \cos \theta \\ &= \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} \\ &= \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

である。これより、衝突による Field star の速度変化の大きさ $|\delta v|$ は、

$$\begin{aligned} |\delta v| &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt \\ &= \frac{Gm}{b^2} \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} dt \\ &= \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1 + s^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2Gm}{bv} \end{aligned} \quad (4.5)$$

次に、これを星団に適用する。星団の半径を R 、星団中の天体の数を N とすると、ある天体 (Star とする) が星団を横切る間に、衝突径数 $b \sim b + db$ で衝突する天体の数 δn は、星団における天体の面密度 $N/\pi R^2$ を用いて、

$$\delta n = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db = \frac{2N}{R^2} b db \quad (4.6)$$

となる。これらのそれぞれの衝突で Star の速度は式 (4.5) の摂動を受ける。摂動の向きはランダムなので、Star の平均速度変化は 0 であるが、速度変化の平方は 0 ではない。よって、星団を横切る間の Star の速度変化の平方の総和は、

$$\begin{aligned} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} |\delta v|^2 \times \delta n &= \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \times \frac{2N}{R^2} b \, db \\ &= 8N \left(\frac{Gm}{vR} \right)^2 \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} \\ &= 8N \left(\frac{Gm}{vR} \right)^2 \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。ここで、衝突径数の最小値を b_{\min} とし、最大値を b_{\max} とした。 b_{\max} を星団の直径 $2R$ 、 b_{\min} を

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm^2}{b_{\min}}. \quad (4.8)$$

によって定義すると、

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right) &= \ln \left(\frac{2R}{\frac{2GM}{v^2}} \right) \\ &= \ln \left(v^2 \frac{R}{Gm} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。

このように 2 体の衝突による効果の累積が Star の速度の拡散を引き起こす。この過程をしばしば 2 体緩和と呼ぶ。

ここで、Star が星団を n_{relax} 回横切ったときの Star の速度変化の平方の総和が v^2 程度になるとすると、式 (4.7) と式 (4.9) を用いて、

$$8N \left(\frac{Gm}{vR} \right)^2 \ln \left(v^2 \frac{R}{Gm} \right) \times n_{\text{relax}} \simeq v^2 \quad (4.10)$$

となる。したがって、この系の緩和時間 t_{relax} は、 n_{relax} と、Star が星団を 1 回横切る時間 $t_{\text{cross}} \simeq R/v$ を用いて、

$$\begin{aligned} t_{\text{relax}} &= n_{\text{relax}} t_{\text{cross}} \\ &\simeq v^2 \times \left[8N \left(\frac{Gm}{vR} \right)^2 \ln \left(v^2 \frac{R}{Gm} \right) \right]^{-1} \times \frac{R}{v} \\ &= \frac{v^4 R^2}{8NG^2 m^2 \ln \left(v^2 \frac{R}{Gm} \right)} \times \frac{R}{v} \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。ここで、典型的な速度 v は星団の縁を円軌道で周回する天体の速度におおよそ等しいので、星団の縁の天体の力の釣り合いから、

$$v^2 \simeq \frac{GNm}{R} \quad (4.12)$$

である。この関係を用いて式 (4.11) を整理すると、この系の緩和時間は、

$$t_{\text{relax}} \simeq \frac{N}{8 \ln N} \times \frac{R}{v} \quad (4.13)$$

となる。

4.3 分離時間 (Evaporation time)

分離 (Evaporation) とは、連星が、通過する天体との相互作用によって引き離されることである。分離時間 (Evaporation timescale) とは、ある星団に存在する連星が通過する天体によって分離するまでの時間である。詳細な導出は省くが、分離時間は星団の密度 ρ と速度分散 σ に反比例し、

$$t_{\text{ev}} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{32\sqrt{\pi}G\rho a_{\text{in}} \ln(\Lambda)} \frac{m_1 + m_2}{m_{\text{avg}}} \quad (4.14)$$

である (e.g. Binney and Tremaine 2008, Alexander and Pfuhl 2014)。ここで、 a_{in} は連星の長軸半径であり、 m_{avg} は星団中の天体の平均質量である。また、

$$\Lambda = 2 \frac{2a_{\text{in}}M}{(m_1 + m_2)(1 + \alpha)r} \quad (4.15)$$

とおいた (Alexander and Pfuhl 2014)。ここで、星団の中心に十分大きい天体 (中間質量ブラックホールなど) が存在すると仮定し、その質量を M とおいた。

星団の密度 ρ は、定数 α と星団中心からの距離 r を用いて、

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha} \quad (4.16)$$

と書ける。なお、 ρ_0 は星団中心から距離 r_0 における密度である。

また、速度分散 σ は

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{GM}{r(1 + \alpha)}} \quad (4.17)$$

である。

4.4 捕獲時間 (Capture time) と遭遇時間 (Encounter time)

中心に中間質量ブラックホール (IMBH) をもつ星団を考える。このような星団では、中心付近に存在する恒星質量ブラックホール (SBH) が中間質量ブラックホールに束縛されている場合が多い。実際、SBH が IMBH に束縛されるまでの時間は、直接 N 体計算コードによるシミュレーションで、総質量が $2.0 \times 10^4 \sim 8.0 \times 10^4 M_{\odot}$ の星団では 100 Myr 程度以下と示されている (Leigh et al. 2014)。

この束縛されるまでの過程には2種類ある (Fragione and Bromberg 2019)。1つ目は、IMBH がSBHを重力波放出によって捕獲するプロセスである。このプロセスによってSBHがIMBHに捕獲される時間を捕獲時間 (Capture time) とよび、これは

$$\tau_{2, \text{cap}} = 1.6 \left(\frac{10^5 \text{pc}^{-3}}{n} \right) \left(\frac{30 M_{\odot}}{M_{\text{SBH}}} \right)^{11/7} \times \left(\frac{1000 M_{\odot}}{M_{\text{IMBH}}} \right)^{12/7} \left(\frac{\sigma_d}{10 \text{ km s}^{-1}} \right)^{11/7} \text{ Myr} \quad (4.18)$$

と見積もられている (Miller 2002)。ここで、 M_{SBH} はSBHの質量、 M_{IMBH} はIMBHの質量である。また、 σ_d^2 は星団の速度分散である。

2つ目のプロセスは、恒星質量ブラックホール連星 (SBHB) がIMBHに接近し、潮汐力によってSBHBが分離され、そのうちの1つをIMBHが捕獲するというものである。このプロセスによってSBHがIMBHに捕獲される時間を遭遇時間 (Encounter timescale) とよび、これは、

$$\tau_{3, \text{enc}} = 0.6 \left(\frac{0.1}{\eta} \right) \left(\frac{1000 M_{\odot}}{M_{\text{IMBH}}} \right) \left(\frac{10^5 \text{pc}^{-3}}{n} \right) \left(\frac{\sigma_d}{10 \text{ kms}^{-1}} \right) \left(\frac{10 \text{ AU}}{a_{\text{SBHB}}} \right) \text{ Myr} \quad (4.19)$$

と見積もられている (Miller 2002)。ここで、 η はSBHが連星になっている割合を表し、 n は星団の数密度を表す。また、 a_{SBHB} はSBHBの長軸半径を表す。

4.5 重力波による合体時間スケール

Peters (1964) は、2つの質点からなる連星系から放出される重力波を考えること (Peters and Mathews 1963) により、連星の合体時間を求めている。

まず、Peters and Mathews (1963) によって、連星系から放出される重力波の総エネルギー P は、

$$P = \frac{8}{15} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^5} (1 + e \cos \phi)^4 [12(1 + e \cos \phi)^2 + e^2 \sin^2 \phi] \quad (4.20)$$

と求められている。ここで、 m_1 , m_2 はそれぞれ1体目、2体目の質量、 a は軌道長軸半径、 e は軌道離心率、 r は1体目に対する2体目の距離、 ϕ は真近点角 (True anomaly) であり、これらは、

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi} \\ \dot{\phi} &= \omega_0 (1 - e^2)^{-3/2} (1 + e \cos \phi)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

をみताす。ここで、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}}$ とおいた。

式 (4.20) を一周期で平均すると、式 (4.21) を用いて、

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P(\phi) dt \\
&= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} P \\
&= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\omega_0(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}(1+e\cos\phi)^2} \frac{8 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{15 c^5 a^5 (1-e^2)^5} (1+e\cos\phi)^4 [12(1+e\cos\phi)^2 + e^2 \sin^2\phi] \\
&= \frac{8 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{15 c^5 a^5 (1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (1+e\cos\phi)^2 [12(1+e\cos\phi)^2 + e^2 \sin^2\phi] \\
&= \frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^5 (1-e^2)^{\frac{7}{2}}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

となる。これは連星系のエネルギー E の時間変化と大きさが等しく、符号は逆である。したがって、連星系のエネルギー E の時間変化は、

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \tag{4.23}$$

となる。また、Peters (1964) は同様にして連星系の角運動量の時間変化を、

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\frac{32 G^{7/2} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)^{1/2}}{5 c^5 a^{7/2} (1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right) \tag{4.24}$$

と求めている。ここで、連星系のエネルギーと角運動量は、

$$\begin{aligned}
a &= -G \frac{m_1 m_2}{2E} \\
L^2 &= G \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} a (1-e^2)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

をみたす (Appendix.A.1 を参照)。式 (4.23)~式 (4.25) を用いて軌道長軸半径 a の時間変化を求めると、

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle &= -G \frac{m_1 m_2}{2} \times \left(-\frac{1}{E^2} \right) \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle \\
&= G \frac{m_1 m_2}{2} \times \left(\frac{2a}{G m_1 m_2} \right)^2 \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle \\
&= -\frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

となる。同様に軌道離心率の時間変化を求めると、

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2ae} \left[(1-e^2) \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle - 2 \sqrt{a(1-e^2) \frac{m_1+m_2}{Gm_1^2m_2^2}} \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle \right] \\
&= -\frac{32}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4} \frac{1}{e(1-e^2)^{5/2}} \left[\left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) - (1-e^2) \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right) \right] \\
&= -\frac{32}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4} \frac{1}{e(1-e^2)^{5/2}} \frac{76}{24} e^2 \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right) \\
&= -\frac{304}{15} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 a^4 (1-e^2)^{5/2}} e \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

となる。したがって、式(4.26)と式(4.27)より、2体が合体に至るまでの連星の軌道長軸半径と軌道離心率の関係を求めることができ、

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{da}{de} \right\rangle &= \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle / \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle \\
&= \frac{12}{19} \frac{a}{e} \frac{\left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right)}{(1-e^2) \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

となる。これより、軌道長軸半径 a を軌道離心率 e の関数として表すことができる。式(4.28)を変数分離をして辺々積分すると、

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a} = \int_{e_0}^e \frac{12}{19} \frac{de}{e} \frac{\left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right)}{(1-e^2) \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right)} \tag{4.29}$$

より、

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{a}{a_0} \right) &= \left[-\ln(1-e^2) + \frac{12 \ln(e)}{19} + \frac{870 \ln(121e^2 + 304)}{2299} \right]_{e_0}^e \\
&= \left[\ln \left(\frac{304 e^{12/19} \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]^{870/2299}}{(1-e^2)} \right) \right]_{e_0}^e \\
&= \ln \left[\left(\frac{e^{12/19} \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]^{870/2299}}{(1-e^2)} \right) / \left(\frac{e_0^{12/19} \left[1 + \frac{121}{304} e_0^2 \right]^{870/2299}}{(1-e_0^2)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

となる。ここで、軌道長軸半径の初期値を a_0 、軌道離心率の初期値を e_0 とした。したがって、軌道長軸半径 a を軌道離心率 e の関数として表すと、

$$a(e) = \frac{c_0 e^{12/19}}{(1-e^2)} \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]^{870/2299} \tag{4.31}$$

と求められる。ここで、

$$c_0 = \frac{a_0 (1-e_0^2)}{e_0^{12/19} \left[1 + \frac{121}{304} e_0^2 \right]^{870/2299}} \tag{4.32}$$

とおいた。式 (4.31) を式 (4.27) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= -\frac{304 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{15 c^5 (1 - e^2)^{5/2}} e \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right) \times \frac{1}{a^4} \\
 &= -\frac{19}{12} \frac{\beta}{c_0^4 (1 - e^2)^{5/2}} e \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right) \times \frac{(1 - e^2)^4}{c_0^4 e^{48/19}} \left[1 + \frac{121}{304} e^2 \right]^{-3480/2299} \\
 &= -\frac{19}{12} \frac{\beta}{c_0^4} \frac{e^{-29/19} (1 - e^2)^{3/2}}{[1 + (121/304)e^2]^{1181/2299}}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

が得られる。ここで、

$$\beta = \frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5} \tag{4.34}$$

とおいた。したがって、この連星系の重力波放出による合体時間 $T(a_0, e_0)$ は、式 (4.33) を用いて、

$$\begin{aligned}
 T(a_0, e_0) &= \int_0^{e_0} \frac{de}{\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle} \\
 &= \frac{12}{19} \frac{c_0^4}{\beta} \int_0^{e_0} de \frac{e^{29/19} [1 + (121/304)e^2]^{1181/2299}}{(1 - e^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

と求められる。これは、 e_0 が十分小さいとき、

$$T(a_0, e_0) \approx \frac{c_0^4}{4\beta} e_0^{48/19} \tag{4.36}$$

となり、 e_0 が 1 に近いときには

$$T(a_0, e_0) \approx \frac{768}{425} \frac{a_0^4}{4\beta} (1 - e_0^2)^{7/2} \tag{4.37}$$

と近似できる。

Chapter 5

球状星団中の階層的3体系

本研究では、宇宙に多数存在すると考えられる球状星団中心の中間質量ブラックホールとその周辺の恒星質量ブラックホール連星から成る階層的3体系に着目する。本章では、まず、5.1節～5.3節で本研究に重要となる先行研究の内容を述べる。次に、5.4節で本研究の手法を、5.5.1節、5.5.2節、5.5.3節、5.5.4節で本研究の結果を述べる。最後に、5.6節で本研究の結果についての議論とその結論を述べる。

5.1 Kozai-Lidov 機構による合体

階層的3体系における恒星質量ブラックホール連星 (Inner binary) の KL 機構による合体には2つのタイプがあることが知られている。1つ目のタイプは、One Shot 合体と呼ばれ、KL 振動1周期の間に合体するものである。もう1つのタイプは、Smooth 合体と呼ばれ、KL 振動の周期より長い時間スケールでゆっくりと重力波を放出しながら合体するものである。そのため、Smooth 合体は時には 10^9 yr 以上かけて合体する場合もある。ある階層的3体系の Inner binary である恒星質量ブラックホール連星がどちらの合体にいたるかは、その離心率のとりうる最大値 $e_{\text{in,max}}$ の値によって決まる (Su et al. 2021)。

One Shot 合体では、KL 振動1周期の間に Inner binary から放出される重力波のエネルギーが Inner binary の軌道エネルギーと同等の大きさとなった時に起こる。KL 振動1周期の間に Inner binary から放出される重力波のエネルギーが Inner binary の軌道エネルギーに等しくなる時の Inner binary の離心率を $e_{\text{in,OS}}$ とすると、その値は Su et al. (2021) により、

$$1 - e_{\text{in,os}} \approx 3 \times 10^{-6} \left(\frac{m_1 + m_2}{50M_\odot} \right)^{7/6} \left(\frac{q/(1+q)^2}{1/4} \right)^{1/3} \times \left(\frac{m_3}{30M_\odot} \right)^{-1/3} \left(\frac{a_{\text{out,eff}}}{3600\text{AU}} \right) \left(\frac{a_{\text{in}}}{100\text{AU}} \right)^{-11/6} \quad (5.1)$$

と見積もられている。ここで、 $q = m_2/m_1$ とおき、また、 $a_{\text{out,eff}} = a_{\text{out}} \sqrt{1 - a_{\text{out}}^2}$ とおいた。 $e_{\text{in,max}} > e_{\text{in,OS}}$ となるような系では、One Shot 合体が起こる。

Smooth 合体では、多数の KL 振動の間に少しずつ重力波を放出し、時間をかけて最終的に軌

道エネルギーを失い、合体に至る。ここで、軌道エネルギー（長半径）の時間変化

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d \ln a}{dt} \right\rangle &= -\frac{1}{t_{\text{GW},0}} \left\langle \frac{1 + 73e^2/24 + 37e^4/96}{j^7(e)} \right\rangle \\ &\equiv -\frac{425/96}{t_{\text{GW},0}} \frac{1}{j^6(e_{\text{in,eff}})}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

によって KL 振動の有効最大離心率 $e_{\text{in,eff}}$ を定義する。上式では $j(e) = \sqrt{1 - e^2}$ とおいた。また、 $t_{\text{GW},0}$ は長軸半径 a_{in} 離心率 0 の連星が合体するまでの時間であり、

$$t_{\text{GW},0}^{-1} = \frac{64 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a_{\text{in}}^4} \quad (5.3)$$

と見積もられている (Peters 1964)。このとき、ちょうど宇宙年齢に相当する Hubble 時間で合体に至る場合 (すなわち式 (5.2) において $\langle \frac{d \ln a}{dt} \rangle = -(10 \text{ Gyr})^{-1}$ である場合) の有効最大離心率を $e_{\text{in,eff,c}}$ とすると、その値は Su et al. (2021) により、

$$1 - e_{\text{in,eff,c}} \approx 10^{-4} \left(\frac{m_1 + m_2}{50 M_{\odot}} \right) \left(\frac{q/(1+q)^2}{1/4} \right)^{1/3} \left(\frac{a_{\text{in}}}{100 \text{ AU}} \right)^{-4/3} \quad (5.4)$$

と見積もられている。 $e_{\text{in,eff}} > e_{\text{in,eff,c}}$ となるような系では、Smooth 合体が起こる。

One Shot 合体の例を図 5.1 に、Smooth 合体の例を図 5.2 に示す。これらの結果は本研究で用いた摂動計算コード OKINAMI (Secular コード, 5.4.1 節を参照) によるシミュレーションで得られたものである。どちらの図でも、上段に Inner binary の離心率の時間進化を、中段に相互 Inclination の時間進化を、下段に Inner binary の長軸半径の時間進化を示している。また、中段における黒点線は 90° を表す。図 5.1 では、One Shot 合体の場合は合体の直前まで長軸半径 a_{in} の値が変化していないため、合体時に Inner binary の離心率 e_{in} が急激に大きくなり、重力波を一気に放出して短時間の間に合体することがわかる。一方図 5.2 では、Smooth 合体の場合は、KL 振動によって Inner binary の離心率 e_{in} が極大値をとるたびに長軸半径 a_{in} が小さくなっており、少しずつ重力波を放出していることがわかる。さらに、図 5.2 の系の場合には、合体時間が 9.0×10^7 年程度となっており、Smooth 合体は非常に長時間かけて起こることがあるということを示している。

このように Smooth 合体では、時には 10^8 年程度もかけてゆっくり合体することがあるが、直接 N 体計算コードを用いて 10^8 や 10^9 年以上のシミュレーションを行うことは様々な技術的問題により、一般的に困難である。

5.2 初期条件による Inner binary の最大離心率の違い

3.3.1 節で述べたように、Inner binary の Arguments of periaapse g_{in} のとりうる値による力学的挙動には、Libration と Rotation の 2 種類がある。Libration とは、 g_{in} がある固定点付近の値しかとらない場合であり、このとき Inner binary の近点は軌道平面上のある地点と中心に振動する。Rotation とは、 g_{in} が $0 \sim 2\pi$ の全ての値をとる場合であり、このとき Inner binary の近点は軌道平面上でぐるぐると回転する。TPQ 近似のもとでは、この 2 つの状態の境界は Libration constant C_{KL} (式 (3.90)) で表され、 $C_{\text{KL}} < 0$ のときは Libration、 $C_{\text{KL}} > 0$ のときは Rotation である (Antognini 2015)。本節では、Inner binary の Arguments of periaapse と相互 Inclination の初期値による Inner binary の離心率の最大値の違いについて述べる。

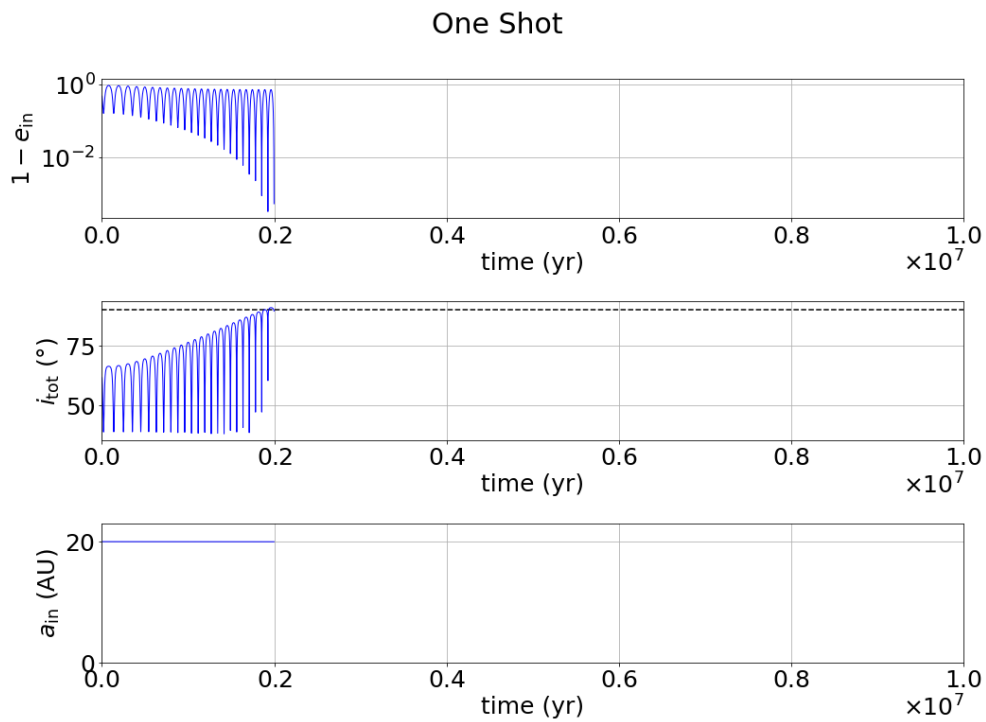


図 5.1: One Shot 合体の例: 上段に Inner binary の離心率の時間進化を、中段に相互 Inclination の時間進化を、下段に Inner binary の長軸半径の時間進化を示す。中段における黒点線は 90° を表す。この系の初期条件は、 $i_{\text{tot},0} = 62^\circ$, $e_{\text{in},0} = 0.5$, $e_{\text{out},0} = 0.5$, $a_{\text{in},0} = 20 \text{ AU}$, $a_{\text{out},0} = 500 \text{ AU}$, $m_1 = 78 M_\odot$, $m_2 = 8 M_\odot$, $m_3 = 50 M_\odot$ とした。この合体では、Inner binary の長軸半径 (下段) は合体直前まで変化しておらず、合体時の Inner binary の離心率の急激な増幅により短時間に重力波を放出して合体していることがわかる。この結果は本研究で用いた摂動計算コード OKINAMI (Secular コード, 5.4.1 節を参照) によるシミュレーションで得られた。

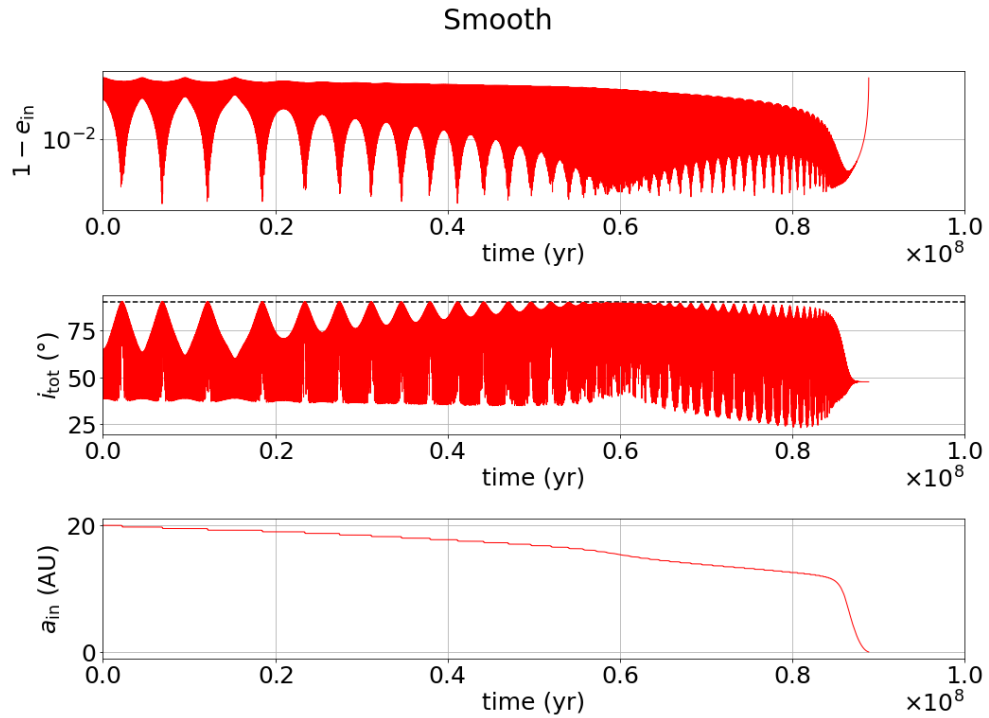


図 5.2: Smooth 合体の例: 上段に Inner binary の離心率の時間進化を、中段に相互 Inclination の時間進化を、下段に Inner binary の長軸半径の時間進化を示す。中段における黒点線は 90° を表す。この系の初期条件は、 $i_{tot,0} = 61^\circ$, $e_{in,0} = 0.5$, $e_{out,0} = 0.5$, $a_{in,0} = 20$ AU, $a_{out,0} = 500$ AU, $m_1 = 78 M_\odot$, $m_2 = 8 M_\odot$, $m_3 = 50 M_\odot$ とした。この合体では、Inner binary の長軸半径 (下段) が KL 振動によって Inner binary の離心率 e_{in} が極大値をとる度に小さくなっており、その際に少しずつ重力波を放出していることがわかる。この系では、合体時間が 9.0×10^7 年程度となっており、Smooth 合体では少しずつ重力波を放出することで非常に長い時間をかけて合体することがあることを示している。この結果は本研究で用いた摂動計算コード OKINAMI (Secular コード, 5.4.1 節を参照) によるシミュレーションで得られた。

5.2.1 Quadrupole レベルの場合: 先行研究 Hamers (2021)

まず、Quadrupole レベルでの、Inner binary の Arguments of periaapse と相互 Inclination の初期値による Inner binary の離心率の最大値の違いについて述べる。

Hamers (2021) は Libration constant C_{KL} (式 (3.90)) を Test particle limit を外した場合に拡張し、より厳密な Libration constant

$$\begin{aligned} C_{\text{KL},\gamma} &\equiv \frac{1}{12} \left[2 - \hat{\mathcal{H}}_q - 6(\Theta - \gamma)^2 \right] \\ &= e_{\text{in},0}^2 \left[1 - \frac{1}{2} e_{\text{in},0}^2 \gamma^2 + \sqrt{1 - e_{\text{in},0}^2} \gamma \cos i_{\text{tot},0} - \frac{5}{2} (1 - \cos i_{\text{tot},0}^2) \sin^2(g_{\text{in},0}) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

を得た。 C_{KL} と同様、 $C_{\text{KL},\gamma} < 0$ のときは Libration、 $C_{\text{KL},\gamma} > 0$ のときは Rotation である。ここで、

$$\Theta \equiv \Theta_0 + \gamma (1 - e_{\text{in},0}^2) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e_{\text{out}}^2}} \frac{L_{\text{in}}}{L_{\text{out}}} = \frac{1}{2} \frac{L_{\text{in}}}{G_{\text{out}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e_{\text{out}}^2}} \left(\frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}} \right)^{1/2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) m_3} \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.7)$$

と定義した。なお、全角運動量保存則 (式 (3.84)) より、Quadrupole レベル ($e_{\text{out}} = \text{constant}$) では、

$$\cos i_{\text{tot}} = \frac{\Theta - \gamma (1 - e_{\text{in}}^2)}{\sqrt{1 - e_{\text{in}}^2}} \quad (5.8)$$

が常に成立している。

Libration と Rotation を理解するためには、Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{\text{in}}$ の時間進化を考えると良い。TPQ 近似の場合には、エネルギー保存から

$$\cos 2g_{\text{in}} = \frac{-\hat{\mathcal{H}}_q - (2 + 3e_{\text{in}}^2) (3 \cos i_{\text{tot}}^2 - 1)}{15e_{\text{in}}^2 (1 - \cos i_{\text{tot}}^2)} \quad (5.9)$$

となる。図 5.3 に TPQ 近似のもとでの Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{\text{in}}$ の取りうる値の数例を示す (Hamers 2021)。図 5.3 では、Inner binary の Arguments of periaapse g_{in} を単に g 、離心率 e_{in} を単に e と表している。異なる色は初期相互 Inclination $i_{\text{tot},0}$ の値の違いを示しており、実線は Arguments of periaapse の初期値 $g_{\text{in},0}$ を 0 とした場合、点線は Arguments of periaapse の初期値 $g_{\text{in},0}$ を $\pi/2$ とした場合を表す。いずれの系でも、Inner binary の離心率の初期値 $e_{\text{in},0}$ は 0.5 である。

図 5.3 において、 $g_{\text{in},0} = 0$ とした場合 (実線) は、相互 Inclination がどの初期値であっても、Rotation ($\cos(g)$ が全ての値をとる) であり、さらに Inner binary の離心率 e_{in} は $\cos(g) = 0$ で最大値をとる。 $g_{\text{in}} = \pi/2$ とした場合 (点線) は、相互 Inclination の初期値が 90° に近づくほど Inner binary の離心率 e_{in} の最大値が大きくなる。この場合は $g_{\text{in},0} = 0$ とした場合とは違い、初期相互 Inclination が 40° より大きい場合は Libration、小さい場合は Rotation となっている。いずれの

場合でも、Inner binary の離心率 e_{in} が最大値をとるのは、 $\cos(g) = 0$ の時であるが、 $g_{in,0} = 0$ の場合 (実線) はどの初期相互 Inclination でも Inner binary の離心率の最大値が初期値よりも大きい ($e_{in,max} > e_{in,0}$) のに対し、 $g_{in,0} = \pi/2$ の場合 (点線) は、初期相互 Inclination が 90° に遠い場合には Inner binary の離心率の最大値が初期値を超えることができない。すなわち、Inner binary の離心率が初期値を超えて大きな値をとることができるのは、 $g_{in,0} = 0$ の場合と $g_{in,0} = \pi/2$ の場合かつ相互 Inclination の初期値が 90° に十分近い場合のみである。

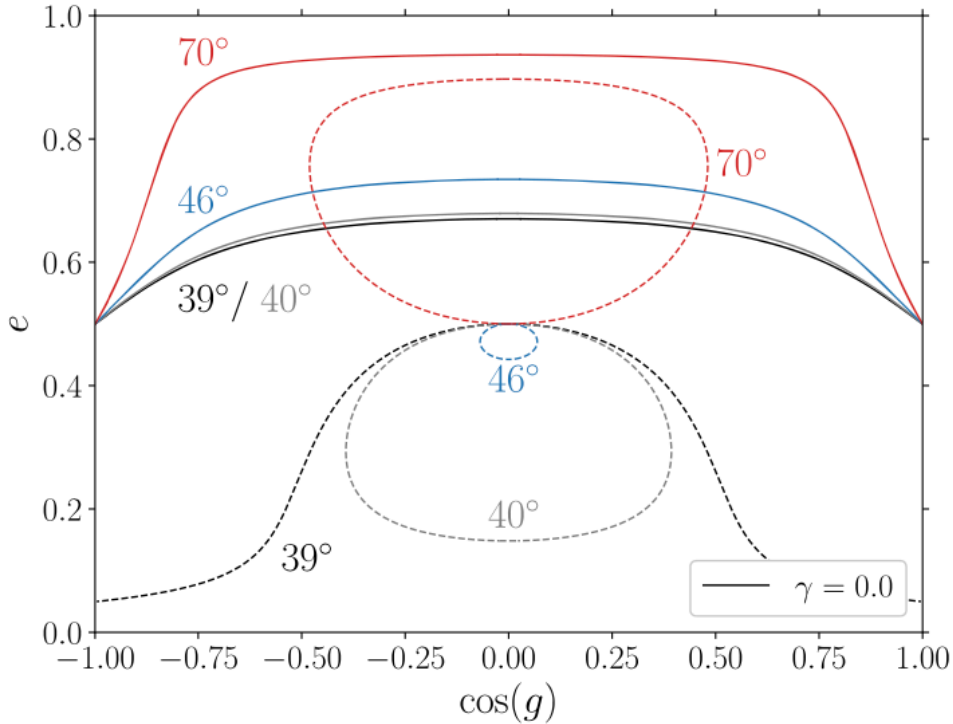


図 5.3: TPQ 近似のもとで Inner binary の離心率 e_{in} (縦軸) と $\cos g_{in}$ (横軸) の取りうる値の例 (Hamers 2021 の Figure 1 を引用): この図では、Inner binary の Arguments of periastron g_{in} を単に g 、離心率 e_{in} を単に e と表している。異なる色は初期相互 Inclination $i_{tot,0}$ の値の違いを示す。実線は Arguments of periastron の初期値 $g_{in,0}$ を 0 とした場合、点線は Arguments of periastron の初期値 $g_{in,0}$ を $\pi/2$ とした場合を表す。いずれの系でも、Inner binary の離心率の初期値 $e_{in,0}$ は 0.5 である。 $g_{in,0} = 0$ とした場合は、相互 Inclination がどの初期値であっても Rotation である。 $g_{in} = \pi/2$ とした場合は、相互 Inclination の初期値が 90° に近づくほど Inner binary の離心率 e_{in} の最大値が大きくなる。この場合は $g_{in,0} = 0$ とした場合は違い、初期相互 Inclination が 40° より大きい場合は Libration、小さい場合は Rotation となっている。いずれの場合でも、Inner binary の離心率 e_{in} が最大値をとるのは、 $\cos(g) = 0$ の時であるが、Inner binary の離心率が初期値を超えて大きな値をとることができるのは、 $g_{in,0} = 0$ の場合と $g_{in,0} = \pi/2$ の場合かつ相互 Inclination の初期値が 90° に十分近い場合のみである。

次に、図 5.4 に Test particle 近似を外した場合の Quadrupole 近似の Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{in}$ の取りうる値の数例を示す (Hamers 2021)。図 5.4 では、Inner binary の Arguments of periastron g_{in} を単に g 、離心率 e_{in} を単に e と表している。線の太さは γ の値の違いを表す。 γ の

値が変化することによって図 5.3 で見られた傾向が大きく変化することはないが、 γ の値によって Inner binary の離心率の最大値や、 $g_{in,0} = \pi/2$ の場合 (点線) において Libration と Rotation を遷移する初期相互 Inclination の境界値が変化していることがわかる。初期相互 Inclination が 90° を超えない場合 (Prograde, 図 5.4 の上段) は、 γ の値が大きくなるにつれて Inner binary の離心率の変化幅が小さくなっている。すなわち、Inner binary の離心率の最大値が初期値よりも大きい場合は最大値が小さくなり、初期値を超えない場合は最小値が大きくなっている。一方、初期相互 Inclination が 90° を超える場合 (Retrograde, 図 5.4 の下段) は、 γ の値が大きくなるにつれて Inner binary の離心率の変化幅が大きくなっている。すなわち、Inner binary の離心率の最大値が初期値よりも大きい場合は最大値が大きくなり、初期値を超えない場合は最小値が小さくなっている。これに伴って、Inner binary の離心率の最大値が初期値を超えない場合において、Libration と Rotation を遷移する初期相互 Inclination の境界値が変化していることがわかる (図 5.4 の上図の点線 40° をみると、 $\gamma = 0$ の場合は Libration であるが、 $\gamma = 0.1, 0.2$ の場合は Rotation であることがわかる)。すなわち、 $g_{in,0} = \pi/2$ の場合と同じ初期相互 Inclination を固定した場合、 γ がある値 γ_{crit} を超えると、系が Libration と Rotation を遷移することがわかる。この値 γ_{crit} は Hamers (2021) によって、

$$\gamma_{crit} = \frac{1}{e_{in,0}^2} \left[\sqrt{1 - e_{in,0}^2} + \sqrt{\cos i_{tot,0}^2 + e_{in,0}^2 \left(2 - 5 \sin^2 g_{in,0} - \cos i_{tot,0}^2 + 5 \cos i_{tot,0}^2 \sin^2 g_{in,0} \right)} \right] \quad (5.10)$$

と見積もられている。

以上のように、Inner binary の Arguments of periaapse と相互 Inclination の初期値によって定められる Inner binary の運動状態 (Libration と Rotation) によって、Inner binary の離心率の取りうる値は大きく異なる。さらに、Test particle 近似が外れた場合、すなわち γ が大きいとき、これらの 2 状態を遷移する相互 Inclination の初期値が変化する。

5.2.2 Octupole 項による影響の考察

5.2.1 節では、Inner binary の Arguments of periaapse と相互 Inclination の初期値による Inner binary の離心率の取りうる値について Quadrupole レベルの場合における先行研究 (Hamers 2021) について述べた。一方、Octupole レベルの場合の研究はこれまで行われていなかった。そこで本節では、本研究における議論の準備として、Inner binary の Arguments of periaapse と相互 Inclination の初期値による Inner binary の離心率の取りうる値について、Octupole 項の影響を議論する。ここでは、摂動計算コード OKINAMI (Secular コード, 5.4.1 節を参照) を用いて、 3.0×10^7 年までシミュレーションを行った。その時間進化の様子について Quadrupole レベルの場合と Octupole レベルの場合の違いについて議論する。なお、この計算は一般相対論の効果を含まない。

図 5.5 と図 5.6 に Test particle 近似のもとでの Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{in}$ の取りうる値への Octupole 項の影響の例を示す。青線が TPQ 近似の場合 ($e_{out,0} = 0$)、赤線が TPO 近似の場合 ($e_{out,0} = 0.5$) を示している。初期条件は $e_{in,0} = 0.5$, $a_{in} = 1$ AU, $a_{out} = 30$ AU, $g_{out,0} = 0^\circ$, $m_1 = m_3 = 1 M_\odot$, $m_2 = 0.001 M_\odot$ とし、図 5.5 では $g_{in,0} = 0^\circ$ 、図 5.6 は $g_{in,0} = 90^\circ$ とした。

図 5.5 では、左図、右図ともに $g_{in,0} = 0^\circ$ であり、Rotation 状態である。いずれの場合も、Octupole 振動によって、Inner binary の離心率の取りうる値に幅が生じていることがわかる。相互

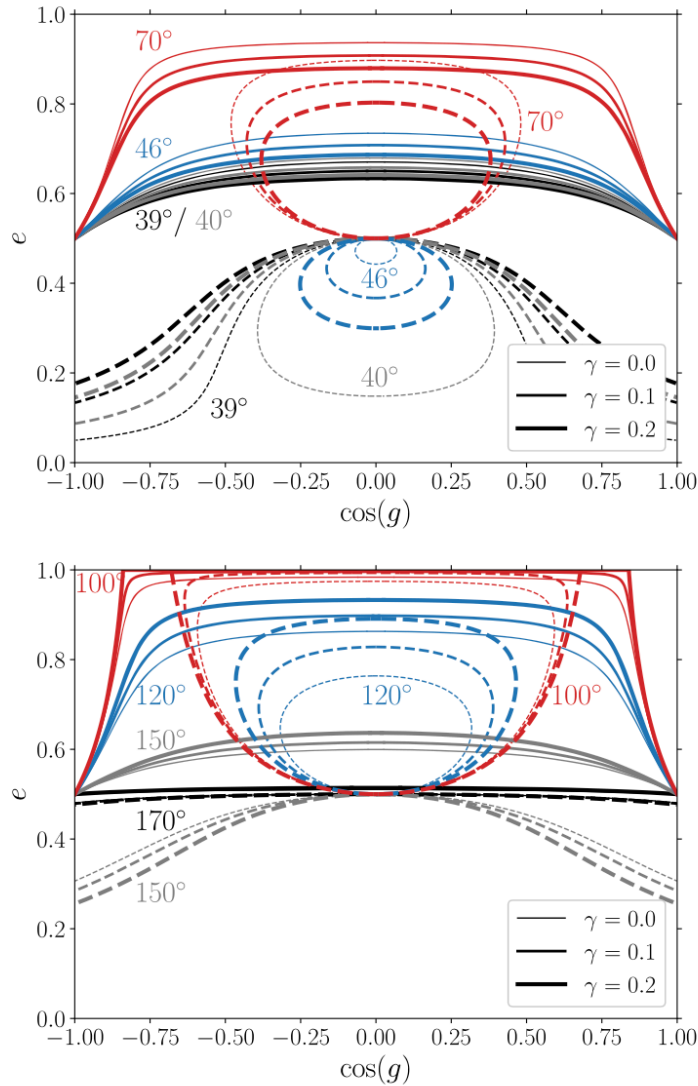


図 5.4: Test particle 近似を外した場合の Quadrupole レベルの Inner binary の離心率 e_{in} (縦軸) と $\cos g_{in}$ (横軸) の取りうる値の例 (Hamers 2021 の Figure 2 を引用): この図では、Inner binary の Arguments of periastron g_{in} を単に g 、離心率 e_{in} を単に e と表している。異なる色は初期相互 Inclination $i_{tot,0}$ の値の違いを示す。実線は Arguments of periastron の初期値 $g_{in,0}$ を 0 とした場合、点線は Arguments of periastron の初期値 $g_{in,0}$ を $\pi/2$ とした場合を表す。いずれの系でも、Inner binary の離心率の初期値 $e_{in,0}$ は 0.5 である。また、線の太さは γ の値の違いを表す。 γ の値が変化することによって図 5.3 で見られた傾向が大きく変化することはないが、 γ の値によって Inner binary の離心率の最大値が変化していることがわかる。初期相互 Inclination が 90° を超えない場合 (Prograde) は、 γ の値が大きくなるにつれて Inner binary の離心率の初期値と最大値の違いが小さくなっている。初期相互 Inclination が 90° を超える場合 (Retrograde) は、 γ の値が大きくなるにつれて Inner binary の離心率の初期値と最大値の違いが大きくなっている。また、上図の点線 40° において、 $\gamma = 0$ の場合は Libration であるが、 $\gamma = 0.1, 0.2$ の場合は Rotation であり、 γ の値によって $g_{in,0} = \pi/2$ の場合で Libration と Rotation を遷移する初期相互 Inclination の境界値が変化していることがわかる。 γ の値によって状態が変化する場合には、上記で述べた Inner binary の離心率の初期値と最大値の違いの傾向は成り立たない。

Inclination の初期値 $i_{\text{tot},0}$ が 39° の場合 (左図) には Octupole 振動の影響によって Inner binary の離心率の最大値が大きくなっていることがわかる。一方、 $i_{\text{tot},0}$ が 100° の場合 (右図) には Octupole 振動の影響により Inner binary の離心率の最大値は変化しないことがわかる。相互 Inclination の初期値の初期値を $i_{\text{tot},0} = 39^\circ, 40^\circ, 46^\circ, 70^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 170^\circ$ と変化させたところ、 $i_{\text{tot},0}$ が 90° に近くなると、Octupole 振動による Inner binary の離心率の最大値の変化は起こらないことが明らかとなった。

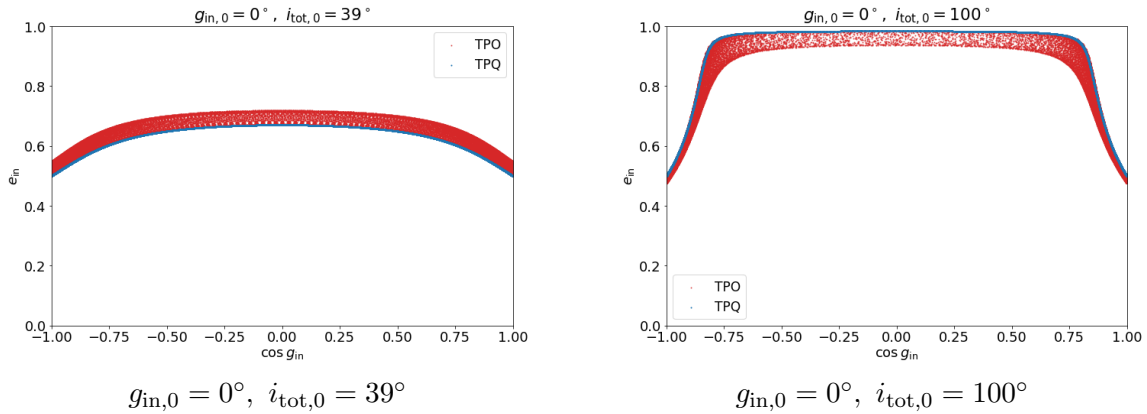


図 5.5: Test particle 近似のもとでの Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{\text{in}}$ の取りうる値への Octupole 項の影響の例: 青線が TPQ 近似の場合 ($e_{\text{out},0} = 0$)、赤線が TPO 近似の場合 ($e_{\text{out},0} = 0.5$) を示す。初期条件は $e_{\text{in},0} = 0.5$, $a_{\text{in}} = 1 \text{ AU}$, $a_{\text{out}} = 30 \text{ AU}$, $g_{\text{out},0} = 0^\circ$, $m_1 = m_3 = 1 M_\odot$, $m_2 = 0.001 M_\odot$ とした。左図、右図ともに $g_{\text{in},0} = 0^\circ$ であり、Rotation 状態である。いずれの場合も、Octupole 振動によって、Inner binary の離心率の取りうる値に幅が生じていることがわかる。相互 Inclination の初期値 $i_{\text{tot},0}$ が 39° の場合 (左図) には Octupole 振動の影響によって Inner binary の離心率の最大値が大きくなっていることがわかる。一方、 $i_{\text{tot},0}$ が 100° の場合 (右図) には Octupole 振動の影響により Inner binary の離心率の最大値は変化しないことがわかる。相互 Inclination の初期値が 90° に近くなると、Octupole 振動によって Inner binary の離心率の最大値は変化しないことが明らかとなった。

図 5.6 では、 $i_{\text{tot},0} = 40^\circ$ の場合 (左図) と $i_{\text{tot},0} = 100^\circ$ の場合 (真ん中の図) は Libration 状態、 $i_{\text{tot},0} = 150^\circ$ の場合 (右図) は Rotation 状態であった。図 5.5 と同様、いずれの場合も Octupole 振動によって、Inner binary の離心率の取りうる値に TPQ 近似の場合の値まわりに幅が生じていることがわかる。 $i_{\text{tot},0} = 40^\circ$ の場合 (左図) と $i_{\text{tot},0} = 100^\circ$ の場合 (真ん中の図) では TPQ 近似と TPQ 近似で Inner binary の最大離心率が一致しており、Libration 状態の場合には、Octupole 振動によって Inner binary の離心率の最大値は変化しないことが明らかとなった。一方、Rotation 状態の場合は Octupole 振動の影響によって Inner binary の離心率の最大値が大きくなっていることがわかる。

以上より、まず、系が Rotation 状態の場合について、 $g_{\text{in},0} = 0^\circ$ の場合には、 $i_{\text{tot},0}$ が 90° に近くなると Octupole 振動によって Inner binary の最大離心率は変化しなくなり、 $i_{\text{tot},0}$ が 90° に近くない場合には Octupole 振動によって Inner binary の最大離心率が変化すること、さらに $g_{\text{in},0} = 90^\circ$ の場合にも Octupole 振動によって Inner binary の最大離心率が変化することが明らかとなった。次に、系が Libration 状態の場合は、いずれの場合も Octupole 振動によって Inner binary の最大

離心率は変化しないことが明らかとなった。

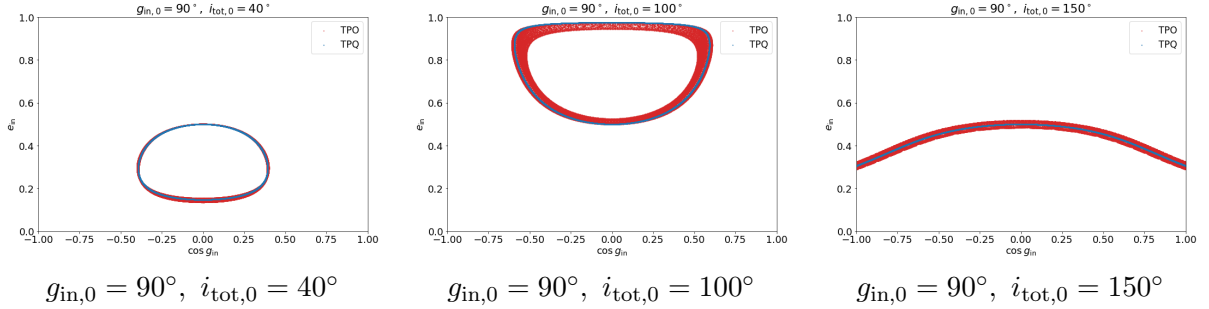


図 5.6: Test particle 近似のもとでの Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{in}$ の取りうる値への Octupole 項の影響の例: 青線が TPQ 近似の場合 ($e_{out,0} = 0$), 赤線が TPO 近似の場合 ($e_{out,0} = 0.5$) を示す。初期条件は $e_{in,0} = 0.5$, $a_{in} = 1$ AU, $a_{out} = 30$ AU, $g_{out,0} = 0^\circ$, $m_1 = m_3 = 1 M_\odot$, $m_2 = 0.001 M_\odot$ とした。 $i_{tot,0} = 40^\circ$ の場合 (左図) と $i_{tot,0} = 100^\circ$ の場合 (真ん中の図) は Libration 状態、 $i_{tot,0} = 150^\circ$ の場合 (右図) は Rotation 状態である。図 5.5 と同様、いずれの場合も Octupole 振動によって、Inner binary の離心率の取りうる値に TPQ 近似の場合の値まわりに幅が生じていることがわかる。また、Libration 状態の場合には、Octupole 振動によって Inner binary の離心率の最大値は変化しないことが明らかとなった。一方、Rotation 状態の場合は Octupole 振動の影響によって Inner binary の離心率の最大値が大きくなっていることがわかる。

なお、Test particle 近似を外した場合の影響は Hamers (2021) と同様の結果が得られた。図 5.7 に Test particle 近似を外した場合の Octupole レベルの Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{in}$ の取りうる値の例を示す。図 5.4 の場合と同様、初期相互 Inclination が 90° を超えない場合 (Prograde) には γ の値が大きくなると Inner binary の離心率の初期値と最大値の違いが小さくなっていることがわかる。初期相互 Inclination が 90° を超える場合 (Retrograde) は、 γ の値が大きくなるにつれて Inner binary の離心率の初期値と最大値の違いが小さくなっていることがわかる。さらに、図 5.4 と同様、 γ の値によって状態が変化する場合 (左上図) には、この傾向は成り立たないことが確認できた。

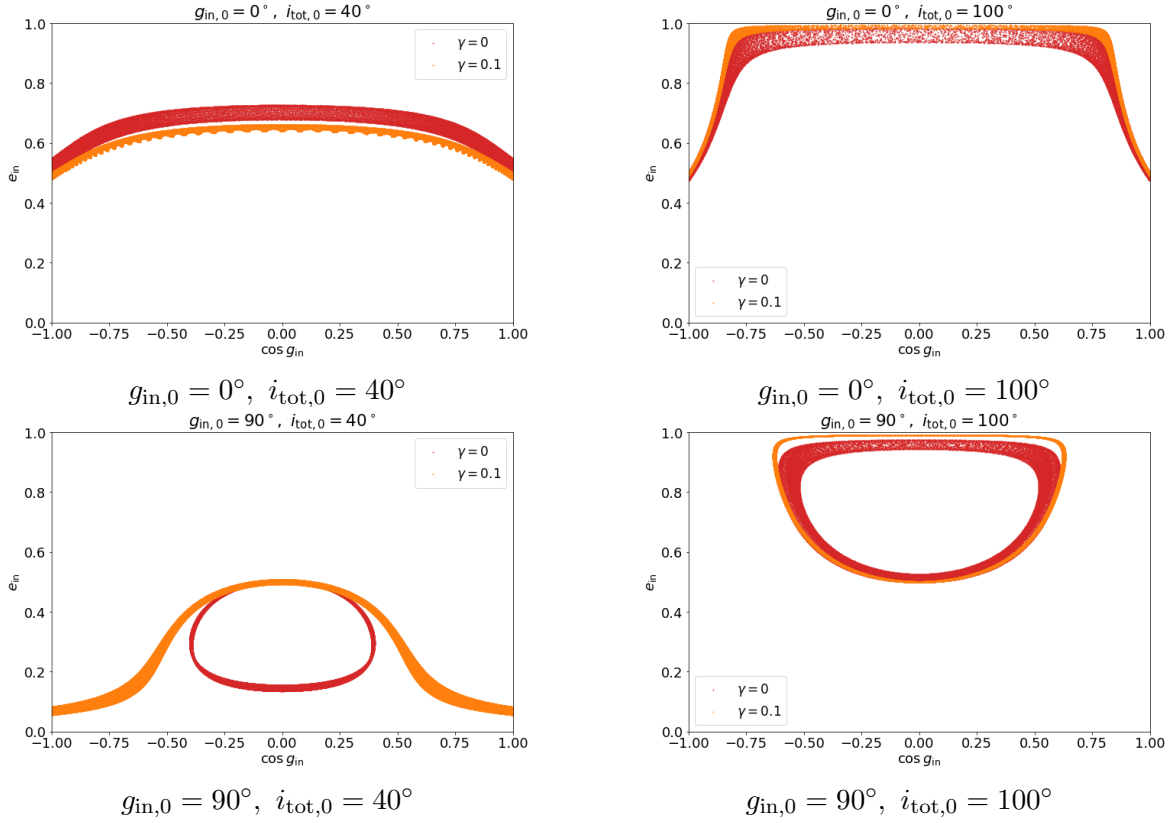


図 5.7: Test particle 近似を外した場合の Octupole レベルの Inner binary の離心率 e_{in} と $\cos g_{\text{in}}$ の取りうる値の例: 赤線が TPO 近似の場合 ($\gamma = 0$, $m_2 = 0.001 M_{\odot}$)、赤線が Test particle 近似を外した場合 ($\gamma = 0.1$, $m_2 = 2 M_{\odot}$) を示す。初期条件は $e_{\text{in},0} = 0.5$, $a_{\text{in}} = 1 \text{ AU}$, $a_{\text{out}} = 30 \text{ AU}$, $g_{\text{out},0} = 0^{\circ}$, $m_1 = m_3 = 1 M_{\odot}$ とした。図 5.4 の場合と同様、図 5.4 の場合と同様、初期相互 Inclination が 90° を超えない場合 (Prograde) には γ の値が大きくなると Inner binary の離心率の初期値と最大値の違いが小さくなっていることがわかる。初期相互 Inclination が 90° を超える場合 (Retrograde) は、 γ の値が大きくなるにつれて Inner binary の離心率の初期値と最大値の違いが小さくなっていることがわかる。さらに、図 5.4 と同様、 γ の値によって状態が変化する場合 (左上図) には、この傾向は成り立たない。

5.3 短周期の摂動による影響

3.2.1 節で述べたように、階層的 3 体系の階層構造が緩い場合には、3 体目の位置による影響が大きくなり、Outer binary の軌道周期で平均化した Double average と、Outer binary の軌道周期で平均化しない Single average の場合で系の進化が大きく異なることがある。これは、Double average 手法では、Secular 時間 (式 [3.99], Antognini 2015) より短い摂動を捉えることができないためである (Mangipudi et al. 2022)。特にこのような場合では、Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ の値や、Inner binary の 2 体が合体に至るほど大きな離心率をとることのできる初期相互 Inclination の値の範囲が変化する。Grishin et al. (2018) は TPQ 近似のもとでの Single average の場合の Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ を、Mangipudi et al. (2022) は Test particle 近似を外した Quadrupole 近似での Single average の場合の Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ を同様の手法によって求めた。以下では、Test particle 近似を外した場合、かつ Quadrupole 近

似の Single average の場合の Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ の値と Inner binary の 2 体が合体に至るほど大きな離心率をとることのできる初期相互 Inclination の値の範囲について述べる (Mangipudi et al. 2022)。

Luo et al. (2016) は、3 体目の位置変化による効果が大きくなり、Double average と Single average の進化に違いがでてくる場合、その効果の大きさを見積もるパラメータとして、

$$\epsilon_{\text{SA}} = \frac{P_{\text{out}}}{2\pi\tau_{\text{sec}}} = \left(\frac{a_{\text{in}}}{a_{\text{out}}(1 - e_{\text{out}}^2)} \right)^{3/2} \left(\frac{m_3^2}{(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 + m_2)} \right)^{1/2} \quad (5.11)$$

を定義した。ここで、 τ_{sec} は Secular 時間 (式 (3.99)) である。さらに、Double average の Potential と Single average とした場合の Potential の差、すなわち Single average でのみ現れる力学挙動を表す Potential

$$\Phi_{\text{SA}}(j_{\text{in,z}}, e_z, e_{\text{in}}) = -\epsilon_{\text{SA}} \Phi_0 \frac{27}{64} j_{\text{in,z}} \left[\frac{1 - j_{\text{in,z}}^2}{3} + 8e_{\text{in}}^2 - 5e_z^2 \right] \quad (5.12)$$

を明らかにした。ここで、 $j_{\text{in,z}} = j_{\text{in}} \cos i_{\text{tot}} = \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}}$, $e_z = e_{\text{in}} \sin g_{\text{in}} \sin i_{\text{tot}}$ であり、

$$\Phi_0 = \frac{Gm_3m_1m_2a_{\text{in}}^2}{(m_1 + m_2)a_{\text{out}}^3(1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2}} \quad (5.13)$$

とおいた。なお、この Potential を取り入れて導かれた軌道進化は、Nbody コードの結果と一致することが示されている (Luo et al. 2016)。

以上より、Single average の場合に一般相対論の効果を取り入れた Quadrupole 近似の Potential は、

$$\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{Quad}} + \Phi_{\text{SA}} + \Phi_{\text{GR}} \quad (5.14)$$

となる。ここで、 Φ_{Quad} は Quadrupole 近似の Potential を表し、3 章の Hamiltonian (式 (3.40)) より、

$$\Phi_{\text{Quad}} = \frac{-\Phi_0}{8} \left[2 + 3e_{\text{in}}^2 - 3(1 - e_{\text{in}}^2 + 5e_{\text{in}}^2 \sin^2 g_{\text{in}}) \sin^2 i_{\text{tot}} \right] \quad (5.15)$$

である。また、 Φ_{GR} は一般相対論の効果を表す Potential であり、ここでは、最低次 1pN のみを考える。このとき、一般相対論の効果を表す Potential は、

$$\Phi_{\text{GR}} = -\epsilon_{\text{GR}} \Phi_0 \frac{1}{(1 - e_{\text{in}}^2)^{1/2}} \quad (5.16)$$

である (e.g. Liu et al. 2015, Liu and Lai 2018)。ここで、 ϵ_{GR} は一般相対論の効果の大きさを評価するパラメータであり、

$$\epsilon_{\text{GR}} = \frac{3(m_1 + m_2)(1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2}}{m_3} \left(\frac{a_{\text{out}}}{a_{\text{in}}} \right)^3 \frac{G(m_1 + m_2)}{c^2 a_{\text{in}}} \quad (5.17)$$

である。 $\epsilon_{\text{GR}} \gg 1$ の場合、KL 振動は一般相対論の近日点移動の効果によって抑制される。

Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ は、エネルギー保存則より、系の初期状態の Potential Φ_{ini} と Inner binary の離心率が最大値を取るときの Potential Φ_{emax} が等しいことより求めることができる。系のパラメータの初期値を下添字 0 で表すと、系の初期状態の Potential Φ_{ini} は、

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{\text{ini}}}{\Phi_0} = & \frac{1}{8} [1 - 6e_{\text{in},0}^2 - 3(1 - e_{\text{in},0}^2) \cos^2 i_{\text{tot},0}] - \epsilon_{\text{GR}} \frac{1}{j_{\text{in},0}} \\ & - \epsilon_{\text{SA}} \frac{27}{64} j_{\text{in},z,0} \left(\frac{1 - j_{\text{in},z,0}^2}{3} + 3e_{\text{in},0}^2 + 5e_{\text{in},0}^2 \cos^2 i_{\text{tot},0} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

となり、Inner binary の離心率が最大値を取るときの Potential Φ_{emax} は、

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{\text{emax}}}{\Phi_0} = & \frac{1}{8} [1 + 9e_{\text{in,max}}^2 - 3j_{\text{in,min}}^2 \cos^2 i_{\text{m}} - 15e_{\text{in,max}}^2 \cos^2 i_{\text{m}}] \\ & - \frac{27\epsilon_{\text{SA}}}{64} j_{\text{in,min}} \cos i_{\text{m}} \left(\frac{1 - j_{\text{in,min}}^2 \cos^2 i_{\text{m}}}{3} + 3e_{\text{in,max}}^2 \right. \\ & \left. + 5e_{\text{in,max}}^2 \cos^2 i_{\text{m}} \right) - \epsilon_{\text{GR}} \frac{1}{j_{\text{in,min}}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

となる。ここで、 $g_{\text{in},0} = 0$ とし、Inner binary の離心率が最大値を取るとき、 $g_{\text{in}} = \pm\pi/2$ とした。また、 i_{m} は Inner binary の離心率が最大値を取るときの相互 Inclination である。

ここで、 $e_{\text{in,max}}$ と独立な変数 i_{m} を消去するために、定数が一つ必要である。Test particle 近似を外した場合、 $j_{\text{in}} = \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2} \cos i_{\text{tot}}$ はもはや定数ではない。しかし、現在 Quadrupole 近似の場合を考えているため、3.4 節の Flip の判定条件 K (式 (3.107))

$$K = \sqrt{1 - e_{\text{in}}^2 \cos^2 i_{\text{tot}}} - \frac{\eta}{2} e_{\text{in}}^2$$

は定数である。従ってこれより、

$$\cos i_{\text{m}} = \frac{1}{j_{\text{in,min}}} \left(K + \frac{e_{\text{in,max}}^2 \eta}{2} \right) \quad (5.20)$$

が得られる。ここで、Inner binary の離心率の初期値が $e_{\text{in}} \ll 1$ を満たすとすると、 $K \sim \cos i_{\text{tot},0}$ である。ここで、Flip の判定条件 K は Double average の場合は Quadrupole 近似で常に定数であるが、Single average の場合はその定数値の周りを振動しており、平均的に定数となっている。これによる Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ への影響は後に議論する。

$e_{\text{in}} \ll 1$ の場合に、式 (5.20) を用いると、 $\Phi_{\text{ini}} = \Phi_{\text{emax}}$ より、

$$\begin{aligned} 0 = & -5\mathcal{G}_{\text{max}}^2 + j_{\text{in,min}}^2 \left(3 - \cos i_0 \eta - \frac{\eta^2}{4} e_{\text{in,max}}^2 \right) \\ & + \frac{3\epsilon_{\text{SA}}}{8} \left[-\frac{j_{\text{in,min}}^2 \cos^3 i_0}{e_{\text{in,max}}^2} - \frac{\eta j_{\text{in,min}}^2}{2} - 9j_{\text{in,min}}^2 \mathcal{G}_{\text{max}} \right. \\ & \left. + \mathcal{G}_{\text{max}}^3 \left(\frac{1}{e_{\text{in,max}}^2} - 16 \right) \right] + \frac{8\epsilon_{\text{GR}} j_{\text{in,min}}}{3e_{\text{in,max}}^2} (j_{\text{in,min}} - 1), \end{aligned} \quad (5.21)$$

が得られる。これによって Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ を定めることができた。ここで、 $\mathcal{G} = \cos i_{\text{tot},0} + \eta e_{\text{in,max}}^2/2$ とおいた。これによって求められた $e_{\text{in,max}}$ は、TPQ かつ Double average の場合は $\sqrt{1 - 5/3 \cos^2 i_{\text{tot},0}}$ となり、3章の結果と一致する。

先に述べたように、Flip の判定条件 K は Single average の場合はその平均値の周りを振動しており、これによって Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ が変化する。この K の振幅は、Haim and Katz (2018) によって、

$$|\Delta K| = (1 + |K|\eta) \Delta j_{\text{in,z}} \quad (5.22)$$

と見積もられている。ここで、 $\Delta j_{\text{in,z}}$ は $j_{\text{in,z}}$ の振動の振幅である。これによる離心率の最大値の変化 δe

$$e_{\text{in,max}} + \delta e = \sqrt{1 - (j_{\text{in,min}} - \delta j)^2} \quad (5.23)$$

を求める。ここで、 δj は K の振動による j_{in} の変化である。今、 $e_{\text{in}} \ll 1$ であるから、

$$\Delta K_2 = (\cos i_m + j\eta) \delta j \quad (5.24)$$

が成り立つ。

ここで、Grishin et al. (2018) や Haim and Katz (2018) により、 $\Delta j_{\text{in,z}}$ は、

$$\Delta j_{\text{in,z}} = \frac{15\epsilon_{\text{SA}}}{8} e_{\text{in,max}}^2 \cos^2 i_m \quad (5.25)$$

と見積もられている。したがって、式 (5.22)、式 (5.24)、式 (5.25) より、 δj を求めることができ、

$$\delta j = \frac{1 + |K_2|\eta}{\sqrt{3/5} + j_{\text{in,min}}\eta} \frac{9}{8} \epsilon_{\text{SA}} e_{\text{in,max}}^2 \equiv \mathcal{C} \epsilon_{\text{SA}} e_{\text{in,max}}^2 \quad (5.26)$$

となる。これと式 (5.23) より、 $\delta e \ll e_{\text{in,max}}$ であるから、

$$\begin{aligned} \delta e &= \frac{j_{\text{in,min}}}{e_{\text{in,max}}} \delta j - \frac{(\delta j)^2}{2e_{\text{in,max}}} \\ &= \mathcal{C} \epsilon_{\text{SA}} e_{\text{in,max}} \left(j_{\text{in,min}} - \frac{e_{\text{in,max}}^2}{2} \mathcal{C} \epsilon_{\text{SA}} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

と K の振動による Inner binary の離心率の最大値の変化 δe を求めることができた。

図 5.8 は上記で求めた、初期相互 Inclination $i_{\text{tot},0}$ に対する Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ である。図 5.8 では初期相互 Inclination $i_{\text{tot},0}$ を単に i_0 、Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ を単に e_{max} と記している。図中の黒線は Double average の場合の Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ を、赤線は Single average の場合の Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}} + \delta e$ を示している。赤線と黒線を比較すると、Single average に現れる短周期摂動の効果の大きさを表すパラメータ ϵ_{SA} (式 (5.11)) の値が大きくなるほど、赤線は黒線よりも大きな離心率を取りうる $i_{\text{tot},0}$ の範囲が広がっていることがわかる。また、緑は Nbody コード (TSUNAMI, 5.4.1 節を参照) でのシミュレーション結果を表しており、これらのうちバツが合体したものを示している。解析

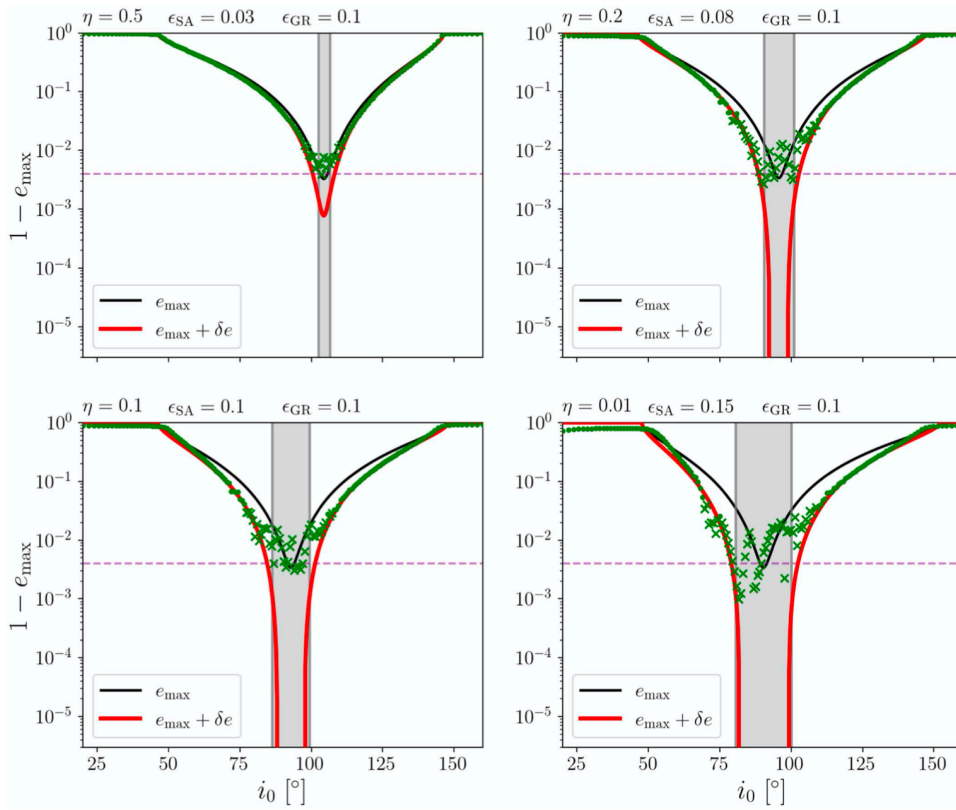


図 5.8: 初期相互 Inclination に対する Inner binary の離心率の最大値 (Mangipudi et al. 2022 の Figure 4 を引用): この図では初期相互 Inclination $i_{\text{tot},0}$ を単に i_0 、Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}}$ を単に e_{max} と記している。黒線は Double average の場合の Inner binary の離心率の最大値 e_{max} を、赤線は Single average の場合の Inner binary の離心率の最大値 $e_{\text{in,max}} + \delta e$ を示している。また、緑は Nbody コード (TSUNAMI, 5.4.1 節を参照) でのシミュレーション結果を表しており、これらのうちバツが合体したものを示している。Single average に現れる短周期摂動の効果の大きさを表すパラメータ ϵ_{SA} (式 (5.11)) の値が大きくなるほど、赤線は黒線よりも大きな離心率を取りうる $i_{\text{tot},0}$ の範囲が広がっていることがわかる。また、全ての例で Nbody シミュレーションは赤線とよく一致していることがわかる。紫の点線は $e_{\text{max}} \approx \sqrt{1 - (8\epsilon_{\text{GR}}/9)^2}$ ($\epsilon_{\text{GR}} \ll 1$) を表す。

的に求められた赤線、黒線と比較すると、黒線の領域を超えた領域でも合体が起きており、全ての例で Nbody シミュレーションは赤線とよく一致していることがわかる。

図 5.8 では、式 (5.27) において、 δe が正の場合、すなわち Inner binary の離心率が大きな値をとる初期相互 Inclination の値の範囲が広がる例をみた (Mangipudi et al. 2022)。一方、式 (5.27) において、 δe は負にもなりうるということがわかる。この例は Tremaine (2023) によって示された。Tremaine (2023) では、Brown's Hamiltonian という、Single average にのみ現れる効果を表す Hamiltonian を、Double average の場合の Hamiltonian に付け加えるという手法を用いた。なお、ここでの Brown's Hamiltonian は Quadrupole レベルのみを考えた。

Brown's Hamiltonian は、

$$H_B = \frac{9Gm_1m_2m_3^2a_{\text{in}}^{7/2}}{16(m_1+m_2)^{3/2}(m_1+m_2+m_3)^{1/2}a_{\text{out}}^{9/2}} \quad (5.28)$$

$$\times A(e_{\text{out}}) \left(\hat{\mathbf{j}}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{out}} \right) \left[24e_{\text{in}}^2 - 15 \left(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{out}} \right)^2 - \left(\hat{\mathbf{j}}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{out}} \right)^2 + 1 \right] \quad (5.29)$$

$$+ C(e_{\text{out}}) \left\{ \left(\hat{\mathbf{j}}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{out}} \right) \left[1 - 2 \left(\hat{\mathbf{j}}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{out}} \right)^2 - \left(\hat{\mathbf{j}}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{out}} \right)^2 + 4e_{\text{in}}^2 \right] \right. \quad (5.30)$$

$$\left. - 10 \left(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{out}} \right)^2 - 15 \left(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{out}} \right)^2 \right\} - 20 \left(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{out}} \right) \left(\hat{\mathbf{j}}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{out}} \right) \left(\mathbf{e}_{\text{in}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{\text{out}} \right) \quad (5.31)$$

と求められている (Tremaine 2023)。ここで、 $\hat{\mathbf{e}}_{\text{in}}$ 、 $\hat{\mathbf{e}}_{\text{out}}$ はそれぞれ Inner binary と Outer binary の離心率ベクトル \mathbf{e}_{in} 、 \mathbf{e}_{out} の向きの単位ベクトルであり、 $\hat{\mathbf{J}}_{\text{out}}$ は Outer binary の軌道角運動量ベクトルの方向の単位ベクトルである。また、 $A(e_{\text{out}})$ は、

$$A(e_{\text{out}}) = -\frac{(3+2e_{\text{out}}^2)}{12(1-e_{\text{out}}^2)^3} \quad (5.32)$$

である (Tremaine 2023)。また、 $C(e_{\text{out}})$ は定数 \mathcal{D}_1 、 \mathcal{D}_2 、 \mathcal{D}_3 を用いて、

$$C(e_{\text{out}}) = \frac{1}{(1-e_{\text{out}}^2)^3} \left[\frac{1}{4}e_{\text{out}}(e_{\text{out}} - \mathcal{D}_1) - \frac{1}{2}\mathcal{D}_2 - \frac{1}{4}e_{\text{out}}\mathcal{D}_3 \right] \quad (5.33)$$

と求められており、3つの定数 \mathcal{D}_1 、 \mathcal{D}_2 、 \mathcal{D}_3 の取り方によって $C(e_{\text{out}})$ が変わる (Tremaine 2023)。ここで、3つの定数は

$$\tau = f + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i \sin if \quad (5.34)$$

を満たし、 τ は仮想時間 (Fictitious time) と呼ばれる。また、 f は Outer binary における 3 体目の真近点角 (True anomaly) である。

3つの定数の取り方として、一般的に物理学的振る舞いに基づいた 3つ方法が考えられている。1つ目は、仮想時間 τ が Outer binary の平均近点角 (Mean anomaly) に等しい場合である。この時、3つの定数は、

$$\mathcal{D}_1 = -2e_{\text{out}} \quad (5.35)$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{2}{e_{\text{out}}^2} \left[1 - (1 - e_{\text{out}}^2)^{1/2} \right]^2 \left[\frac{1}{2} + (1 - e_{\text{out}}^2)^{1/2} \right] \quad (5.36)$$

$$\mathcal{D}_3 = -\frac{2}{e_{\text{out}}^3} \left[1 - (1 - e_{\text{out}}^2)^{1/2} \right]^3 \left[\frac{1}{3} + (1 - e_{\text{out}}^2)^{1/2} \right] \quad (5.37)$$

と求められており、この場合の $C(e_{\text{out}})$ は、

$$C(e_{\text{out}}) = \frac{1}{12e_{\text{out}}^2 (1 - e_{\text{out}}^2)^3} \left[4(1 - e_{\text{out}}^2)^{3/2} - 4 + 6e_{\text{out}}^2 + 3e_{\text{out}}^4 \right] \quad (5.38)$$

である (Brouwer and Clemence 1961)。この場合の Brown's Hamiltonian (式 (5.31)) を H_{B1} とする。

2 つ目の取り方は、仮想時間 τ が Outer binary における 3 体目の真近点角 (True anomaly) f に等しい場合である。この場合の 3 つの定数は $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = 0$ であり、 $C(e_{\text{out}})$ は、

$$C(e_{\text{out}}) = \frac{e_{\text{out}}^2}{4(1 - e_{\text{out}}^2)^3} \quad (5.39)$$

となる (Tremaine 2023)。この場合の Brown's Hamiltonian (式 (5.31)) を H_{B2} とする。

3 つ目の取り方は、Outer binary における 3 体目の真近点角 (True anomaly) f を用いて仮想時間が $\tau = f + e_{\text{out}} \sin f$ と表せる場合である。この場合の 3 つの定数は $\mathcal{D}_1 = e_{\text{out}}$, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = 0$ であり、このとき $C(e_{\text{out}})$ は、

$$C(e_{\text{out}}) = 0 \quad (5.40)$$

となる (Tremaine 2023)。この場合の Brown's Hamiltonian (式 (5.31)) を H_{B3} とする。

図 5.9 はある系に対して Double average における Quadrupole レベルの Hamiltonian $\langle\langle H_{\text{quad}} \rangle\rangle$ を考慮した場合 (水色線)、Double average における Octupole レベルの Hamiltonian $\langle\langle H_{\text{quad}} + H_{\text{oct}} \rangle\rangle$ を考慮した場合 (赤線)、Double average における Octupole レベルの Hamiltonian $\langle\langle H_{\text{quad}} + H_{\text{oct}} \rangle\rangle$ に加え、Brown's Hamiltonian (H_{B1} (青線) もしくは H_{B2} (緑線) もしくは H_{B3} (紫線)) を考慮した場合、直接 N 体計算コードでシミュレーションした場合 (3-body integration, 黒線) の系の進化の違いを比較したものである。図 5.9 の左パネルでは相互 Inclination i_{tot} の時間変化を、図 5.9 の右パネルでは Inner binary の離心率 e_{in} の時間変化を示している。この系では、2 体目を Test particle とし、 $m_1 = m_3 = 1 M_{\odot}$, $e_{\text{in},0} = 0.2$, $e_{\text{out},0} = 0.8$, $a_{\text{in}} = 1 \text{ AU}$, $a_{\text{out}} = 30 \text{ AU}$ とし、Inner binary の軌道周期の 50000 倍の時間まで計算を行った。

図 5.9 より、Double average における Octupole レベルの Hamiltonian $\langle\langle H_{\text{quad}} + H_{\text{oct}} \rangle\rangle$ を考慮した場合 (赤線) では、相互 Inclination が 90° をまたいで変化する Flip が起きているのに対し、Brown's Hamiltonian を考慮した場合では Flip が起こらなくなっており、Inner binary の離心率の最大値も小さくなっていることがわかる。また、Brown's Hamiltonian を考慮した場合が直接 N 体計算コードによるシミュレーション結果と一致しており、Brown's Hamiltonian を考慮した場合の方が正確に系の進化を追うことができていることがわかる。すなわち、この系では、Single average に現れる効果によって、相互 Inclination が 90° を跨いで変化する Flip が抑制され、Inner binary の最大離心率が小さくなっているということである。

以上のように、Double average では見ることができないが Single average では現れる摂動により、系によって、Inner binary の離心率の最大値は大きくも小さくもなるということがわかった。すなわち、この効果が Inner binary の 2 体の合体を触発したり、抑制したりするということを明らかにした。

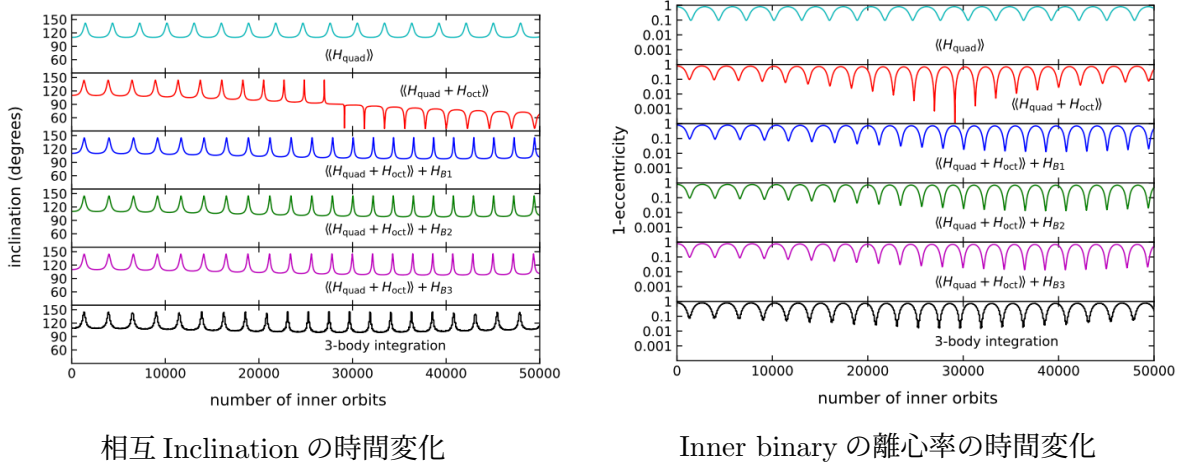


図 5.9: Single average にのみ現れる効果による Inner binary の離心率の最大値の抑制 (Tremaine 2023 の Figure 1 と Figure 2 を引用): 図中の inclination は相互 Inclination i_{tot} を、eccentricity は Inner binary の離心率 e_{in} を表す。水色線は Double average における Quadrupole レベルの Hamiltonian $\langle\langle H_{\text{quad}} \rangle\rangle$ を考慮した場合、赤線は Double average における Octupole レベルの Hamiltonian $\langle\langle H_{\text{quad}} + H_{\text{oct}} \rangle\rangle$ を考慮した場合、Double average における Octupole レベルの Hamiltonian $\langle\langle H_{\text{quad}} + H_{\text{oct}} \rangle\rangle$ に加え、青線は Brown's Hamiltonian H_{B1} を、緑線は H_{B2} を、紫線は H_{B3} を考慮した場合、黒線は直接 N 体計算コードでシミュレーションした場合 (3-body integration) の系の進化を表している。この系では、2 体目を Test particle とし、 $m_1 = m_3 = 1 M_{\odot}$, $e_{\text{in},0} = 0.2$, $e_{\text{out},0} = 0.8$, $a_{\text{in}} = 1 \text{ AU}$, $a_{\text{out}} = 30 \text{ AU}$ とし、Inner binary の軌道周期の 50000 倍の時間まで計算を行った。赤線では相互 Inclination が 90° をまたいで変化する Flip が起きているのに対し、Brown's Hamiltonian を考慮した場合は Flip が起こらなくなっており、Inner binary の離心率の最大値も小さくなっていることがわかる。また、Brown's Hamiltonian を考慮した場合が直接 N 体計算コードによるシミュレーション結果と一致しており、この系では、Single average に現れる効果によって、相互 Inclination が 90° を跨いで変化する Flip が抑制され、Inner binary の最大離心率が小さくなっているということがわかる。

5.4 本研究の手法

本研究の手法について述べる。5.4.1 節で本研究で用いた 2 つのコードについて述べ、5.4.2 節で本研究における多数の系の初期条件の生成方法と計算終了条件及び合体条件について述べる。

5.4.1 摂動計算コードと直接 N 体計算コードについて

本研究では、摂動計算 (Secular) コードと直接 N 体計算 (Nbody) コードという 2 つの種類のコードを用いたシミュレーションを行う。摂動計算 (Secular) コードとは、3 章で導いた軌道進化の式に従って計算を行うシミュレーションコードである。このコードは Secular 近似 (特に Double

average, 3.1.1 節, 3.2.1 節を参照) を採用しているため、計算時間が後述の Nbody コードよりも数百倍以上速い。そのため、階層的 3 体系の 10^9 年以上の長期進化をも追うことができ、5.1 節の Smooth 合体のような長時間かけてゆっくり合体するものを見つけることができる。しかし、Secular 近似を採用しているために Inner binary や Outer binary の軌道周期よりも短い時間スケールで起きる力学的挙動は捉えることができないため、実際の進化とは異なった進化を予測してしまうことがある。

一方、直接 N 体計算 (Nbody) コードとは、3 つの天体の力学的進化を追う数値シミュレーションであるが、近似を用いていないため、短周期の力学挙動や唐突な合体を捉えることができる。しかし、このコードは計算時間が Secular コードに比較して非常に長くかかる点や計算誤差の蓄積などの影響で、長期進化を追うことは非常に困難である。そのため、現在まで、2 つのシミュレーションコードの両方で多数の全く同じ系に対して 3.0×10^7 年までの長時間の進化を追い、それらの結果の違いについて系統的に明らかにした研究はなかった。

本研究では、初めて、直接 N 体計算コードと摂動計算コードの両方で多数の全く同じ系に対して 3.0×10^7 年までの長時間の進化を追い、結果を統計的に比較し、2 つのコードでの結果の違いを定量的に明らかにする。

本研究では、Secular コードとして OKINAMI を、Nbody コードとして TSUNAMI を用いた (Trani 2020)。OKINAMI は従来の Secular コードと同様、Double average の Secular 近似を採用している。また、OKINAMI は post-Newtonian の効果 1pN, 2pN, 2.5pN を含む。TSUNAMI は、計算のタイムステップを離心率の関数として変化させるなどの様々な手法により、従来の Nbody コードよりも 2 倍以上速く、非常に精度高く (エネルギー保存が従来の Nbody コードよりも 10^6 倍程度高い精度で成立) 系の進化を追うことができるため、長期の時間進化を追うことができる Nbody コードである。TSUNAMI の積分器は Mikkola and Tanikawa (1999) のアルゴリズム的正則化 (Algorithmic regularization) に基づき、近接遭遇 (Close encounter) や階層構造を持つ系、質量差の大きい連星の進化を扱うことができる。さらに、TSUNAMI は一般相対論の効果を 2.5pN まで含む。なお、2 つのコードはともに、孤立した階層的 3 体系の進化を追うことができる。

5.4.2 初期条件の生成と合体判定条件

本研究では、Secular コード (OKINAMI) と Nbody コード (TSUNAMI) を用いて、多数の全く同じ階層的 3 体系に対してシミュレーションを行う。

初期条件の生成

系の初期軌道パラメータは次のように生成する。はじめに、Inner binary の 2 つの天体の質量 m_1, m_2 はそれぞれ 3 ~ 50 太陽質量 (M_\odot) の値をランダムに生成し、その値をそれぞれの質量とする。値の生成には、PYTHON の `random.uniform` 関数を用いる。Inner binary は、球状星団の中心にある中間質量ブラックホールの周辺に存在する恒星質量ブラックホール連星を想定している。次に、3 体目の質量 m_3 は $1000 M_\odot, 10,000 M_\odot, 100,000 M_\odot$ と 3 つの値を考える。これは球状星団中心の中間質量ブラックホールを想定している。

Inner binary と Outer binary の離心率の初期値は The thermal eccentricity distribution¹ ($f(e)de =$

¹<https://joe-antognini.github.io/astrometry/thermal-eccentricities>

2ede)に従って、0.001 ~ 0.999 の間で生成する (Fragione and Bromberg 2019)。また、長軸半径の初期値は、10 ~ 200 AU の値をランダムに生成し、その値を Inner binary の長軸半径、1000 ~ 10000 AU の値をランダムに生成し、その値を Outer binary の長軸半径とする (Arca Sedda et al. 2021)。値の生成には、PYTHON の `random.uniform` 関数を用いる。Inclination の初期値は、Kozai limit(3.2.4 節を参照) の範囲内である $40^\circ \sim 140^\circ$ の値をランダムに生成し、その値とする。また、Inner binary と Outer binary の Arguments of periaapse g_{in} , g_{out} と、Outer binary の Longitudes of ascending nodes h_{out} は $0^\circ \sim 360^\circ$ の値をそれぞれランダムに生成し、それぞれその値を初期値とする。値の生成には、PYTHON の `random.uniform` 関数を用いる。ここで、Inner binary と Outer binary の Longitudes of ascending nodes には、 $h_{\text{in}} - h_{\text{out}} = \pi$ という関係が成り立つ。

以上のように生成した階層的 3 体系のうち、階層的 3 体系の安定性条件 (Mardling and Aarseth 2001, 3.5.2 節を参照) を満たすもののみに対してシミュレーションを行った。シミュレーションを行った階層的 3 体系は、 $m_3 = 1000 M_\odot$ の場合は 13231 個、 $m_3 = 10,000 M_\odot$ の場合は 8277 個、 $m_3 = 100,000 M_\odot$ の場合は 4520 個であった。これらの系に対して Secular コードと Nbody コードの両方でシミュレーションを行い、結果を比較した。なお、ここで選ばれた系の初期条件は全て、Secular 近似の妥当性 (式 (3.114)) も満たすことを確認した。

合体判定条件と計算終了条件

天体間の距離 $a_{\text{in}}(1 - e_{\text{in}})$ が 2 つの天体の Schwarzschild 半径の和の 5 倍の距離より近くなると一般相対論の効果が大きくなり post-Newtonian 展開が妥当でなくなる。そのため、本研究では、Inner binary の 2 つの天体の合体条件として、

$$a_{\text{in}}(1 - e_{\text{in}}) < 5(R_S^1 + R_S^2) \quad (5.41)$$

を採用する (Mangipudi et al. 2022)。ここで、 R_S^1 , R_S^2 はそれぞれ 1 体目、2 体目の Schwarzschild 半径であり、質量 m の天体の Schwarzschild 半径は、

$$R_S = \frac{2Gm}{c^2} \quad (5.42)$$

で定義される。

計算終了条件は合体を検出した場合と、系の時刻がシミュレーション終了時刻を超えた時である。シミュレーション終了時刻は、Nbody コードに対しては 3.0×10^7 年、Secular コードに対しては 1.0×10^9 年とする。なお、5.5.1 節では、Secular コードの結果として 3.0×10^7 年までのシミュレーション結果のみを用いている。すなわち、 3.0×10^7 年以上かけて合体したものは、5.5.1 節では合体しなかったものにカウントしている。

5.5 本研究の結果

本研究で得られた結果について述べる。5.5.1 節で 2 つのコードによる結果の違いを議論する。その結果に基づいて、5.5.2 節で初期条件において摂動計算 (Secular) コードの結果が妥当な領域を特定し、長時間かけて合体する系を考慮した KL 機構による合体のより詳細な質量比分布を予測する。最後に、5.5.3 節で 3 体目の質量の質量比分布への影響を、5.5.4 節で質量比の初期分布を変化させた場合の影響を議論する。

5.5.1 2つのコードにおけるシミュレーションの結果の違い

本節では、5.4節の手法で得られた Secular コードによるシミュレーション結果と Nbody コードによるシミュレーション結果の違いを議論し、初期条件において摂動計算 (Secular) コードの結果が妥当な領域を特定する。

なお、本研究で $m_3 = 1000 M_\odot$ とした場合にシミュレーションした系の総数は $N_{1000}^{\text{tot}} = 13231$ 、そのうち Secular コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系の数は $N_{1000,S}^{m,7} = 674$ 、 3.0×10^7 年以上 1.0×10^9 年以内に合体した系の数は $N_{1000,S}^{m,9} = 255$ 、Nbody コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系の数は $N_{1000,N}^m = 970$ であった。本節では、 $m_3 = 1000 M_\odot$ とした場合の結果において、 3.0×10^7 年以内に合体したもの ($N_{1000,S}^{m,7}$ と $N_{1000,N}^m$) のみを用いて議論する。

図 5.10 と図 5.11 は、摂動計算 (Secular) コードと直接 N 体計算 (Nbody) コードを用いた計算結果の比較を示しており、最終的に合体にいたる Inner binary に対して、その質量比 q の分布 (左図) と合体時間分布 (右図) を示している。図 5.10 では、全てのシミュレーションの数 N_{1000}^{tot} に対する割合を、図 5.11 では、合体した系の数に対する割合 ($N_{1000,S}^{m,7}$ または $N_{1000,N}^m$) を示している。図 5.10 では Nbody コードの方が合体する数が多くなっており、図 5.11 の右図では合体時間分布は2つのコードで違いがないことがわかる。一方、図 5.10 と図 5.11 より、2つのコードでは質量比 q 分布に違いがあり、Nbody コードの方が Secular コードよりも質量比分布 q が大きなものが多いことがわかる。以上のことから、2つのコードでは合体したものの合体時間が大きく違うのではなく、合体するものが違う、すなわち合体数が違うということがわかる。

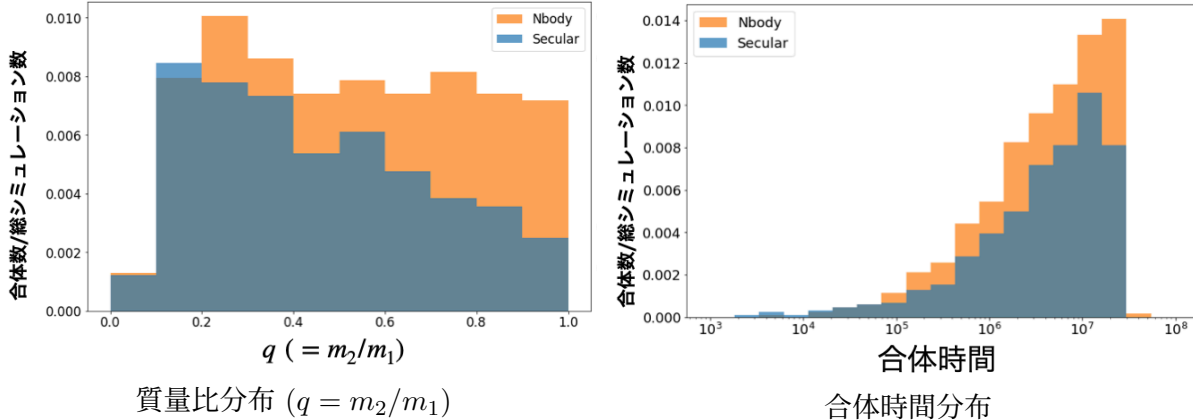


図 5.10: 摂動計算 (Secular) コードと直接 N 体計算 (Nbody) コードを用いた計算結果。最終的に合体にいたる Inner binary に対して、その質量比 q の分布と合体時間分布を示す。縦軸はシミュレーションした系の総数 (N_{1000}^{tot}) に対する合体数の割合である。総じて Nbody コードの方が合体する数が多い、また質量比分布も q が大きなものが多い。

では、どのような系において2つのコードで合体するしないの違いが出たのだろうか。シミュレーションした系のうち、合体したものにおける軌道パラメータの初期値を調べると、相互 Inclination の初期値 $i_{\text{tot},0}$ と Inner binary の Arguments of periaapse の初期値 $g_{\text{in},0}$ の占める領域で、2つのコードに大きな違いが出ていることが明らかとなった。図 5.12 にそれぞれのコードで合体した系の相互 Inclination の初期値 $i_{\text{tot},0}$ と Inner binary の Arguments of periaapse の初期値 $g_{\text{in},0}$ を示す。

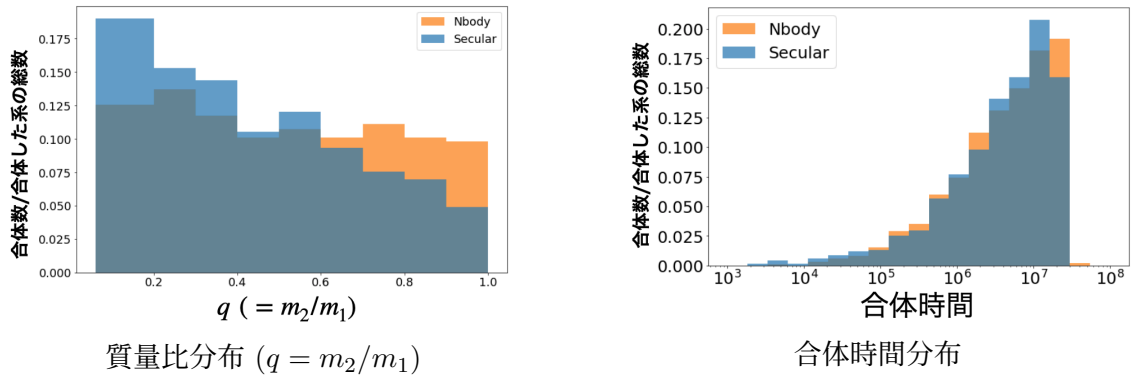


図 5.11: Secular コードと Nbody コードを用いた計算結果。最終的に合体にいたる Inner binary に対して、その質量比 q の分布と合体時間分布を示す。縦軸は合体した系の総数 ($N_{1000,S}^{m,7}$ または $N_{1000,N}^m$) に対する合体数の割合である。Nbody コードの方が Secular コードよりも質量比分布が q が大きなものが多くなっている。また、合体時間分布は 2 つのコードで違いがないことがわかる。この結果と図 5.10 より、2 つのコードでは合体したものの合体時間が大きく違うのではなく、合体するものが違う、すなわち合体数が違うということがわかる。

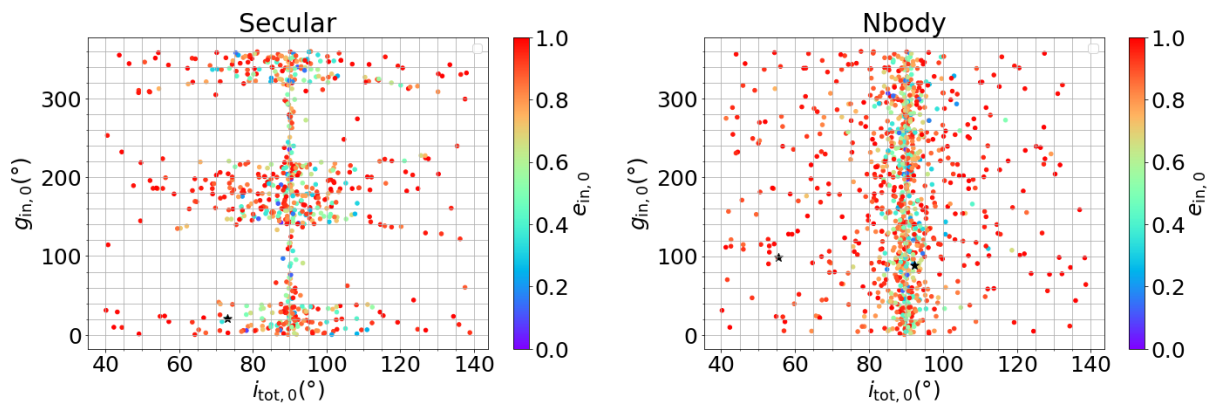


図 5.12: 合体した系の相互 Inclination の初期値と Inner binary の Arguments of periaapse の初期値: 点の色は Inner binary の離心率の初期値 $e_{in,0}$ を表す。Secular コードでは $i_{tot,0} \simeq 90^\circ$ 付近と、 $g_{in,0} \simeq 0^\circ \sim 45^\circ$, $134^\circ \sim 228^\circ$, $295^\circ \sim 360^\circ$ 付近に偏って分布している一方、Nbody コードでは、 $i_{tot,0} \simeq 85^\circ \sim 95^\circ$ に幅を持って $g_{in,0}$ に対して一様に分布しており、さらに $i_{tot,0}$ が 90° に近くない領域でも、数密度は減るものの一様に分布していることがわかる。また、どちらのコードでも、 $i_{tot,0} \simeq 85 \sim 95^\circ$ 付近から外れた場所にあるものの $e_{in,0}$ は大きいことがわかる。

図 5.12 では点の色は Inner binary の離心率の初期値 $e_{in,0}$ を表している。これらの図より、Secular コードでは $i_{tot,0} \simeq 90^\circ$ 付近と、 $g_{in,0} \simeq 0^\circ \sim 45^\circ, 134^\circ \sim 228^\circ, 295^\circ \sim 360^\circ$ 付近に偏って分布している一方、Nbody コードでは、 $i_{tot,0} \simeq 85^\circ \sim 95^\circ$ に幅を持って $g_{in,0}$ に対して一様に分布しており、さらに $i_{tot,0}$ が 90° に近くない領域でも、数密度は減るものの一様に分布していることがわかる。また、Secular コードの場合も Nbody コードの場合も、 $i_{tot,0} \simeq 85 \sim 95^\circ$ 付近から外れた場所にあるものはいずれも、Inner binary の離心率の初期値 $e_{in,0}$ が大きいことがわかる。

図 5.13 は、図 5.12 を Secular コードでも Nbody コードでも合体しなかったもの、Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードでは合体したもの、Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかったもの、Secular コードでも Nbody コードでも合体したものの、の 4 つに分類したものである。これより、Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかったものは $g_{in,0} \simeq 0^\circ \sim 45^\circ, 134^\circ \sim 228^\circ, 295^\circ \sim 360^\circ$ 付近の領域に集中しており、Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードでは合体したものは $i_{tot,0} \simeq 85 \sim 95^\circ$ 付近の領域や、 $g_{in,0} \simeq 45^\circ \sim 134^\circ, 228^\circ \sim 295^\circ$ 付近の領域に多くなっている。また、 $i_{tot,0} = 88^\circ \sim 92^\circ$ 付近の領域では、Secular コードと Nbody コードともに合体していることがわかる。

では上記のような違いが出たのはなぜだろうか。図 5.14 は、図 5.13 と同様に 4 つに分類したものを示しているが、点の色は Single average にのみ現れる効果の影響の大きさ ϵ_{SA} (式 (5.11)) を表す。これより、2 つのコードで結果が異なったもの (右上図と左下図) では、 ϵ_{SA} の値が大きく、Single average でのみ現れる効果が大きくなっていることがわかる。このことから、上記のような違いは Double average では見られず Single average に現れる短周期摂動による効果によるものと結論づけた。なお、本研究でシミュレーションした系では $\epsilon_{SA} = 0.002 \sim 0.15$ であった。5.3 節より、 ϵ_{SA} が 0.03 程度となると、短周期摂動の影響が大きくなっていく。

5.3 節より、Single average の場合に捉えることのできる、Secular 時間より短い時間で起こる摂動により、Inner binary の離心率の最大値が変化することが明らかとなった。Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードでは合体する、もしくはその逆の現象が起きたと考えられる。Secular 時間より短い時間で起こる摂動による影響は、5.2.1 節における Inner binary の離心率と Arguments of periaapse の時間進化を見ることで考察することができる。図 5.15~ 図 5.17 は、図 5.12~ 図 5.14 において黒星が示す系について Inner binary の離心率と Arguments of periaapse の時間進化を示したものである。

図 5.15 は Secular コードでは合体したが、Nbody コードでは合体しなかった系の離心率を示す。(5.13 と図 5.14 の左下図の黒星)。この系の初期条件は、 $g_{in,0} = 20.8^\circ, i_{tot,0} = 73.0^\circ, e_{in,0} = 0.36, e_{out,0} = 0.58$ であり、Inner binary の質量比は $q = 0.16$ であった。また、Octupole 項の大きさを表すパラメータの値 (式 (3.69)) は $|\epsilon_{oct}| = 0.0091$ と大きい値であり、さらに Single average の大きさを表すパラメータの値は $\epsilon_{SA} = 0.021$ と大きな値であった。すなわち、この系は Octupole 項の影響と Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響が大きいと考えられる。図 5.15 よりこの系では、5.3 節の図 5.9 のように、Nbody コードでは Secular コードの場合より Inner binary の離心率の最大値が小さくなっていることがわかる。

この系において、Outer binary の離心率の初期値のみを $e_{out,0} = 0$ と変更した場合では、Secular コードと Nbody コードにおける Inner binary の離心率の最大値はほぼ一致したが、図 5.15 と同様に、Nbody コードでは Secular コードの場合よりも様々な値の離心率や Arguments of periaapse をとっていた。また、この系では $g_{in,0} = 20.8^\circ$ であるから、Secular コードにおいて Rotation 状

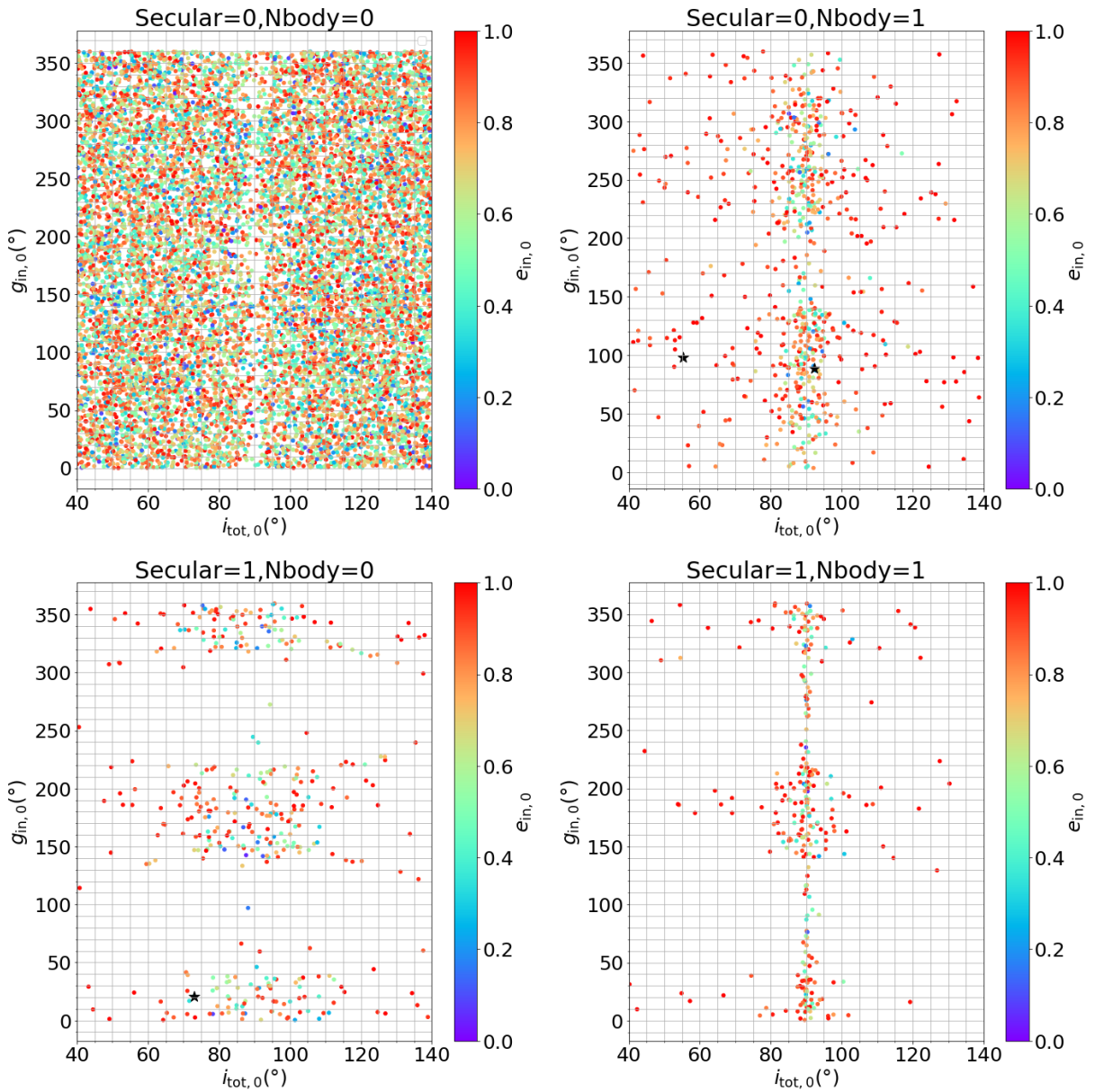


図 5.13: 合体した系の相互 Inclination の初期値と Inner binary の Arguments of periaapse の初期値: 図 5.12 を Secular コードでも Nbody コードでも合体しなかったもの、Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードでは合体したもの、Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかったもの、Secular コードでも Nbody コードでも合体したもの、の 4 つに分類したものを示す。Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかったもの (左下図, Secular = 1, Nbody = 0) は $g_{in,0} \simeq 0^\circ \sim 45^\circ$, $134^\circ \sim 228^\circ$, $295^\circ \sim 360^\circ$ 付近の領域に集中しており、Secular コードでは合体しなかったが Nbody コード (右上図, Secular = 0, Nbody = 1) では合体したものは Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかったものと反対に、 $i_{tot,0} \simeq 85 \sim 95^\circ$ 付近の領域や、 $g_{in,0} \simeq 45^\circ \sim 134^\circ$, $228^\circ \sim 295^\circ$ 付近の領域に多くなっていることがわかる。

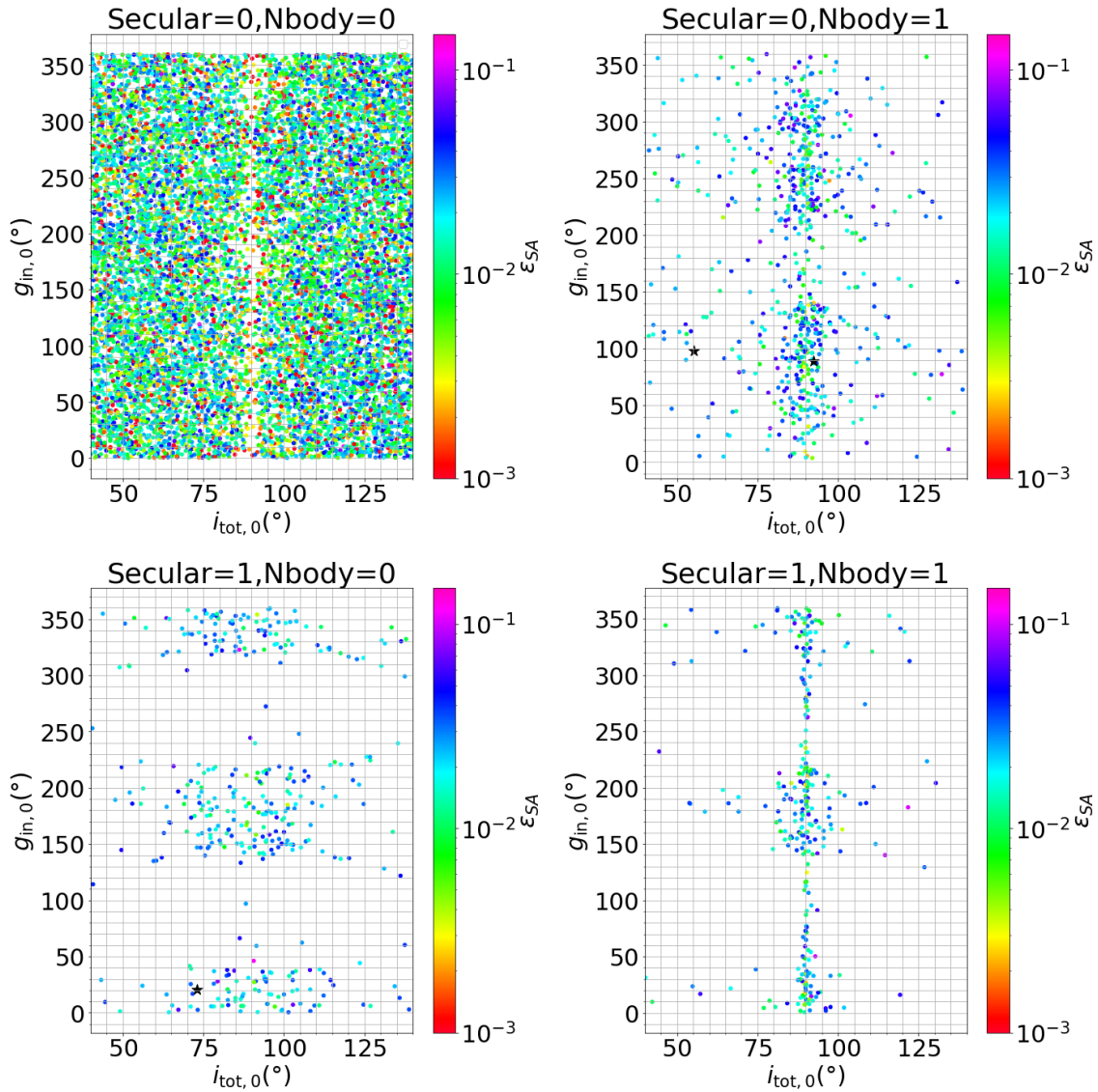


図 5.14: 合体した系の相互 Inclination の初期値と Inner binary の Arguments of periastron の初期値: 点の色は Single average にのみ現れる効果の大きさ ϵ_{SA} (式 (5.11)) を表す。図 5.13 と同様、Secular コードでも Nbody コードでも合体しなかったもの、Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードでは合体したもの、Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかったもの、Secular コードでも Nbody コードでも合体したもの、の 4 つに分類したものを示している。2 つのコードで結果が異なったもの (右上図と左下図) では、 ϵ_{SA} の値が大きいことがわかる。

態となっており、5.2.1 節、5.2.2 節より、このような系では、 $\cos g_{\text{in}} = 0$ 付近で初期値よりも大きな離心率を取ることが可能である。実際、図 5.15 の右図より、 $\cos g_{\text{in}} = 0$ 付近で Secular コードの場合には大きな離心率に達していることがわかる。したがって、この系においては、5.2.2 節のように、Octupole 振動による影響で Inner binary の離心率の最大値が増大すること、さらにこの増大が Secular 時間より短い時間で起こる摂動により抑制されていることがわかる。

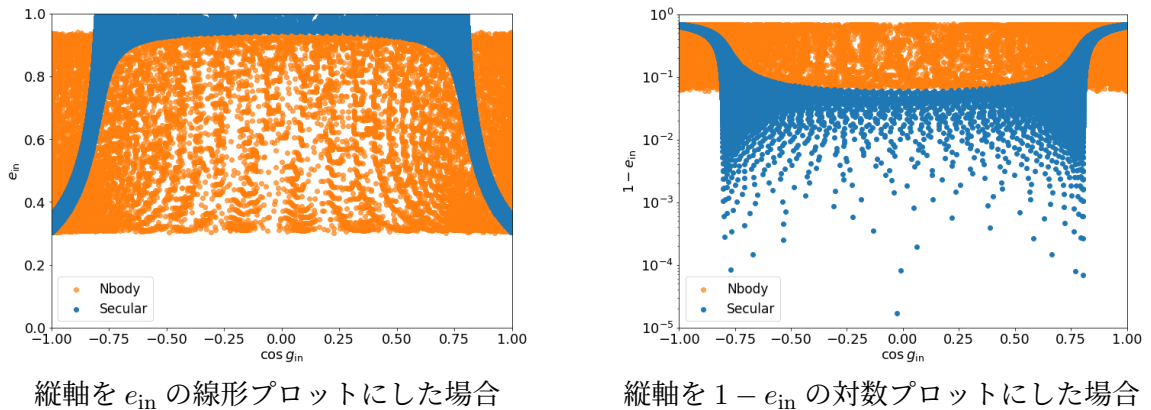


図 5.15: Inner binary の離心率と Arguments of periastron の時間進化: Secular コードでは合体したが、Nbody コードでは合体しなかった系の場合。この系の初期条件は、 $g_{\text{in},0} = 20.8^\circ$, $i_{\text{tot},0} = 73.0^\circ$, $e_{\text{in},0} = 0.36$, $e_{\text{out},0} = 0.58$ であり、Inner binary の質量比は $q = 0.16$ であった。また、Octupole 項の大きさを表すパラメータの値 (式 (3.69)) は $|\epsilon_{\text{oct}}| = 0.0091$ と大きい値であり、さらに Single average の大きさを表すパラメータの値は $\epsilon_{\text{SA}} = 0.021$ と大きな値であった。すなわち、この系は Octupole 項の影響と Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響が大きいと考えられる。5.3 節の図 5.9 のように、Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響で、Nbody コードでは Secular コードの場合より Inner binary の離心率の最大値が小さくなっていることがわかる。また、この系では Secular コードの場合、Rotation 状態となっており、Octupole 項の影響による離心率の増幅によって $\cos g_{\text{in}} = 0$ 付近で大きな離心率に達していることがわかる (5.2.2 節を参照)。

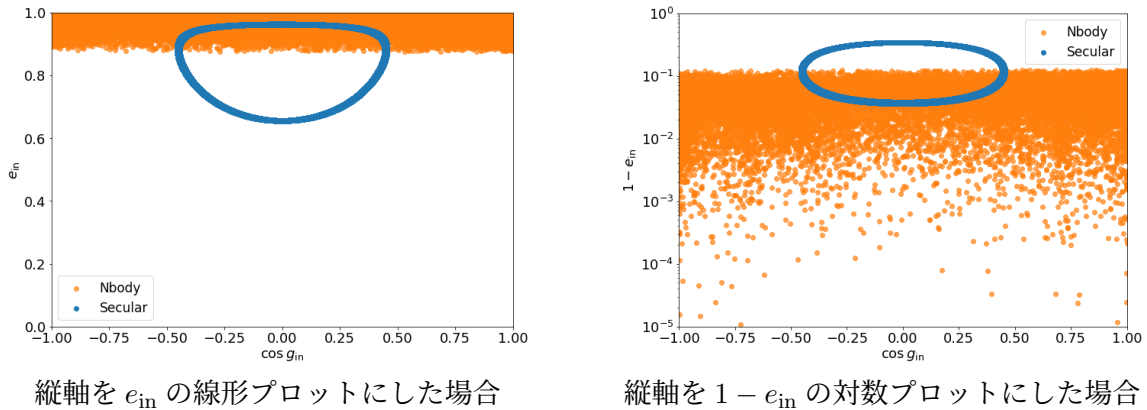
以上より、Secular コードでは合体したが、Nbody コードでは合体しなかった系が $g_{\text{in},0} \simeq 0^\circ \sim 45^\circ$, $134^\circ \sim 228^\circ$, $295^\circ \sim 360^\circ$ 付近の領域に集中しているのは、この領域の系は Rotation 状態であり $\cos g_{\text{in}} = 0$ 付近で初期値よりも大きな離心率を取ることが可能であるため、Octupole 項の影響により離心率の最大値が大きくなると、合体が触発されるためである。加えて、このような系でかつ Secular 時間よりも短い摂動による効果を見積もるパラメータ ϵ_{SA} の値が大きい場合、5.3 節の図 5.9 のように Secular 時間よりも短い摂動が Octupole 項による離心率の増幅を抑えてしまうということが明らかとなった。

次に、図 5.16 と図 5.17 は Secular コードでは合体しなかったが、Nbody コードでは合体したものである (5.13 と図 5.14 の右上図の黒星)。図 5.16 の系は $g_{\text{in},0} = 98.1^\circ$, $i_{\text{tot},0} = 55.4^\circ$, $e_{\text{in},0} = 0.96$, $e_{\text{out},0} = 0.12$ であり、Inner binary の質量比は $q = 0.15$ であった。また、Octupole 項の大きさを表すパラメータの値は $|\epsilon_{\text{oct}}| = 0.0034$ と図 5.15 に比較して小さな値であり、さらに Single average の大きさを表すパラメータの値は $\epsilon_{\text{SA}} = 0.038$ と大きな値であった。

また、5.17 の系は $g_{\text{in},0} = 88.8^\circ$, $i_{\text{tot},0} = 92.3^\circ$, $e_{\text{in},0} = 0.26$, $e_{\text{out},0} = 0.59$ であり、Inner binary の質量比は $q = 0.58$ であった。また、Octupole 項の大きさを表すパラメータの値は $|\epsilon_{\text{oct}}| = 0.0041$

と図 5.15 に比較して小さな値であり、さらに Single average の大きさを表すパラメータの値は $\epsilon_{SA} = 0.026$ と大きな値であった。これら 2 つの系は Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響が大きいが、図 5.15 の系よりも Octupole 項の影響は小さいことがわかる。実際、図 5.16 と図 5.17 より、この 2 つの系は Secular コードでは Libration 状態であり、Octupole 項の影響による離心率の増幅の影響は小さい (5.2.2 節を参照)。Nbody コードでは g_{in} は制限された値のみではなく全ての値を取っており、離心率が大きな値を取っていることがわかる。これは 5.3 節の図 5.8 と同様に、Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響によるものだと考えられる。

以上より、Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードで合体したものでは、 ϵ_{SA} の値が大きく、Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響によって、Libration 状態が崩れて g_{in} が任意の値を取ることができるようになってきていることが明らかとなった。さらに、それによって離心率が大きな値を取ることができるようになり、これが合体を誘発していることが明らかとなった。



縦軸を e_{in} の線形プロットにした場合

縦軸を $1 - e_{in}$ の対数プロットにした場合

図 5.16: Inner binary の離心率と Arguments of periastron の時間進化: Secular コードでは合体しなかったが、Nbody コードでは合体した系の場合。この系では、 $g_{in,0} = 98.1^\circ$ 、 $i_{tot,0} = 55.4^\circ$ 、 $e_{in,0} = 0.96$ 、 $e_{out,0} = 0.12$ であり、Inner binary の質量比は $q = 0.15$ であった。Octupole 項の大きさを表すパラメータの値は $|\epsilon_{oct}| = 0.0034$ と図 5.15 に比較して小さな値であり、さらに Single average の大きさを表すパラメータの値は $\epsilon_{SA} = 0.038$ と大きな値であった。この系では、Secular コードでは Libration 状態であり、Octupole 項の影響による離心率の増幅の影響は小さい (5.2.2 節を参照)。Nbody コードでは、Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響により Libration 状態が崩れて g_{in} が任意の値を取ることができるようになっており、それによって離心率が大きな値を取っていることがわかる。

5.5.2 長時間合体を考慮した質量比分布の予測

本節では、5.5.1 節の結果をふまえ、Secular コードと Nbody コードの 2 つの結果を用いて、 3.0×10^7 年以上かけてゆっくりと合体するものを考慮した、KL 機構による合体のより詳細な質量比 q 分布を予測する。まず、5.5.1 節の結果より Secular コードが妥当な領域における長時間合体を特定し、その結果を元に Secular コードが妥当な領域外における長時間合体を予測する。最後に、予測された長時間合体と Nbody コードにおける 3.0×10^7 年までに起きた合体を合わせることで、長時間合体を考慮した質量比分布を予測する。

なお、本節では、Nbody コードにおいては 3.0×10^7 年以内に合体したもの、Secular コードにつ

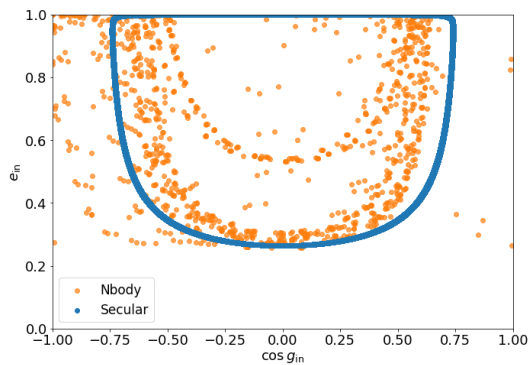
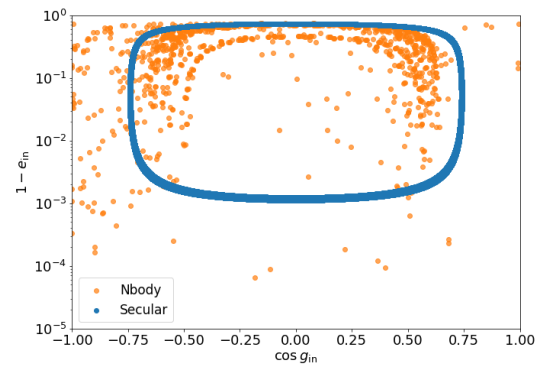
縦軸を e_{in} の線形プロットにした場合縦軸を $1 - e_{\text{in}}$ の対数プロットにした場合

図 5.17: Inner binary の離心率と Arguments of periastron の時間進化: Secular コードでは合体しなかったが、Nbody コードでは合体した系の場合。この系では、 $g_{\text{in},0} = 88.8^\circ$, $i_{\text{tot},0} = 92.3^\circ$, $e_{\text{in},0} = 0.26$, $e_{\text{out},0} = 0.59$ であり、Inner binary の質量比は $q = 0.58$ であった。Octupole 項の大きさを表すパラメータの値は $|\epsilon_{\text{Oct}}| = 0.0041$ と図 5.15 に比較して小さな値であり、さらに Single average の大きさを表すパラメータの値は $\epsilon_{\text{SA}} = 0.026$ と大きな値であった。図 5.16 の系と同様、この系では Secular コードにおいて Libration 状態であり、Octupole 項の影響による離心率の増幅の影響は小さい。Nbody コードでは、Secular 時間より短い時間で起こる摂動の影響により Libration 状態が崩れて g_{in} が任意の値を取ることができるようになることで離心率が大きな値を取っていることがわかる。

いてはについて 3.0×10^7 年以上かつ 1.0×10^9 年以内に合体したものについてのみ考慮する。ここで、参考に Secular コード、Nbody コードで合体した全ての系の合体時間分布を図 5.18 に示す。 1.0×10^9 年までのシミュレーションを行った Secular コードの結果では、多くの系が 3.0×10^7 年以上かけて合体していることがわかる。

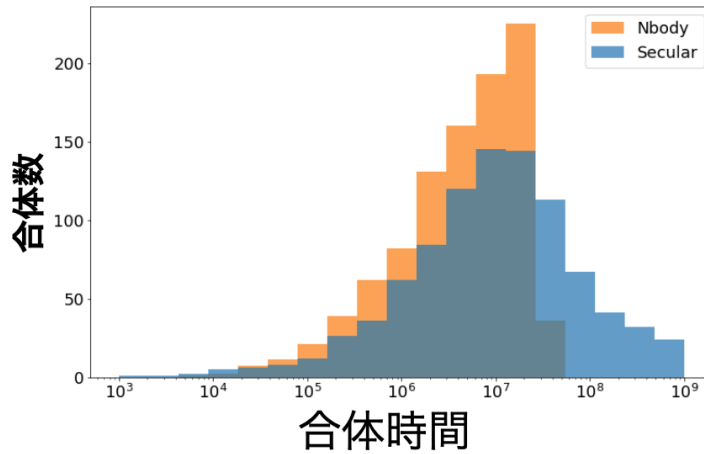


図 5.18: Secular コードと Nbody コードを用いた計算で、最終的に合体した全ての系の合体時間分布: 青色のヒストグラムは Secular コードにおいて 1.0×10^9 年以内に合体した全ての系の合体時間の数分布を、オレンジのヒストグラムは Nbody コードにおいて 3.0×10^7 年以内に合体した全ての系の合体時間の数分布を示す。 1.0×10^9 年までのシミュレーションを行った Secular コードの結果では、多くの系が 3.0×10^7 年以上かけて合体していることがわかる。

妥当な領域内における長時間合体の発見

5.5.1 節より、相互 Inclination と Arguments of periaipse の初期値の図において、 $i_{\text{tot},0} \simeq 90^\circ$ の領域を除く $g_{\text{in},0} \simeq 0^\circ \sim 45^\circ$, $134^\circ \sim 228^\circ$, $295^\circ \sim 360^\circ$ の領域にある系は、Secular コードでは合体するが、Nbody コードでは合体しない可能性が高いことが明らかとなった (図 5.13, 図 5.14)。

したがって、本研究では、Secular コードの結果が妥当な領域は $88^\circ < i_{\text{tot},0} < 92^\circ$ の領域と、 $45^\circ < g_{\text{in},0} < 134^\circ$, $228^\circ < g_{\text{in},0} < 295^\circ$ の領域であると結論づけ、Secular コードで 3.0×10^7 年以上かつ 1.0×10^9 年以内に合体した系のうち、 $88^\circ < i_{\text{tot},0} < 92^\circ$ の領域と、 $45^\circ < g_{\text{in},0} < 134^\circ$, $228^\circ < g_{\text{in},0} < 295^\circ$ の領域の系のみが実際に起こる合体であるとする。なお、この Secular コードの結果が妥当な領域は、Secular コードで合体したが Nbody コードで合体しなかった系のうち妥当な領域の範囲内にあるものの割合 $\mathcal{R}_{\text{SIN0}}^{\text{error}}$ と Secular コードと Nbody コードの両方で合体した系のうち妥当な領域外にあるものの割合 $\mathcal{R}_{\text{SIN1}}^{\text{miss}}$ がともに最小化されるように決定した。最小化された割合は、 $\mathcal{R}_{\text{SIN0}}^{\text{error}} = 0.10$ 、 $\mathcal{R}_{\text{SIN1}}^{\text{miss}} = 0.43$ であった。

Secular コードの結果が妥当な領域における長時間合体 (合体時間が 3.0×10^7 年以上かつ 1.0×10^9 年以下) した系の数は、 $N_{1000,S}^{\text{m,long}} = 37$ であった。ここで、Nbody コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系は除外した。図 5.19 は、合体した系の相互 Inclination と Arguments of periaipse の初期値を示した図 5.12 に、Secular コードの結果が妥当な領域における長時間合体した系 (紫星) を付け加えたものである。なお、点の色は合体時間を表す。

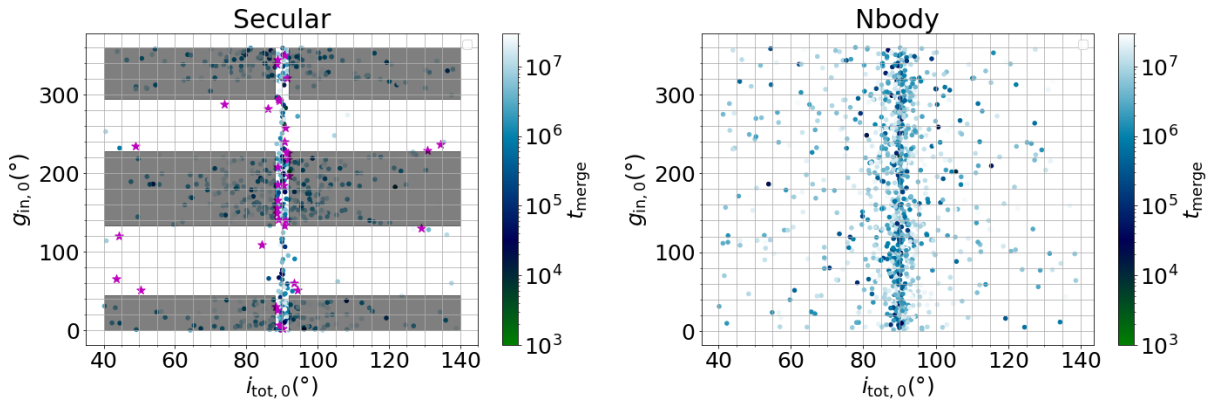


図 5.19: 本研究で発見した長時間合体と Nbody コードにおける合体: 図 5.12 に示した系 (点) と Secular コードの結果が妥当な領域における長時間合体した系 (紫星) を示す。点の色の違いは合体時間を表す。なお、本研究における長時間合体は 3.0×10^7 年以上かつ 1.0×10^9 年以内に起きた合体と定義する。また、Secular コードが妥当な領域は $88^\circ < i_{tot,0} < 92^\circ$ の領域と $45^\circ < g_{in,0} < 134^\circ$, $228^\circ < g_{in,0} < 295^\circ$ の領域とする。ここで、Nbody コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系は除外した。

また、図 5.20 は、Nbody で合体したもの ($N_{1000,N}^m$, オレンジのヒストグラム) と、図 5.19 において紫星で示されている系 ($N_{1000,S}^{m,long}$, 紫色のヒストグラム) の質量比 q の数分布と合体時間の数分布を示している。本研究での見積もりは、Secular コードで合体したが Nbody コードでは合体しないものを最大限に除くため、Secular コードの結果が妥当な領域を狭く見積もっている。実際、Secular コードで合体しかつ Nbody コードで合体するもののうち 4 割程度を見逃している。しかしこの場合においても、図 5.20 より、長時間合体は無視できない量 ($\sim 4\%$) が存在することがわかる。

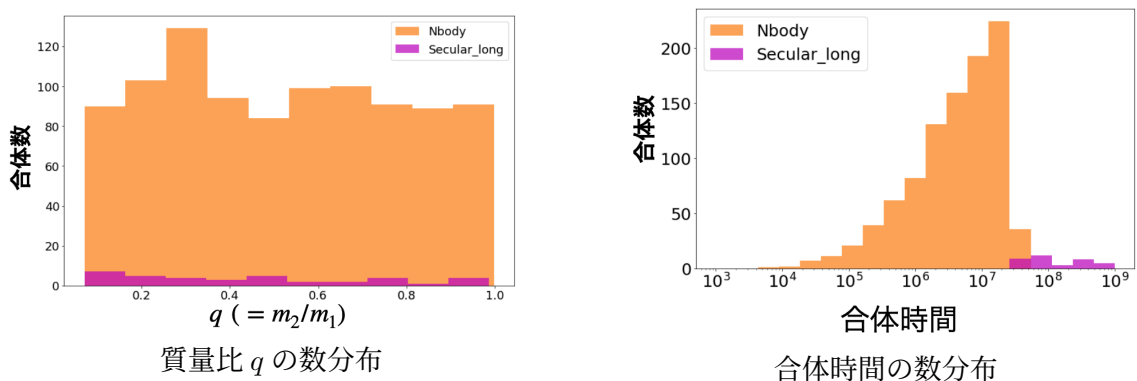


図 5.20: 本研究で発見した長時間合体と Nbody コードにおける合体: 紫のヒストグラムは図 5.19 に紫星で示された系の質量比 q と合体時間の数分布 (総数 $N_{1000,S}^{m,long}$) を、オレンジのヒストグラムは Nbody コードで合体した系の質量比 q と合体時間の数分布 (総数 $N_{1000,N}^m$) を示している。発見された長時間合体は Nbody コードの結果に対して無視できない量 ($\sim 4\%$) が存在することがわかる。

妥当な領域外における長時間合体の外挿

次に、発見された Secular コードの結果が妥当な領域における長時間合体 (図 5.19 の紫星) から、Secular コードが妥当な領域外での長時間合体を外挿する。

外挿を行うために本研究では 2 つの仮定をする。まず 1 つ目は、本研究では Nbody コードにおける合体したものの初期値分布 (図 5.19 の右図, 図 5.20 の左図のオレンジヒストグラム) が正しいとし、長時間合体をする系の初期値分布は Nbody コードの結果に従うと仮定する。この過程をもとに、Secular コードが妥当な領域外 (灰色の領域) における合体数を、(灰色の領域における合体数) = $(88^\circ < i_{\text{tot},0} < 92^\circ$ 以外の妥当な領域における合体数) \times (灰色の領域の面積 / $88^\circ < i_{\text{tot},0} < 92^\circ$ 以外の妥当な領域の面積) という式をもとに見積もる。これと、妥当な領域で発見された合体を合わせたものを予測された長時間合体とする。

2 つ目の仮定は、予測された長時間合体の数に対する、Secular コードが妥当な領域内における Secular コードで合体するが Nbody コードでは合体しない系の割合と妥当な領域外における Secular コードでも Nbody コードでも合体する系の割合が、 3.0×10^7 年までの結果におけるものと等しいとした。すなわち、 3.0×10^7 年までの結果において、Secular コードの結果が妥当な領域内の合体から妥当な領域外の合体を外挿して実際の合体 (Nbody コードにおける合体) を予測しその結果を Nbody コードで得られた合体と比較することで得られた予測された合体数に対する、Secular コードが妥当な領域内における Secular コードで合体するが Nbody コードでは合体しない系の割合と妥当な領域外における Secular コードでも Nbody コードでも合体する系の割合が長時間合体においても保持されるとした。

図 5.21 の左図に本研究で発見した Secular コードが妥当な領域内の長時間合体 (図 5.19 の紫星) の質量比 q 分布を、右図に本研究で発見した Secular コードが妥当な領域内の長時間合体から Secular コードが妥当な領域外での長時間合体を外挿し予測された長時間合体の質量比 q 分布を示す。ともに縦軸は総シミュレーション数 (N_{1000}^{tot}) に対する合体数の割合、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。右図におけるエラーバー (系統誤差) は、前述の 2 つの過程を踏まえ、妥当な領域内における Secular コードで合体するが Nbody コードでは合体しない系を全て取り除くことができた場合 (下限) と妥当な領域外における Secular コードでも Nbody コードでも合体する系を全て取り除くことができた場合 (上限) により見積もった。なお、統計誤差は十分小さいとして考慮しない。

長時間合体を考慮した質量比分布の予測

本研究で発見した Secular コードが妥当な領域内の長時間合体から Secular コードが妥当な領域外での長時間合体を外挿し予測された長時間合体の質量比 q 分布と、 3.0×10^7 年までに Nbody コードで合体した系を合わせることで、長時間合体を考慮した KL 機構による合体の質量比 q 分布を予測する。なお、Nbody コードには系統誤差は存在しないとする。また、統計誤差は十分小さいとして考慮しない。

図 5.22 の左図に本研究で発見した Secular コードが妥当な領域内の長時間合体から Secular コードが妥当な領域外での長時間合体を外挿し予測された長時間合体の質量比 q 分布を、右図に 3.0×10^7 年までに Nbody コードで合体した系を示す。これらの 2 つのヒストグラムを合わせることで、球状星団における、長時間合体を考慮した KL 機構による合体の質量比 q 分布を予測する。予測された質量比 q 分布を図 5.23 に示す。縦軸は総シミュレーション数 (N_{1000}^{tot}) に対する合体数の割合 (f_{KL} とおく)、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。

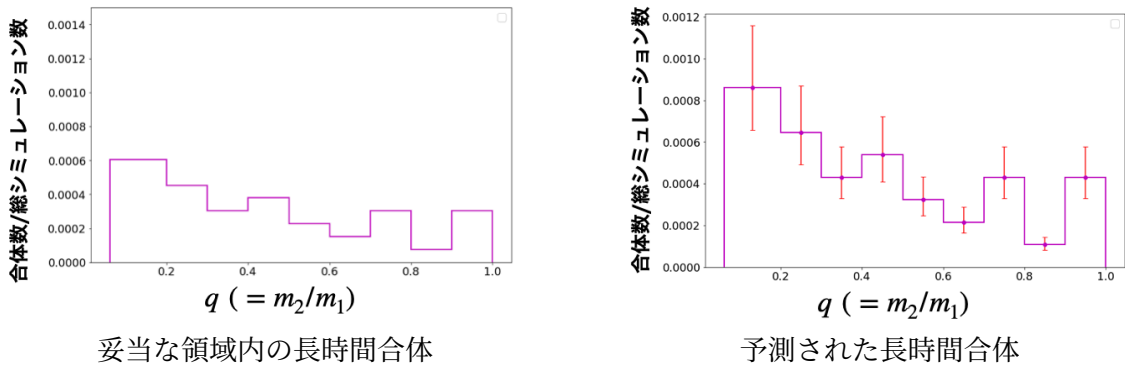


図 5.21: 長時間合体の予測: 左図に本研究で発見した Secular コードが妥当な領域内の長時間合体 (図 5.19 の紫星) の質量比 q 分布を、右図に本研究で発見した Secular コードが妥当な領域内の長時間合体から Secular コードが妥当な領域外での長時間合体を外挿し予測された長時間合体の質量比 q 分布を示す。ともに縦軸は総シミュレーション数 (N_{1000}^{tot}) に対する合体数の割合、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。また、右図におけるエラーバーは、妥当な領域内における Secular コードで合体するが Nbody コードでは合体しない系を全て取り除くことができた場合 (下限) と妥当な領域外における Secular コードでも Nbody コードでも合体する系を全て取り除くことができた場合 (上限) により見積もった。

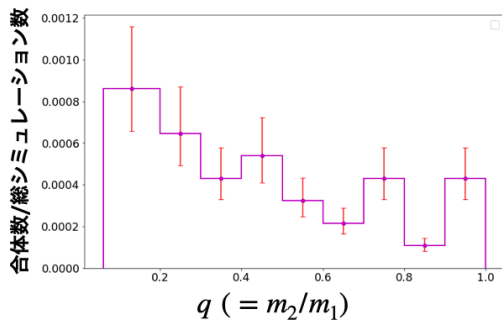
図 5.23 より、KL 機構によって誘発された合体は質量比 q が小さい ($q < 0.4$) 合体を多く起こしていることが明らかとなった。さらに、KL 機構は質量比 q が小さい合体だけでなく、大きい合体も多く引き起こすことが明らかとなり、KL 機構によって誘発された合体は 0 から 1 の全ての質量比をおおよそ同程度の割合で生成することが明らかとなった。これにより、KL 機構により誘発された合体は質量比が小さい合体をよく説明できることが明らかとなった。

5.5.3 3 体目の質量を変えた場合

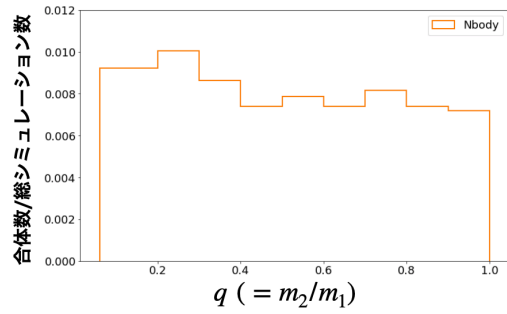
5.5.2 節で明らかにした長時間合体を考慮した質量比 q 分布について、3 体目の質量を変えた場合の変化を述べる。

3 体目の質量は $m_3 = 1000 M_{\odot}$, $m_3 = 10000 M_{\odot}$, $m_3 = 100000 M_{\odot}$ の 3 種類を考えた。 $m_3 = 1000 M_{\odot}$ の場合のシミュレーション結果は 5.5.1 節及び 5.5.2 節で述べた通りである。 $m_3 = 10000 M_{\odot}$ とした場合にシミュレーションした系の総数は $N_{10000}^{\text{tot}} = 8277$ 、そのうち Secular コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系の数は $N_{10000,S}^m = 391$ 、 3.0×10^7 年以上 1.0×10^9 年以内に合体した系の数は $N_{10000,S}^{m,9} = 92$ 、Nbody コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系の数は $N_{10000,N}^m = 830$ 、さらに質量比分布の予測に使われた Secular コードで長時間合体した系の数は、 $N_{10000,S}^{m,\text{long}} = 2$ であった。 $m_3 = 100000 M_{\odot}$ とした場合にシミュレーションした系の総数は $N_{100000}^{\text{tot}} = 4520$ 、そのうち Secular コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系の数は $N_{100000,S}^m = 166$ 、 3.0×10^7 年以上 1.0×10^9 年以内に合体した系の数は $N_{100000,S}^{m,9} = 68$ 、Nbody コードで 3.0×10^7 年以内に合体した系の数は $N_{100000,N}^m = 463$ 、さらに質量比分布の予測に使われた Secular コードで長時間合体した系の数は、 $N_{100000,S}^{m,\text{long}} = 7$ であった。

図 5.24 に、図 5.23 と同様の手法で作成した、3 体目の質量を $m_3 = 1000 M_{\odot}$, $10000 M_{\odot}$, $100000 M_{\odot}$ とした場合の長時間合体を考慮した質量比 q 分布を示す。縦軸は総シミュレーション数 (それぞれ



予測された長時間合体



Nbody コードで得られた合体 (3.0×10^7 年まで)

図 5.22: 長時間合体を考慮した質量比 q 分布予測: 左図に本研究で発見した Secular コードが妥当な領域内の長時間合体から Secular コードが妥当な領域外での長時間合体を外挿し予測された長時間合体の質量比 q 分布を、右図に 3.0×10^7 年までに Nbody コードで合体した系を示す。縦軸は総シミュレーション数 (N_{1000}^{tot}) に対する合体数の割合、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。これらの2つのヒストグラムを合わせることで、球状星団における、長時間合体を考慮した KL 機構による合体の質量比 q 分布を予測する。

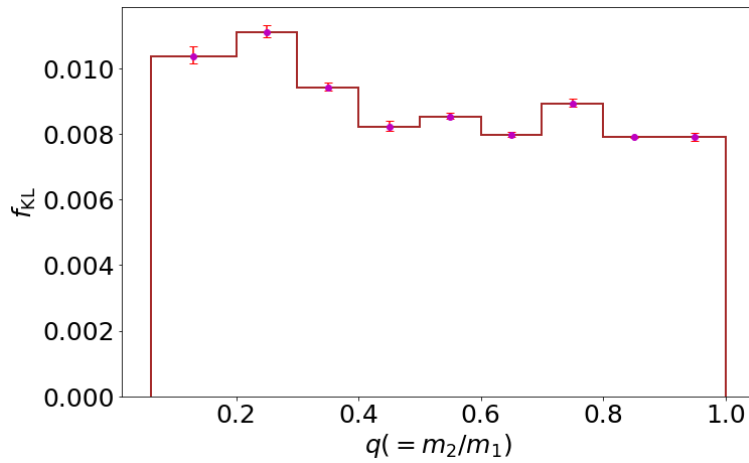


図 5.23: 長時間合体を考慮した質量比 q 分布: 図 5.22 に示された2つのヒストグラムを合わせることで作成した。縦軸は総シミュレーション数 (N_{1000}^{tot}) に対する合体数の割合 (f_{KL} とおいた)、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。また、エラーバーは図 5.21 の右図のエラーバーに等しい。この図より、KL 機構によって誘発された合体は質量比 q が小さい ($q < 0.4$) 合体を多く起こしていることが明らかとなった。さらに、KL 機構は質量比 q が小さい合体だけでなく、大きい合体も多く引き起こすことが明らかとなった。

れ、 N_{1000}^{tot} , N_{10000}^{tot} , N_{100000}^{tot}) に対する合体数の割合 (f_{KL})、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。また、エラーバーは図 5.21 の右図のエラーバーと同様に見積もった。Secular コードで 3.0×10^7 年以上 1.0×10^9 年以内に合体した系のうち、図 5.24 より、3 体目の質量が大きくなると、シミュレーションした全ての系に対する合体した系の割合が増え、さらに、質量比 q が大きい合体が増えることが明らかとなった。これは、3 体目の質量が大きくなることで KL 機構の影響が大きくなり、質量比 q が大きく Octupole 項の影響が少ない場合でも合体に至ることが可能となっているためである。

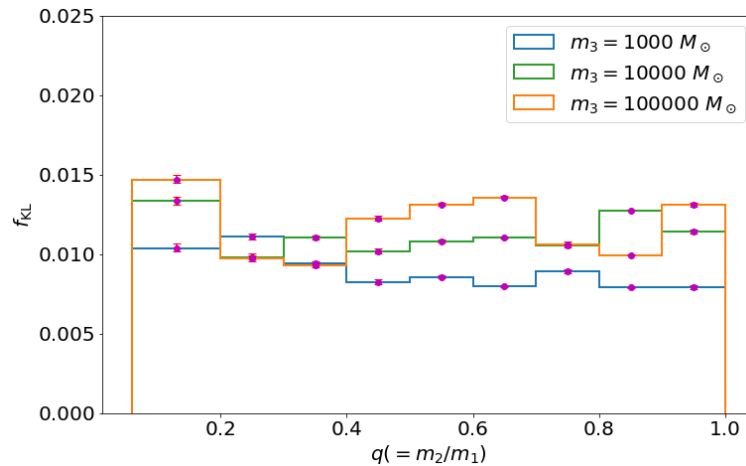
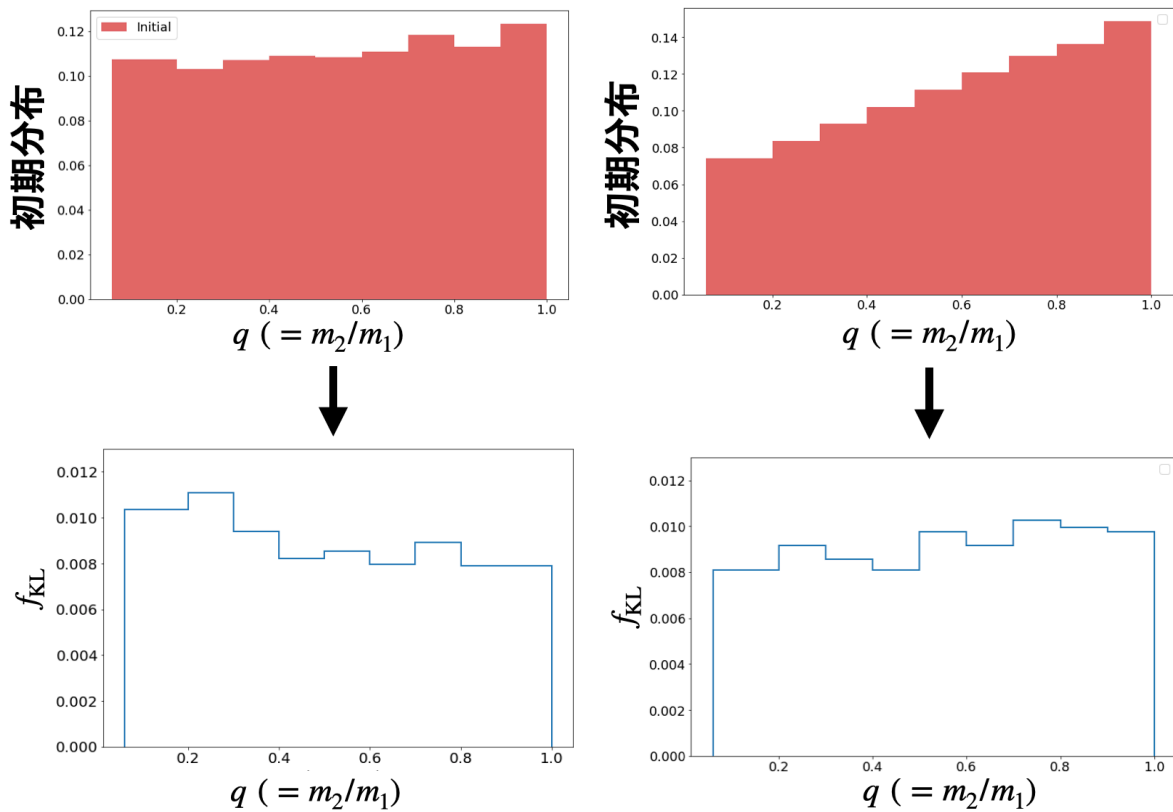


図 5.24: 3 体目の質量の違いによる長時間合体を考慮した質量比 q 分布の違い: 図 5.23 と同様の手法で、3 体目の質量を $m_3 = 1000 M_\odot$, $10000 M_\odot$, $100000 M_\odot$ とした場合の長時間合体を考慮した質量比 q 分布を作成した。縦軸は総シミュレーション数 (それぞれ、 N_{1000}^{tot} , N_{10000}^{tot} , N_{100000}^{tot}) に対する合体数の割合 (f_{KL})、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。また、エラーバーは図 5.21 の右図のエラーバーと同様に見積もった。3 体目の質量が大きくなると、合体率が大きくなり、さらに、質量比 q が大きい合体が増えることが明らかとなった。これは、3 体目の質量が大きくなることで KL 機構の影響が大きくなり、質量比 q が大きく Octupole 項の影響が少ない場合でも合体に至ることが可能となっているためである。

5.5.4 質量比の初期分布を変化させた場合

質量比 q の初期分布を変えた場合の KL 機構による合体質量比 q 分布の変化について述べる。本節では、 $m_3 = 1000 M_\odot$ の場合の結果を用いる。

図 5.25 の左図に本研究における質量比 q の初期分布とそれから得られた f_{KL} を、右図に変化させた初期分布とそれから得られた f_{KL} を示す。初期分布はシミュレーションした全ての系の数に対する、その q の値をもつ系の数の割合を示している。変化させた初期分布では、 $q = 0.9 \sim 1.0$ の系の数が $q = 0.06 \sim 0.2$ の系の数の 2 倍になるようにした。2 つの結果を比較すると、初期分布における $q < 0.4$ の系の数の減少に伴って、 $q < 0.4$ の領域の f_{KL} の値が小さくなっていることがわかる。しかし、初期分布を変化させた (右図) 場合でも $f_{\text{KL}} \simeq 0.08$ の値をもち、オーダーで変化するような大きな変化は見られず、 $q < 0.4$ に十分な合体がおきていることがわかる。



本研究の質量比 q の初期分布と得られた f_{KL}

質量比 q の初期分布を変化させた場合

図 5.25: 質量比 q の初期分布を変化させた場合に予測される質量比 q 分布の違い: 左図に本研究における質量比 q の初期分布とそれから得られた f_{KL} を、右図に変化させた初期分布とそれから得られた f_{KL} を示す。初期分布はシミュレーションした全ての系の数に対する、その q の値をもつ系の数の割合を示している。変化させた初期分布では、 $q = 0.9 \sim 1.0$ の系の数が $q = 0.06 \sim 0.2$ の系の数の 2 倍になるようにした。2 つの結果を比較すると、初期分布における $q < 0.4$ の系の数の減少に伴って、 $q < 0.4$ の領域の f_{KL} の値が小さくなっていることがわかる。しかし、初期分布を変化させた(右図)場合でも $f_{KL} \simeq 0.08$ の値をもち、オーダーで変化するような大きな変化は見られず、 $q < 0.4$ に十分な合体がおきていることがわかる。

5.6 議論および結論

これまで、Secular コードと Nbody コードの両方を用いて、多数の系のシミュレーションを行い、その結果の違いを系統的に明らかにした研究はなかった。本研究では、5.5.1 節のように、Secular コードと Nbody コードでは、系の初期条件によっては、シミュレーション結果が大きく変わってしまうということ、これによって Secular コードでは合体する系の数を少なく見積もってしまうことを明らかにした。さらに、2つのコードでシミュレーション結果が異なってしまう原因は Secular 時間 (式 (3.99), Antognini 2015) よりも短い時間スケールで起きる摂動によるものであり、系の初期条件としては特に、Inner binary の Arguments of periaapse の初期値と相互 Inclination の初期値によって決まっていることを明らかにした。より具体的には、Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかったものは $g_{in,0} \simeq 0^\circ \sim 45^\circ, 134^\circ \sim 228^\circ, 295^\circ \sim 360^\circ$ 付近の領域に集中しており、反対に Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードでは合体したものは、 $i_{tot,0} \simeq 85^\circ \sim 95^\circ$ 付近の領域や、 $g_{in,0} \simeq 45^\circ \sim 134^\circ, 228^\circ \sim 295^\circ$ 付近の領域に多いことを明らかにした。Secular コードでは合体したが Nbody コードでは合体しなかった系、Secular コードでは合体しなかったが Nbody コードでは合体した系はいずれも、Secular コードでは捉えることのできない Secular 時間よりも短い時間スケールの摂動の影響が大きくなり、それにより Inner binary の離心率の最大値が変化したためである。特に、 $45^\circ < g_{in,0} < 134^\circ, 228^\circ < g_{in,0} < 295^\circ$ の領域の系は、Secular コードでは Libration 状態となっており Inner binary の離心率の励起が制限された状態にあるが、Nbody コードでは Secular 時間よりも短い時間スケールの摂動の影響によりこの制限が解除されていることが明らかとなった。

以上のように、Secular コードと Nbody コードは同じ系に対して異なるシミュレーション結果を与えることが明らかとなった。これをもとに、2つのコードの結果が異なるような系の初期条件を制限し、Secular コードの結果が妥当な領域を特定した。得られた妥当な領域は $88^\circ < i_{tot,0} < 92^\circ$ の領域と、 $45^\circ < g_{in,0} < 134^\circ, 228^\circ < g_{in,0} < 295^\circ$ の領域であった。さらに、この領域内において Secular コードで発見された長時間合体から、Secular コードが妥当な領域外での超時間合体を外挿し、長時間合体の質量比 q 分布を予測した。この結果と Nbody コードの結果と合わせることで、超時間合体を考慮した KL 機構によって誘発された合体の質量比 q 分布を予測した (5.5.2 節)。これによって、KL 機構によって誘発された合体は質量比 q が小さい ($q < 0.4$) 合体を多く起こしていることが明らかとなり、KL 機構によって誘発された合体は 0 ~ 1 の全ての質量比をおおよそ同程度の割合で生成することが明らかとなった。以上より、KL 機構により誘発された合体は質量比が小さい合体をよく説明できることを示唆した。また本研究では、3体目の質量と質量比 q の初期分布が、KL 機構による合体の質量比 q 分布に与える影響を明らかにした。本研究では、3体目の質量を $m_3 = 1000 M_\odot, 10000 M_\odot, 100000 M_\odot$ とした場合の長時間合体を考慮した質量比 q 分布を作成して比較することで、3体目の質量が大きくなり KL 機構の影響が大きくなることで、合体率が大きくなり、さらに質量比 q が大きい合体が増えることを明らかにした。また、質量比 q の初期分布を変化させた場合、 $q < 0.4$ の初期の系の数の現象に伴って、 $q < 0.4$ の合体が少なくなるが、初期分布における $q < 0.4$ の割合を本研究の場合のおおよそ半分とした場合にも、オーダーで変化するような大きな変化は見られず、 $q < 0.4$ に十分な合体が起きることが明らかとなった。

最後に、本研究で得られた KL 機構による合体の質量比 q 分布について、実際の合体率を見

積もり、観測と比較する。実際の合体率は、

$$\frac{dR_{\text{KL}}}{dq} = n_{\text{GC}} \times \zeta_{\text{IMBH}} \times \eta \times \Gamma_{\text{sup}} \times f_{\text{KL}} \quad (5.43)$$

によって見積もることができる (Fragione and Bromberg 2019)。ここで、 n_{GC} は球状星団の存在密度、 ζ_{IMBH} は球状星団のうち中心に中間質量ブラックホールをもつものの割合、 η は中間質量ブラックホールに束縛された恒星質量ブラックホールのうちそれが連星である割合、 Γ_{sup} は中間質量ブラックホールに束縛される恒星質量ブラックホールの供給率、 f_{KL} は図 5.24 に示す本研究で得られた KL 機構による合体率である。今、 $n_{\text{GC}} = 0.32 \sim 2.31 \text{ Mpc}^{-3}$ (Portegies Zwart and McMillan 2000, Rodriguez et al. 2015)、 $\zeta_{\text{IMBH}} = 0.2$ (Giersz et al. 2015)、 $\eta = 0.1$ (Fragione and Bromberg 2019) を想定し、さらに恒星質量ブラックホールは重力波放出による 2 体捕獲により中間質量ブラックホールに束縛される (4.4 節、式 (4.18)) と考えると、これはおおよそ Myr の時間スケールで起こるので、 $\Gamma_{\text{sup}} \sim 1 \text{ Myr}^{-1}$ とできる (Fragione and Bromberg 2019)。以上より、実際の合体率は、

$$\begin{aligned} \frac{dR_{\text{KL}}}{dq} &= n_{\text{GC}} \times \zeta_{\text{IMBH}} \times \eta \times \Gamma_{\text{sup}} \times f_{\text{KL}} \\ &= 20 \times (0.32 \sim 2.31) \text{ Gyr}^{-3} \text{yr}^{-1} \times f_{\text{KL}} \\ &= 6.4 \sim 46.2 \text{ Gyr}^{-3} \text{yr}^{-1} \times f_{\text{KL}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

となる。

図 5.26 の左図に $n_{\text{GC}} = 2.31 \text{ Mpc}^{-3}$ とした場合の球状星団における KL 機構によって誘発された合体の実際の合体率 (式 (5.44)) を、右図に LIGO-VIRGO の観測より予測された質量比 q 分布を示している。また、表 5.1 に図 5.26 における質量比 $q < 0.4$ の領域についての数値比較を載せる。観測については、各ビンで図 5.26 の右図青線の平均値とした。表 5.1 より、 $q = 0.156 \sim 0.2$ では 63% 程度以上、 $q = 0.2 \sim 0.3$ では 47% ~ 55% 程度、 $q = 0.3 \sim 0.4$ では 21% ~ 26% 程度の寄与を見込めることが明らかとなった。

表 5.1: 本研究で得られた結果から予測された質量比 q に対する実際の KL 機構による合体率と観測 (図 5.26 の右図青線) の比較: 質量比 $q < 0.4$ の領域についてのみ比較した。観測については、各ビンで図 5.26 の右図青線の平均値とした。表 5.1 より、 $q = 0.156 \sim 0.2$ では 63% 程度以上、 $q = 0.2 \sim 0.3$ では 47% ~ 55% 程度、 $q = 0.3 \sim 0.4$ では 21% ~ 26% 程度の寄与を見込めることが明らかとなった。

	本研究 ($m_3 = 10^3 M_{\odot}$)	本研究 ($m_3 = 10^4 M_{\odot}$)	本研究 ($m_3 = 10^5 M_{\odot}$)	観測 (図 5.26 の右図青線の平均値)
0.156~0.2	0.177	0.221	0.349	0.279
0.2~0.3	0.560	0.498	0.484	1.02
0.3~0.4	0.475	0.559	0.461	2.19

以上のように、本研究では、系の初期条件において直接 N 体計算コードと摂動計算コードの結果が異なる領域を特定し、摂動計算コードの結果が妥当な領域を特定した。さらに、その結果をもとに球状星団の中心に中間質量ブラックホールが存在する場合において、その星団における長

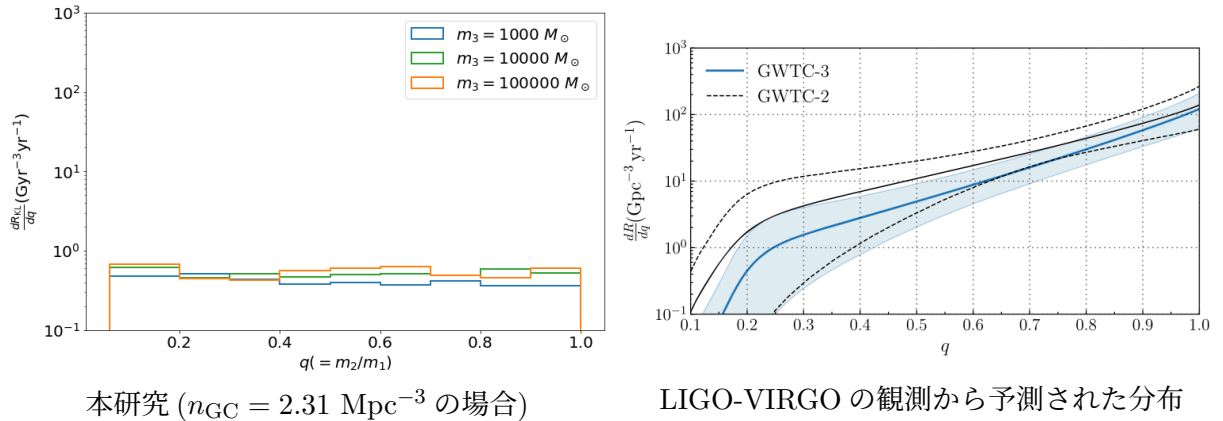


図 5.26: 本研究で得られた結果から予測された質量比 q に対する実際の KL 機構による合体率と観測 (Abbott et al. 2023 の FIG. 10. の右図を引用) の比較: 左図は、式 (5.44) と図 5.24 により予測した、長時間合体を考慮した場合の質量比 q に対する実際の KL 機構による合体率 $\frac{dR_{KL}}{dq}$ ($n_{GC} = 2.31 \text{ Mpc}^{-3}$ の場合) を示す。右図は、LIGO-VIRGO の観測より予測された実際の質量比 q 分布 (Abbott et al. 2023 の FIG. 10. の右図を引用) を示す。ともに縦軸は合体率 ($\text{Gyr}^{-3}\text{yr}^{-1}$)、横軸は質量比 q ($0 \leq q \leq 1$) である。右図は、観測の結果から、The fiducial PP model (Abbott et al. 2021b) をもとに予測されたものである。黒線が GWTC-2 より予測された場合 (点線は 90% 信頼区間) を示し、青線が GWTC-3 より予測された場合 (最新の結果、青影部分は 90% 信頼区間) を示している。2 つの図を比較すると、球状星団における KL 機構によって誘発された合体 (左図) が質量比 $q < 0.4$ の合体に大きく寄与している可能性が高いことがわかる。

時間合体を考慮した質量比 q 分布を予測した。得られた長時間合体を考慮した KL 機構による合体の質量比 q に対する実際の合体率は、 $q < 0.4$ の領域の合体をよく説明できることを示唆した (図 5.26)。これによって、本研究では、球状星団における KL 機構によって誘発された合体は質量比 q が小さい合体、特に $q < 0.3$ の合体の主なソースである可能性が高いと示唆した。

Chapter 6

まとめ

LIGO-VIRGO により、現在までに 90 以上の重力波が観測されている (図 6.1, The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021a, The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021b)。図 6.1 より、合体した連星の質量比 q が 0.4 以下という小さい値をもつものも観測されていることがわかる。これらの質量比 q が小さい連星合体は、従来の孤立した連星の進化による合体機構や星の個数密度が高い星団における力学相互作用による合体では説明し難いとされている (e.g. Giacobbo and Mapelli 2018, Samsing and Hotokezaka 2021)。このような質量比 q が小さい連星合体として、Kozai-Lidov (KL) 機構によって誘発された合体が注目を集めている。

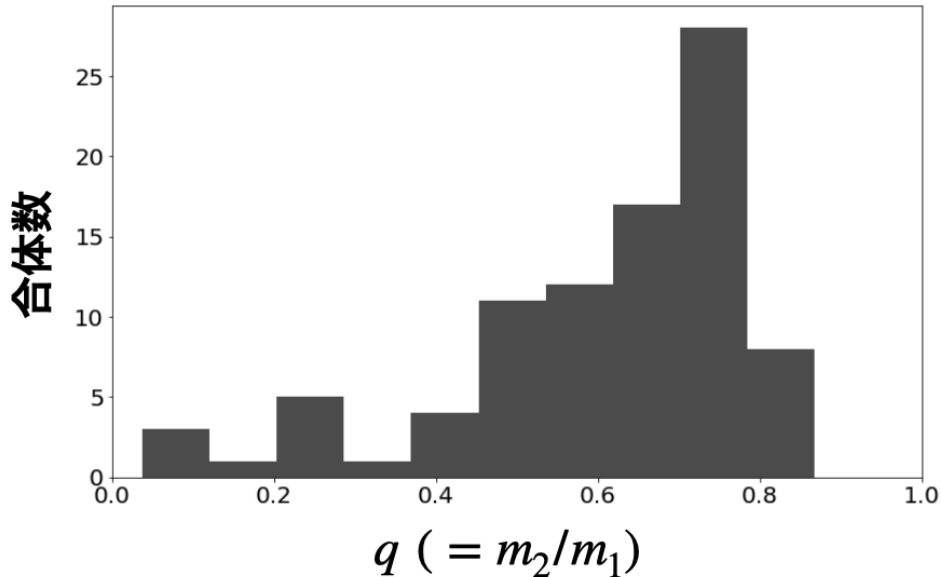


図 6.1: これまでに LIGO-VIRGO Collaboration で観測された重力波信号の質量比分布。重い方の天体を分母 (m_1) にとるため、質量比 q は $0 \leq q \leq 1$ である。縦軸は合体数、横軸は質量比 q である。なお、エラーバーは考慮していない。(The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021a と The LIGO Scientific Collaboration et al. 2021b を参考に作成、図 1.1 を再掲)

KL 機構とは、連星が少し遠方に存在する 3 体目の天体に束縛されているという階層的 3 体系

に特徴的な機構であり、その3体目が連星の離心率を変化させるという効果である。これによって、単独で存在する場合には Hubble 時間以内に合体できないような連星を合体させることができる。また、KL 機構による合体では質量比 q が小さい合体を起こしやすいと考えられている (e.g. Su et al. 2021, Martinez et al. 2022)。このような現象を起こす階層的3体系は、様々なスケールで宇宙に数多く存在していると考えられている (e.g. Valtonen 1996, Khan et al. 2012, Polishook and Brosh 2006, Nesvorný et al. 2011, Margot et al. 2015, Fragione and Bromberg 2019)。中でも特に、球状星団は非常に数の多い天体であり、さらに数十パーセント以上の割合の球状星団の中心には中間質量ブラックホールが存在することを考えられているため (e.g. Miller and Hamilton 2002)、そこには中間質量ブラックホールと恒星質量ブラックホール連星の階層的3体系が多数存在すると考えられている (e.g. Fragione and Bromberg 2019)。そのため本研究では、球状星団中にある中間質量ブラックホールとそれに束縛された恒星質量ブラックホール連星の階層的3体系に着目する。

KL 機構の影響を受けた階層的3体系の力学進化を追うシミュレーションには、直接 N 体計算コードと摂動計算コードの2種類のコードが用いられてきた。直接 N 体計算コードは、短周期の摂動を捉えることができる一方、非常に計算時間が長い点や累積誤差の影響によって、長時間の進化を追うことは難しいとされている。摂動計算コードとは、Secular 近似を取り入れているため、直接 N 体計算コードよりも数百倍以上計算時間が短い一方、近似を取り入れているために短い時間スケールの摂動は捉えることができず、短い時間スケールの摂動が大きく影響するような系では、系の進化を見誤ってしまう。KL 機構によって誘発される合体には、短時間で起こる One Shot 合体と、長時間かけて少しずつ重力波を放出し合体に至る Smooth 合体の2種類があるが (Su et al. 2021)、Smooth 合体は時には 10^8 年以上もかけてゆっくりと起こることもあるため、この種類の合体を考慮した研究は、これまで摂動計算コードのみを用いて行われてきた。摂動計算コードによる結果を適切に解釈するには、 1.0×10^7 年以上の長時間進化を2つのコード両方で追い、結果を統計的に比較することが非常に重要であるが、このような研究は現在まで進んでいなかった。

本研究では、直接 N 体計算コードと摂動計算コードの両方を用いて全く同じ系に対して 3.0×10^7 年までの長時間の進化を追いつき、結果を統計的に比較することで、摂動計算コードは直接 N 体計算コードに比べて合体を少なく見積もってしまうこと、また、系の初期条件において2つのコードの結果が大きく異なる領域が存在することを定量的に明らかにした。さらに、これは Double average の Secular 近似では捉えることのできない短周期の摂動の影響によるものであることを明らかにした。

さらに本研究では、上記の結果に基づいて初期条件における Secular コードが妥当な領域を特定し、その領域において発見された長時間合体から妥当な領域外における長時間合体を外挿し、実際の長時間合体の質量比 q 分布を予測した。この予測された長時間合体を考慮して KL 機構による合体の質量比 q 分布を予測することで、KL 機構によって誘発された合体は $0 \sim 1$ の全ての質量比をおおよそ同程度の割合で生成することが明らかにし、KL 機構による合体が質量比 q が小さな合体をよく説明できることを示唆した。また、3体目の質量が大きくなると、KL 機構の影響が大きくなることで合体率が大きくなり、加えて質量比 q が大きい合体の比率が増えることを明らかにした。さらに、初期分布における $q < 0.4$ の割合を本研究の場合のおおよそ半分とした場合にも、オーダーで変化するような大きな変化は見られず、 $q < 0.4$ に十分な合体が起きることが明らかにした。

最後に、上記の結果をもとに長時間合体を考慮した KL 機構による合体の質量比 q に対する実際の合体率を予測し、LIGO-VIRGO の観測から予測された合体率と比較した。これによって、本研究では、球状星団における KL 機構によって誘発された合体は質量比 q が小さい合体、特に $q < 0.3$ の合体の主なソースである可能性が高いと示唆した。

謝辞

無知であった私に様々なことを教えてくださり、研究活動を引っ張ってくださった吉田直紀教授に感謝いたします。また、研究に際して、シミュレーションコードの提供をはじめ、何度も議論していただき、様々なアドバイスをいただいた Alessandro Alberto Trani 様、研究議論をはじめ修士論文執筆にあたり非常に多くのアドバイスをいただいた吉田研究室助教の森脇可奈様に深く感謝いたします。様々な面でアドバイスをくださった、直川史寛様や仲里佑利奈様をはじめ研究室の皆様にも深く感謝いたします。現在までに様々な形で議論をしアドバイスをくださった全ての方に感謝いたします。最後に、精神面で大きく支えてくださった、石崎梨理様、杉山純菜様をはじめとする友人達、および家族に深く感謝いたします。皆様の支えなしでは修士論文を書き上げることはできませんでした。本当にありがとうございました。

参考文献

- B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, B. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, S. B. Anderson, W. G. Anderson, K. Arai, M. A. Arain, M. C. Araya, C. C. Arceneaux, J. S. Areeda, N. Arnaud, K. G. Arun, S. Ascenzi, G. Ashton, M. Ast, S. M. Aston, P. Astone, P. Aufmuth, C. Aulbert, S. Babak, P. Bacon, M. K. M. Bader, P. T. Baker, F. Baldacchini, G. Ballardín, S. W. Ballmer, J. C. Barayoga, S. E. Barclay, B. C. Barish, D. Barker, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, J. C. Batch, C. Baune, V. Bavigadda, M. Bazzan, B. Behnke, M. Beggler, C. Belczynski, A. S. Bell, C. J. Bell, B. K. Berger, J. Bergman, G. Bergmann, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, S. Bhagwat, R. Bhandare, I. A. Bilenko, G. Billingsley, J. Birch, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, A. Bisht, M. Bitossi, C. Biwer, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, S. Bloemen, O. Bock, T. P. Bodiya, M. Boer, G. Bogaert, C. Bogan, A. Bohe, P. Bojtós, C. Bond, F. Bondu, R. Bonnard, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, V. B. Braginsky, M. Branchesi, J. E. Brau, T. Briant, A. Brillet, M. Brinkmann, V. Brisson, P. Brockill, A. F. Brooks, D. A. Brown, D. D. Brown, N. M. Brown, C. C. Buchanan, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, T. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, K. C. Cannon, J. Cao, C. D. Capano, E. Capocasa, F. Carbognani, S. Caride, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, C. B. Cepeda, L. Cerboni Baiardi, G. Cerretani, E. Cesarini, R. Chakraborty, T. Chalermsoongsak, S. J. Chamberlin, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. Chassande-Mottin, H. Y. Chen, Y. Chen, C. Cheng, A. Chincarini, A. Chiummo, H. S. Cho, M. Cho, J. H. Chow, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, S. Chung, G. Ciani, F. Clara, J. A. Clark, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, A. Colla, C. G. Collette, L. Cominsky, M. Constancio, A. Conte, L. Conti, D. Cook, T. R. Corbitt, N. Cornish, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, E. E. Cowan, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, K. Craig, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, S. G. Crowder, A. M. Cruise, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, T. Dal Canton, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, N. S. Darman, C. F. Da Silva Costa, V. Dattilo, I. Dave, H. P. Daveloza, M. Davier, G. S. Davies, E. J. Daw, R. Day, S. De, D. DeBra, G. Debreczeni, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, W. Del Pozzo, T. Denker, T. Dent, H. Dereli, V. Dergachev, R. T. DeRosa, R. De Rosa, R. DeSalvo, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, L. Di Fiore, M. Di Giovanni, A. Di Lieto, S. Di Pace, I. Di Palma, A. Di Virgilio, G. Dojcinoski, V. Dolique, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, R. Douglas, T. P. Downes, M. Drago, R. W. P. Drever, J. C. Driggers, Z. Du, M. Ducrot, S. E. Dwyer, T. B. Edo, M. C.

Edwards, A. Effler, H. B. Eggenstein, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, W. Engels, R. C. Essick, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, R. Everett, M. Factourovich, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, X. Fan, Q. Fang, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, M. Favata, M. Fays, H. Fehrmann, M. M. Fejer, D. Feldbaum, I. Ferrante, E. C. Ferreira, F. Ferrini, F. Fidecaro, L. S. Finn, I. Fiori, D. Fiorucci, R. P. Fisher, R. Flaminio, M. Fletcher, H. Fong, J. D. Fournier, S. Franco, S. Frasca, F. Frasconi, M. Frede, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, T. T. Fricke, P. Fritschel, V. V. Frolov, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. G. Gabbard, J. R. Gair, L. Gammaitoni, S. G. Gaonkar, F. Garufi, A. Gatto, G. Gaur, N. Gehrels, G. Gemme, B. Gendre, E. Genin, A. Gennai, J. George, L. Gergely, V. Germain, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, S. Ghosh, J. A. Giaime, K. D. Giardino, A. Giazotto, K. Gill, A. Glaefke, J. R. Gleason, E. Goetz, R. Goetz, L. Gondan, G. González, J. M. Gonzalez Castro, A. Gopakumar, N. A. Gordon, M. L. Gorodetsky, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, C. Graef, P. B. Graff, M. Granata, A. Grant, S. Gras, C. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. J. S. Greenhalgh, P. Groot, H. Grote, S. Grunewald, G. M. Guidi, X. Guo, A. Gupta, M. K. Gupta, K. E. Gushwa, E. K. Gustafson, R. Gustafson, J. J. Hacker, B. R. Hall, E. D. Hall, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, J. Hanson, T. Hardwick, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, M. J. Hart, M. T. Hartman, C. J. Haster, K. Haughian, J. Healy, J. Heefner, A. Heidmann, M. C. Heintze, G. Heinzl, H. Heitmann, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, J. Hennig, A. W. Heptonstall, M. Heurs, S. Hild, D. Hoak, K. A. Hodge, D. Hofman, S. E. Hollitt, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, D. J. Hosken, J. Hough, E. A. Houston, E. J. Howell, Y. M. Hu, S. Huang, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey, S. Husa, S. H. Huttner, T. Huynh-Dinh, A. Idrisy, N. Indik, D. R. Ingram, R. Inta, H. N. Isa, J. M. Isac, M. Isi, G. Islas, T. Isogai, B. R. Iyer, K. Izumi, M. B. Jacobson, T. Jacqmin, H. Jang, K. Jani, P. Jaranowski, S. Jawahar, F. Jiménez-Forteza, W. W. Johnson, N. K. Johnson-McDaniel, D. I. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, K. Haris, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. Karki, M. Kasprzack, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, T. Kaur, K. Kawabe, F. Kawazoe, F. Kéfélian, M. S. Kehl, D. Keitel, D. B. Kelley, W. Kells, R. Kennedy, D. G. Keppel, J. S. Key, A. Khalaidovski, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, Z. Khan, E. A. Khazanov, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. Kim, K. Kim, Nam-Gyu Kim, Namjun Kim, Y. M. Kim, E. J. King, P. J. King, D. L. Kinzel, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimenko, S. M. Koehlenbeck, K. Kokeyama, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, S. Koranda, M. Korobko, W. Z. Korth, I. Kowalska, D. B. Kozak, V. Kringel, B. Krishnan, A. Królak, C. Krueger, G. Kuehn, P. Kumar, R. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, P. Kwee, B. D. Lackey, M. Landry, J. Lange, B. Lantz, P. D. Lasky, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, E. O. Lebigot, C. H. Lee, H. K. Lee, H. M. Lee, K. Lee, A. Lenon, M. Leonardi, J. R. Leong, N. Leroy, N. Létendre, Y. Levin, B. M. Levine, T. G. F. Li, A. Libson, T. B. Littenberg, N. A. Lockerbie, J. Logue, A. L. Lombardi, L. T. London, J. E. Lord, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, A. P. Lundgren, J. Luo, R. Lynch, Y. Ma, T. MacDonald, B. Machenschalk, M. MacInnis, D. M. Macleod, F. Magaña-Sandoval, R. M. Magee, M. Mageswaran, E. Majorana, I. Maksimovic, V. Malvezzi, N. Man, I. Mandel, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, A. S. Markosyan, E. Maros, F. Martelli, L. Martellini, I. W. Martin, R. M. Martin, D. V. Martynov, J. N. Marx, K. Mason, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, F. Matichard, L. Matone, N. Mavalvala, N. Mazumder, G. Mazzolo, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, S. C. McGuire, G. McIntyre, J. McIver, D. J. McManus, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, J. Meidam, A. Melatos, G. Mendell, D. Mendoza-Gandara, R. A. Mercer, E. Merilh, M. Merzougui, S. Meshkov,

C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Mezzani, H. Miao, C. Michel, H. Middleton, E. E. Mikhailov, L. Milano, J. Miller, M. Millhouse, Y. Minenkov, J. Ming, S. Mirshekari, C. Mishra, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, A. Moggi, M. Mohan, S. R. P. Mohapatra, M. Montani, B. C. Moore, C. J. Moore, D. Moraru, G. Moreno, S. R. Morriss, K. Mossavi, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, C. L. Mueller, G. Mueller, A. W. Muir, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, S. Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, D. J. Murphy, P. G. Murray, A. Mytidis, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, V. Necula, K. Nedkova, G. Nelemans, M. Neri, A. Neunzert, G. Newton, T. T. Nguyen, A. B. Nielsen, S. Nissanke, A. Nitz, F. Nocera, D. Nolting, M. E. N. Normandin, L. K. Nuttall, J. Oberling, E. Ochsner, J. O'Dell, E. Oelker, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, M. Oliver, P. Oppermann, Richard J. Oram, B. O'Reilly, R. O'Shaughnessy, C. D. Ott, D. J. Ottaway, R. S. Ottens, H. Overmier, B. J. Owen, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, A. Pal-Singh, H. Pan, Y. Pan, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, M. A. Papa, H. R. Paris, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Pasuolo, B. Patricelli, Z. Patrick, B. L. Pearlstone, M. Pedraza, R. Pedurand, L. Pekowsky, A. Pele, S. Penn, A. Perreca, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, O. Piccinni, M. Pichot, M. Pickenpack, F. Piergiovanni, V. Pierro, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pitkin, J. H. Poeld, R. Poggiani, P. Popolizio, A. Post, J. Powell, J. Prasad, V. Predoi, S. S. Premachandra, T. Prestegard, L. R. Price, M. Prijatelj, M. Principe, S. Privitera, R. Prix, G. A. Prodi, L. Prokhorov, O. Puncken, M. Punturo, P. Puppo, M. Pürerer, H. Qi, J. Qin, V. Quetschke, E. A. Quintero, R. Quitzow-James, F. J. Raab, D. S. Rabeling, H. Radkins, P. Raffai, S. Raja, M. Rakhmanov, C. R. Ramet, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, V. Re, J. Read, C. M. Reed, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, H. Rew, S. D. Reyes, F. Ricci, K. Riles, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, J. D. Romano, R. Romano, G. Romanov, J. H. Romie, D. Rosińska, S. Rowan, A. Rüdiger, P. Ruggi, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, L. Sadeghian, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, L. Sammut, L. M. Sampson, E. J. Sanchez, V. Sandberg, B. Sandeen, G. H. Sanders, J. R. Sanders, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, P. R. Saulson, O. Sauter, R. L. Savage, A. Sawadsky, P. Schale, R. Schilling, J. Schmidt, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, E. Schreiber, D. Schuette, B. F. Schutz, J. Scott, S. M. Scott, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, G. Serna, Y. Setyawati, A. Sevigny, D. A. Shaddock, T. Shaffer, S. Shah, M. S. Shahriar, M. Shaltev, Z. Shao, B. Shapiro, P. Shawhan, A. Sheperd, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Siellez, X. Siemens, D. Sigg, A. D. Silva, D. Simakov, A. Singer, L. P. Singer, A. Singh, R. Singh, A. Singhal, A. M. Sintès, B. J. J. Slagmolen, J. R. Smith, M. R. Smith, N. D. Smith, R. J. E. Smith, E. J. Son, B. Sorazu, F. Sorrentino, T. Souradeep, A. K. Srivastava, A. Staley, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, B. C. Stephens, S. P. Stevenson, R. Stone, K. A. Strain, N. Straniero, G. Stratta, N. A. Strauss, S. Strigin, R. Sturani, A. L. Stuver, T. Z. Summerscales, L. Sun, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, D. Talukder, D. B. Tanner, M. Tápai, S. P. Tarabrin, A. Taracchini, R. Taylor, T. Theeg, M. P. Thirugnanasambandam, E. G. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, K. A. Thorne, K. S. Thorne, E. Thrane, S. Tiwari, V. Tiwari, K. V. Tokmakov, C. Tomlinson, M. Tonelli, C. V. Torres, C. I. Torrie, D. Töyrä, F. Travasso, G. Traylor, D. Trifirò, M. C. Tringali, L. Trozzo, M. Tse, M. Turconi, D. Tuyenbayev, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Vallisneri, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, S. Vass, M. Vasúth, R. Vaulin, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch,

- K. Venkateswara, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Viceré, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, D. Voss, W. D. Vousden, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, S. J. Waldman, M. Walker, L. Wallace, S. Walsh, G. Wang, H. Wang, M. Wang, X. Wang, Y. Wang, H. Ward, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, T. Welborn, L. Wen, P. Weßels, T. Westphal, K. Wette, J. T. Whelan, S. E. Whitcomb, D. J. White, B. F. Whiting, K. Wiesner, C. Wilkinson, P. A. Willems, L. Williams, R. D. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, M. H. Wimmer, L. Winkelmann, W. Winkler, C. C. Wipf, A. G. Wiseman, H. Wittel, G. Woan, J. Worden, J. L. Wright, G. Wu, J. Yablon, I. Yakushin, W. Yam, H. Yamamoto, C. C. Yancey, M. J. Yap, H. Yu, M. Yvert, A. Zadrożny, L. Zangrando, M. Zanolin, J. P. Zenderi, M. Zevin, F. Zhang, L. Zhang, M. Zhang, Y. Zhang, C. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, M. E. Zucker, S. E. Zuraw, J. Zweizig, LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, February 2016. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Afrough, B. Agarwal, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, B. Allen, G. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, S. V. Angelova, S. Antier, S. Appert, K. Arai, M. C. Araya, J. S. Areeda, N. Arnaud, K. G. Arun, S. Ascenzi, G. Ashton, M. Ast, S. M. Aston, P. Astone, D. V. Atallah, P. Aufmuth, C. Aulbert, K. AultONeal, C. Austin, A. Avila-Alvarez, S. Babak, P. Bacon, M. K. M. Bader, S. Bae, M. Bailes, P. T. Baker, F. Baldaccini, G. Ballardín, S. W. Ballmer, S. Banagiri, J. C. Barayoga, S. E. Barclay, B. C. Barish, D. Barker, K. Barkett, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, S. D. Barthelmy, J. Bartlett, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, J. C. Batch, M. Bawaj, J. C. Bayley, M. Bazzan, B. Bécsy, C. Beer, M. Bejger, I. Belahcene, A. S. Bell, B. K. Berger, G. Bergmann, S. Bernuzzi, J. J. Bero, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, S. Bhagwat, R. Bhandare, I. A. Bilenko, G. Billingsley, C. R. Billman, J. Birch, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, S. Biscoveanu, A. Bisht, M. Bitossi, C. Biwer, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, J. Blackman, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, S. Bloemen, O. Bock, N. Bode, M. Boer, G. Bogaert, A. Bohe, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, K. Bossie, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, M. Branchesi, J. E. Brau, T. Briant, A. Brillet, M. Brinkmann, V. Brisson, P. Brockill, J. E. Broida, A. F. Brooks, D. A. Brown, D. D. Brown, S. Brunett, C. C. Buchanan, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, T. A. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, M. Canepa, P. Canizares, K. C. Cannon, H. Cao, J. Cao, C. D. Capano, E. Capocasa, F. Carbognani, S. Caride, M. F. Carney, G. Carullo, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, C. B. Cepeda, P. Cerdá-Durán, G. Cerretani, E. Cesarini, S. J. Chamberlin, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. Chase, E. Chassande-Mottin, D. Chatterjee, K. Chatziioannou, B. D. Cheeseboro, H. Y. Chen, X. Chen, Y. Chen, H. P. Cheng, H. Chia, A. Chincarini, A. Chiummo, T. Chmiel, H. S. Cho, M. Cho, J. H. Chow, N. Christensen, Q. Chu, A. J. K. Chua, S. Chua, A. K. W. Chung, S. Chung, G. Ciani, R. Ciolfi, C. E. Cirelli, A. Cirone, F. Clara, J. A. Clark, P. Clearwater, F. Cleva, C. Cocchieri, E. Coccia, P. F. Cohadon, D. Cohen, A. Colla, C. G. Collette, L. R. Cominsky, M. Constanancio, L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, K. R. Corley, N. Cornish, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, P. B. Covas, E. E. Cowan,

D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, S. G. Crowder, T. J. Cullen, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, T. Dal Canton, G. Dály, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, A. Dasgupta, C. F. Da Silva Costa, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, D. Davis, E. J. Daw, B. Day, S. De, D. DeBra, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, W. Del Pozzo, N. Demos, T. Denker, T. Dent, R. De Pietri, V. Dergachev, R. De Rosa, R. T. DeRosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, O. de Varona, J. Devenson, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, T. Dietrich, L. Di Fiore, M. Di Giovanni, T. Di Girolamo, A. Di Lieto, S. Di Pace, I. Di Palma, F. Di Renzo, Z. Doctor, V. Dolique, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, R. Douglas, M. Dovale Álvarez, T. P. Downes, M. Drago, C. Dreissigacker, J. C. Driggers, Z. Du, M. Ducrot, R. Dudi, P. Dupej, S. E. Dwyer, T. B. Edo, M. C. Edwards, A. Effler, H. B. Eggenstein, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, R. A. Eisenstein, R. C. Essick, D. Estevez, Z. B. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, M. Factourovich, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, X. Fan, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, E. J. Fauchon-Jones, M. Favata, M. Fays, C. Fee, H. Fehrmann, J. Feicht, M. M. Fejer, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, E. C. Ferreira, F. Ferrini, F. Fidecaro, D. Finstad, I. Fiori, D. Fiorucci, M. Fishbach, R. P. Fisher, M. Fitz-Axen, R. Flaminio, M. Fletcher, H. Fong, J. A. Font, P. W. F. Forsyth, S. S. Forsyth, J. D. Fournier, S. Frasca, F. Frasconi, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, E. M. Fries, P. Fritschel, V. V. Frolov, P. Fulda, M. Fyffe, H. Gabbard, B. U. Gadre, S. M. Gaebel, J. R. Gair, L. Gammaitoni, M. R. Ganija, S. G. Gaonkar, C. Garcia-Quiros, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, G. Gaur, V. Gayathri, N. Gehrels, G. Gemme, E. Genin, A. Gennai, D. George, J. George, L. Gergely, V. Germain, S. Ghonge, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, S. Ghosh, J. A. Giaime, K. D. Giardino, A. Giazotto, K. Gill, L. Glover, E. Goetz, R. Goetz, S. Gomes, B. Goncharov, G. González, J. M. Gonzalez Castro, A. Gopakumar, M. L. Gorodetsky, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, A. Grado, C. Graef, M. Granata, A. Grant, S. Gras, C. Gray, G. Greco, A. C. Green, E. M. Gretarsson, P. Groot, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, G. M. Guidi, X. Guo, A. Gupta, M. K. Gupta, K. E. Gushwa, E. K. Gustafson, R. Gustafson, O. Halim, B. R. Hall, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. A. Hannuksela, J. Hanson, T. Hardwick, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, M. J. Hart, C. J. Haster, K. Haughian, J. Healy, A. Heidmann, M. C. Heintze, H. Heitmann, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, J. Hennig, A. W. Heptonstall, M. Heurs, S. Hild, T. Hinderer, W. C. G. Ho, D. Hoak, D. Hofman, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, C. Horst, J. Hough, E. A. Houston, E. J. Howell, A. Hreibi, Y. M. Hu, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey, S. Husa, S. H. Huttner, T. Huynh-Dinh, N. Indik, R. Inta, G. Intini, H. N. Isa, J. M. Isac, M. Isi, B. R. Iyer, K. Izumi, T. Jacqmin, K. Jani, P. Jaranowski, S. Jawahar, F. Jiménez-Forteza, W. W. Johnson, N. K. Johnson-McDaniel, D. I. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, J. Junker, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. J. Kapadia, S. Karki, K. S. Karvinen, M. Kasprzack, W. Kastaun, M. Katolik, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, K. Kawabe, F. Kéfélian, D. Keitel, A. J. Kemball, R. Kennedy, C. Kent, J. S. Key, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, Z. Khan, E. A. Khazanov, N. Kijbunchoo, Chunglee Kim, J. C. Kim, K. Kim, W. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, S. J. Kimbrell, E. J. King, P. J. King, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimenko, T. D. Knowles, P. Koch, S. M. Koehlenbeck, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, M. Korobko, W. Z. Korth, I. Kowalska, D. B. Kozak, C. Krämer, V. Kringel, B. Krishnan, A. Królak, G. Kuehn, P. Kumar, R. Kumar, S. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, S. Kwang, B. D. Lackey, K. H. Lai, M. Landry, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, R. K. Lanza, S. L. Larson, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, C. H. Lee, H. K. Lee,

H. M. Lee, H. W. Lee, K. Lee, J. Lehmann, A. Lenon, E. Leon, M. Leonardi, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, T. G. F. Li, S. D. Linker, T. B. Littenberg, J. Liu, X. Liu, R. K. L. Lo, N. A. Lockerbie, L. T. London, J. E. Lord, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, R. Lynch, Y. Ma, R. Macas, S. Macfoy, B. Machenschalk, M. MacInnis, D. M. Macleod, I. Magaña Hernandez, F. Magaña-Sandoval, L. Magaña Zertuche, R. M. Magee, E. Majorana, I. Maksimovic, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, P. Marsh, F. Martelli, L. Martellini, I. W. Martin, R. M. Martin, D. V. Martynov, J. N. Marx, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, F. Matchard, L. Matone, N. Mavalvala, N. Mazumder, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, L. McCuller, S. C. McGuire, G. McIntyre, J. McIver, D. J. McManus, L. McNeill, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, M. Mehmet, J. Meidam, E. Mejuto-Villa, A. Melatos, G. Mendell, R. A. Mercer, E. L. Merilh, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, R. Metzдорff, P. M. Meyers, H. Miao, C. Michel, H. Middleton, E. E. Mikhailov, L. Milano, A. L. Miller, B. B. Miller, J. Miller, M. Millhouse, M. C. Milovich-Goff, O. Minazzoli, Y. Minenkov, J. Ming, C. Mishra, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, D. Moffa, A. Moggi, K. Mogushi, M. Mohan, S. R. P. Mohapatra, I. Molina, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, G. Moreno, S. Morisaki, S. R. Morriss, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, G. Mueller, A. W. Muir, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, S. Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, M. Muratore, P. G. Murray, A. Nagar, K. Napier, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, A. Neunzert, L. Nevin, J. M. Newport, G. Newton, K. K. Y. Ng, P. Nguyen, T. T. Nguyen, D. Nichols, A. B. Nielsen, S. Nissanke, A. Nitz, A. Noack, F. Nocera, D. Nolting, C. North, L. K. Nuttall, J. Oberling, G. D. O'Dea, G. H. Ogini, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, M. A. Okada, M. Oliver, P. Oppermann, Richard J. Oram, B. O'Reilly, R. Ormiston, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, S. Ossokine, D. J. Ottaway, H. Overmier, B. J. Owen, A. E. Pace, J. Page, M. A. Page, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, A. Pal-Singh, Howard Pan, Huang-Wei Pan, B. Pang, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, M. A. Papa, A. Parida, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, M. Patil, B. Patricelli, B. L. Pearlstone, M. Pedraza, R. Pedurand, L. Pekowsky, A. Pele, S. Penn, C. J. Perez, A. Perreca, L. M. Perri, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, O. J. Piccinni, M. Pichot, F. Piergiovanni, V. Pierro, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pirello, M. Pitkin, M. Poe, R. Poggiani, P. Popolizio, E. K. Porter, A. Post, J. Powell, J. Prasad, J. W. W. Pratt, G. Pratten, V. Predoi, T. Prestegard, M. Prijatelj, M. Principe, S. Privitera, R. Prix, G. A. Prodi, L. G. Prokhorov, O. Puncken, M. Punturo, P. Puppato, M. Pürerer, H. Qi, V. Quetschke, E. A. Quintero, R. Quitzow-James, F. J. Raab, D. S. Rabeling, H. Radkins, P. Raffai, S. Raja, C. Rajan, B. Rajbhandari, M. Rakhmanov, K. E. Ramirez, A. Ramos-Buades, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, J. Read, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, W. Ren, S. D. Reyes, F. Ricci, P. M. Ricker, S. Rieger, K. Riles, M. Rizzo, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, J. D. Romano, R. Romano, C. L. Romel, J. H. Romie, D. Rosińska, M. P. Ross, S. Rowan, A. Rüdiger, P. Ruggi, G. Rutins, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, L. Sadeghian, M. Sakellariadou, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, L. Sammut, L. M. Sampson, E. J. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, V. Sandberg, J. R. Sanders, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, P. R. Saulson, O. Sauter, R. L. Savage, A. Sawadsky, P. Schale, M. Scheel, J. Scheuer, J. Schmidt, P. Schmidt, R. Schnabel,

- R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, E. Schreiber, D. Schuette, B. W. Schulte, B. F. Schutz, S. G. Schwalbe, J. Scott, S. M. Scott, E. Seidel, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, D. A. Shaddock, T. J. Shaffer, A. A. Shah, M. S. Shahriar, M. B. Shaner, L. Shao, B. Shapiro, P. Shawhan, A. Sheperd, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Siellez, X. Siemens, M. Sieniawska, D. Sigg, A. D. Silva, L. P. Singer, A. Singh, A. Singhal, A. M. Sintes, B. J. J. Slagmolen, B. Smith, J. R. Smith, R. J. E. Smith, S. Somala, E. J. Son, J. A. Sonnenberg, B. Sorazu, F. Sorrentino, T. Souradeep, A. P. Spencer, A. K. Srivastava, K. Staats, A. Staley, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, S. P. Stevenson, R. Stone, D. J. Stops, K. A. Strain, G. Stratta, S. E. Strigin, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, T. Z. Summerscales, L. Sun, S. Sunil, J. Suresh, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, S. C. Tait, C. Talbot, D. Talukder, D. B. Tanner, M. Tápai, A. Taracchini, J. D. Tasson, J. A. Taylor, R. Taylor, S. V. Tewari, T. Theeg, F. Thies, E. G. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, K. A. Thorne, K. S. Thorne, E. Thrane, S. Tiwari, V. Tiwari, K. V. Tokmakov, K. Toland, M. Tonelli, Z. Tornasi, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, D. Töyrä, F. Travasso, G. Traylor, J. Trinastic, M. C. Tringali, L. Trozzo, K. W. Tsang, M. Tse, R. Tso, L. Tsukada, D. Tsuna, D. Tuyenbayev, K. Ueno, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Vallisneri, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vanderhyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, V. Varma, S. Vass, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, G. Venugopalan, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Viceré, A. D. Viets, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, R. Walet, M. Walker, L. Wallace, S. Walsh, G. Wang, H. Wang, J. Z. Wang, W. H. Wang, Y. F. Wang, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, J. Watchi, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, L. Wen, E. K. Wessel, P. Weßels, J. Westerweck, T. Westphal, K. Wette, J. T. Whelan, S. E. Whitcomb, B. F. Whiting, C. Whittle, D. Wilken, D. Williams, R. D. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, M. H. Wimmer, W. Winkler, C. C. Wipf, H. Wittel, G. Woan, J. Woehler, J. Wofford, K. W. K. Wong, J. Worden, J. L. Wright, D. S. Wu, D. M. Wysocki, S. Xiao, H. Yamamoto, C. C. Yancey, L. Yang, M. J. Yap, M. Yazback, Hang Yu, Haocun Yu, M. Yvert, A. Zadrožny, M. Zanolin, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, L. Zhang, M. Zhang, T. Zhang, Y. H. Zhang, C. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, S. J. Zhu, X. J. Zhu, A. B. Zimmerman, M. E. Zucker, J. Zweizig, LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101, October 2017. doi: 10.1103/PhysRevLett.119.161101.
- R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, A. Aich, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, S. Akcay, G. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, S. V. Angelova, S. Ansoldi, S. Antier, S. Appert, K. Arai, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Arnaud, S. M. Aronson, K. G. Arun, Y. Asali, S. Ascenzi, G. Ashton, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, P. Aufmuth, K. AultONeal, C. Austin, V. Avendano, S. Babak, P. Bacon, F. Badaracco, M. K. M. Bader, S. Bae, A. M. Baer, J. Baird, F. Baldaccini, G. Ballardín, S. W. Ballmer, A. Bals, A. Balsamo, G. Baltus, S. Banagiri, D. Bankar, R. S. Bankar, J. C. Barayoga, C. Barbieri, B. C. Barish, D. Barker, K. Barkett, P. Barneo, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj, J. C. Bayley, M. Bazzan, B. Bécsy, M. Bejger, I. Belahcene, A. S. Bell, D. Beniwal, M. G. Benjamin, R. Benkel, J. D. Bentley, F. Bergamin,

B. K. Berger, G. Bergmann, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, R. Bhandare, A. V. Bhandari, J. Bidler, E. Biggs, I. A. Bilenko, G. Billingsley, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bisch, S. Biscoveanu, A. Bisht, G. Bissenbayeva, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, J. Blackman, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, Y. Boetzel, G. Bogaert, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnard, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, V. Bossilkov, J. Bosveld, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, M. Branchesi, J. E. Brau, M. Breschi, T. Briant, J. H. Briggs, F. Brighenti, A. Brillet, M. Brinkmann, R. Brito, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, G. Bruno, R. Bruntz, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskalic, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, J. D. Callaghan, T. A. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, M. Canepa, K. C. Cannon, H. Cao, J. Cao, G. Carapella, F. Carbognani, S. Caride, M. F. Carney, G. Carullo, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, J. Castañeda, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, O. Chaibi, K. Chakravarti, C. Chan, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, D. Chatterjee, M. Chaturvedi, K. Chatziioannou, H. Y. Chen, X. Chen, Y. Chen, H. P. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Chia, F. Chiadini, R. Chierici, A. Chincarini, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, M. Cho, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, K. W. Chung, S. Chung, G. Ciani, P. Ciecielag, M. Cieřlar, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, J. A. Clark, P. Clearwater, S. Clesse, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, D. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, C. Collins, M. Colpi, M. Constancio, L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, P. B. Covas, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, M. Croquette, S. G. Crowder, J. R. Cudell, T. J. Cullen, A. Cumming, R. Cummings, L. Cunningham, E. Cuoco, M. Curylo, T. Dal Canton, G. Dálya, A. Dana, L. M. Daneshgaran-Bajastani, B. D'Angelo, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, C. Darsow-Fromm, A. Dasgupta, L. E. H. Datrier, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, G. S. Davies, D. Davis, E. J. Daw, D. DeBra, M. Deenadayalan, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, M. Delfavero, N. De Lillo, W. Del Pozzo, L. M. DeMarchi, V. D'Emilio, N. Demos, T. Dent, R. De Pietri, R. De Rosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, O. de Varona, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, M. Diaz-Ortiz, T. Dietrich, L. Di Fiore, C. Di Fronzo, C. Di Giorgio, F. Di Giovanni, M. Di Giovanni, T. Di Girolamo, A. Di Lieto, B. Ding, S. Di Pace, I. Di Palma, F. Di Renzo, A. K. Divakarla, A. Dmitriev, Z. Doctor, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, T. P. Downes, M. Drago, J. C. Driggers, Z. Du, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, D. D'Urso, S. E. Dwyer, P. J. Easter, G. Eddolls, B. Edelman, T. B. Edo, O. Edy, A. Effler, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, A. Ejlli, L. Errico, R. C. Essick, H. Estelles, D. Estevez, Z. B. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, B. E. Ewing, V. Fafone, S. Fairhurst, X. Fan, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, E. J. Fauchon-Jones, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, J. Feicht, M. M. Fejer, F. Feng, E. Fenyvesi, D. L. Ferguson, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, E. C. Ferreira, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, I. Fiori, D. Fiorucci, M. Fishbach, R. P. Fisher, R. Fittipaldi, M. Fitz-Axen, V. Fiumara, R. Flaminio, E. Floden, E. Flynn, H. Fong, J. A. Font, P. W. F. Forsyth, J. D. Fournier, S. Frasca, F. Frasconi, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. Fronzè, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, B. U. Gadre, S. M. Gaebel, J. R. Gair, S. Galaudage, D. Ganapathy, A. Ganguly, S. G. Gaonkar, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, V. Gayathri, G. Gemme, E. Genin, A. Gennai, D. George, J. George,

L. Gergely, S. Ghonge, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, S. Ghosh, B. Giacomazzo, J. A. Giaime, K. D. Giardino, D. R. Gibson, C. Gier, K. Gill, J. Glanzer, J. Griesmer, P. Godwin, E. Goetz, R. Goetz, N. Gohlke, B. Goncharov, G. González, A. Gopakumar, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, B. Grace, A. Grado, M. Granata, A. Grant, S. Gras, P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, E. M. Gretarsson, H. L. Griggs, G. Grignani, A. Grimaldi, S. J. Grimm, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, G. M. Guidi, A. R. Guimaraes, G. Guixé, H. K. Gulati, Y. Guo, A. Gupta, Anchal Gupta, P. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, L. Haegel, O. Halim, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. A. Hannuksela, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Haughian, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, M. C. Heintze, J. Heinze, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, E. Hennes, J. Hennig, M. Heurs, S. Hild, T. Hinderer, S. Y. Hoback, S. Hochheim, E. Hofgard, D. Hofman, A. M. Holgado, N. A. Holland, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, C. Horst, J. Hough, E. J. Howell, C. G. Hoy, Y. Huang, M. T. Hübner, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey, V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, R. Huxford, T. Huynh-Dinh, B. Idzkowski, A. Iess, H. Inchauspe, C. Ingram, G. Intini, J. M. Isac, M. Isi, B. R. Iyer, T. Jacqmin, S. J. Jadhav, S. P. Jadhav, A. L. James, K. Jani, N. N. Jantahalur, P. Jaranowski, D. Jariwala, R. Jaume, A. C. Jenkins, J. Jiang, G. R. Johns, N. K. Johnson-McDaniel, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, P. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, J. Junker, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. J. Kapadia, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, W. Kastaun, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, K. Kawabe, F. Kéfélian, D. Keitel, A. Keivani, R. Kennedy, J. S. Key, S. Khadka, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, Z. A. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, Chunglee Kim, G. J. Kim, J. C. Kim, K. Kim, W. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, P. J. King, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimenko, T. D. Knowles, E. Knyazev, P. Koch, S. M. Koehlenbeck, G. Koekoek, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, W. Z. Korth, M. Kovalam, D. B. Kozak, V. Kringel, N. V. Krishnendu, A. Królak, N. Krupinski, G. Kuehn, A. Kumar, P. Kumar, Rahul Kumar, Rakesh Kumar, S. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, B. D. Lackey, D. Laghi, E. Lalande, T. L. Lam, A. Lamberts, M. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, R. K. Lanza, I. La Rosa, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Lecoecuche, C. H. Lee, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, J. Lehmann, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, A. K. Y. Li, J. Li, K. Li, T. G. F. Li, X. Li, F. Linde, S. D. Linker, J. N. Linley, T. B. Littenberg, J. Liu, X. Liu, M. Llorens-Monteagudo, R. K. L. Lo, A. Lockwood, L. T. London, A. Longo, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, Y. Ma, R. Macas, S. Macfoy, M. MacInnis, D. M. Macleod, I. A. O. MacMillan, A. Macquet, I. Magaña Hernandez, F. Magaña-Sandoval, R. M. Magee, E. Majorana, I. Maksimovic, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, V. Martinez, D. V. Martynov, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, F. Matichard, N. Mavalvala, E. Maynard, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, L. McCuller, S. C. McGuire, C. McIsaac, J. McIver, D. J. McManus, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, M. Mehmet, A. K. Mehta, E. Mejuto Villa, A. Melatos, G. Mendell, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh,

J. D. Merritt, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, R. Metzдорff, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Mhaske, A. Miani, H. Miao, I. Michaloliakos, C. Michel, H. Middleton, L. Milano, A. L. Miller, S. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, E. Milotti, M. C. Milovich-Goff, O. Minazzoli, Y. Minenkov, A. Mishkin, C. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, G. Mo, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, S. R. Mohite, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, G. Moreno, S. Morisaki, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, S. Mozzon, F. Muciaccia, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, S. Mukherjee, Subroto Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, P. G. Murray, A. Nagar, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, A. Neunzert, K. Y. Ng, S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, D. Nichols, S. A. Nichols, S. Nissanke, F. Nocera, M. Noh, C. North, D. Nothard, L. K. Nuttall, J. Oberling, B. D. O'Brien, G. Oganessian, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, M. Oliver, C. Olivetto, P. Oppermann, Richard J. Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, S. Ossokine, C. Osthelder, D. J. Ottaway, H. Overmier, B. J. Owen, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, H. Pan, P. K. Panda, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, A. Parida, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, B. Patricelli, E. Payne, B. L. Pearlstone, T. C. Pechsiri, A. J. Pedersen, M. Pedraza, A. Pele, S. Penn, A. Perego, C. J. Perez, C. Périgois, A. Perreca, S. Perriès, J. Petermann, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pichot, M. Piendibene, F. Piergiovanni, V. Pierro, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, K. Piotrkowski, M. Pirello, M. Pitkin, W. Plastino, R. Poggiani, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, J. Powell, A. K. Prajapati, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, T. Prestegard, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, M. Punturo, P. Puppo, M. Pürerer, H. Qi, V. Quetschke, P. J. Quinonez, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raffai, H. Rafferty, S. Raja, C. Rajan, B. Rajbhandari, M. Rakhmanov, K. E. Ramirez, A. Ramos-Buades, Javed Rana, K. Rao, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, J. Read, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, P. Rettegno, F. Ricci, C. J. Richardson, J. W. Richardson, P. M. Ricker, G. Riemschneider, K. Riles, M. Rizzo, N. A. Robertson, F. Robinet, A. Rocchi, R. D. Rodriguez-Soto, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, I. M. Romero-Shaw, J. H. Romie, C. A. Rose, D. Rose, K. Rose, D. Rosińska, S. G. Rosofsky, M. P. Ross, S. Rowan, S. J. Rowlinson, P. K. Roy, Santosh Roy, Soumen Roy, P. Ruggi, G. Rutins, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, M. Sakellariadou, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, A. Samajdar, E. J. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, K. A. Santiago, E. Santos, N. Sarin, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, O. Sauter, R. L. Savage, V. Savant, D. Sawant, S. Sayah, D. Schaetzl, P. Schale, M. Scheel, J. Scheuer, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, E. Schreiber, B. W. Schulte, B. F. Schutz, O. Schwarm, E. Schwartz, J. Scott, S. M. Scott, E. Seidel, D. Sellers, A. S. Sengupta, N. Sennett, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, D. A. Shaddock, T. Shaffer, M. S. Shahriar, S. Sharifi, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, H. Shen, M. Shikauchi, R. Shink, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Shukla, S. ShyamSundar, K. Siellez, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singha, A. Singhal, A. M. Sintes, V. Sipala, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. Smetana, J. R. Smith, R. J. E. Smith, S. Somala, E. J. Son, S. Soni, B. Sorazu, V. Sordini, F. Sorrentino, T. Souradeep, E. Sowell, A. P. Spencer, M. Spera, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, M. Standke, D. A. Steer, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, S. Stevenson, D. Stocks, D. J. Stops, M. Stover, K. A. Strain, G. Stratta, A. Strunk,

- R. Sturani, A. L. Stuver, S. Sudhagar, V. Sudhir, T. Z. Summerscales, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, S. C. Tait, C. Talbot, A. J. Tanasijczuk, D. B. Tanner, D. Tao, M. Tápai, A. Tapia, E. N. Tapia San Martin, J. D. Tasson, R. Taylor, R. Tenorio, L. Terkowski, M. P. Thirugnanasambandam, M. Thomas, P. Thomas, J. E. Thompson, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, C. L. Tinsman, T. R. Saravanan, Shubhanshu Tiwari, S. Tiwari, V. Tiwari, K. Toland, M. Tonelli, Z. Tornasi, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, I. Tosta e Melo, D. Töyrä, E. A. Trail, F. Travasso, G. Traylor, M. C. Tringali, A. Tripathee, A. Trovato, R. J. Trudeau, K. W. Tsang, M. Tse, R. Tso, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, M. Turconi, A. S. Ubhi, R. Udall, K. Ueno, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, A. C. Utina, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Valentini, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. Van Heijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, V. Varma, S. Vass, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, G. Venugopalan, D. Verkindt, D. Veske, F. Vetrano, A. Viceré, A. D. Viets, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, Francisco Hernandez Vivanco, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, R. Walet, M. Walker, G. S. Wallace, L. Wallace, S. Walsh, J. Z. Wang, S. Wang, W. H. Wang, R. L. Ward, Z. A. Warden, J. Warner, M. Was, J. Watchi, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, F. Wellmann, L. Wen, P. Weßels, J. W. Westhouse, K. Wette, J. T. Whelan, B. F. Whiting, C. Whittle, D. M. Wilken, D. Williams, J. L. Willis, B. Willke, W. Winkler, C. C. Wipf, H. Wittel, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, C. Wong, J. L. Wright, D. S. Wu, D. M. Wysocki, L. Xiao, H. Yamamoto, L. Yang, Y. Yang, Z. Yang, M. J. Yap, M. Yazback, D. W. Yeeles, Hang Yu, Haocun Yu, S. H. R. Yuen, A. K. Zadrožny, A. Zadrožny, M. Zanolin, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, J. Zhang, L. Zhang, T. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, A. B. Zimmerman, M. E. Zucker, J. Zweizig, LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. GW190412: Observation of a binary-black-hole coalescence with asymmetric masses. *Phys. Rev. D*, 102(4):043015, August 2020a. doi: 10.1103/PhysRevD.102.043015.
- R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, A. Aich, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, S. Akcay, G. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, S. V. Angelova, S. Ansoldi, S. Antier, S. Appert, K. Arai, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Arnaud, S. M. Aronson, K. G. Arun, Y. Asali, S. Ascenzi, G. Ashton, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, P. Aufmuth, K. AultONeal, C. Austin, V. Avendano, S. Babak, P. Bacon, F. Badaracco, M. K. M. Bader, S. Bae, A. M. Baer, J. Baird, F. Baldaccini, G. Ballardin, S. W. Ballmer, A. Bals, A. Balsamo, G. Baltus, S. Banagiri, D. Bankar, R. S. Bankar, J. C. Barayoga, C. Barbieri, B. C. Barish, D. Barker, K. Barkett, P. Barneo, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj, J. C. Bayley, M. Bazzan, B. Bécsy, M. Bejger, I. Belahcene, A. S. Bell, D. Beniwal, M. G. Benjamin, R. Benkel, J. D. Bentley, F. Bergamin, B. K. Berger, G. Bergmann, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, R. Bhandare, A. V. Bhandari, J. Bidler, E. Biggs, I. A. Bilenko, G. Billingsley, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bisch, S. Biscoveanu, A. Bisht, G. Bissenbayeva, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, J. Blackman, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, Y. Boetzel, G. Bogaert, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, V. Bossilkov, J. Bosveld, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, M. Branchesi, J. E. Brau, M. Breschi,

- T. Briant, J. H. Briggs, F. Brighenti, A. Brillet, M. Brinkmann, R. Brito, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, G. Bruno, R. Bruntz, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskulic, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, J. D. Callaghan, T. A. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, M. Canepa, K. C. Cannon, H. Cao, J. Cao, G. Carapella, F. Carbognani, S. Caride, M. F. Carney, G. Carullo, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, J. Castañeda, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, O. Chaibi, K. Chakravarti, C. Chan, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, D. Chat-terjee, M. Chaturvedi, K. Chatziioannou, H. Y. Chen, X. Chen, Y. Chen, H. P. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Chia, F. Chiadini, R. Chierici, A. Chincarini, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, M. Cho, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, K. W. Chung, S. Chung, G. Ciani, P. Ciecielag, M. Cieřlar, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, J. A. Clark, P. Clearwater, S. Clesse, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, D. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, C. Collins, M. Colpi, Jr. Constancio, M., L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrion, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, P. B. Covas, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, M. Croquette, S. G. Crowder, J. R. Cudell, T. J. Cullen, A. Cumming, R. Cummings, L. Cunningham, E. Cuoco, M. Curylo, T. Dal Canton, G. Dály, A. Dana, L. M. Daneshgaran-Bajastani, B. D'Angelo, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, C. Darsow-Fromm, A. Dasgupta, L. E. H. Datrier, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, G. S. Davies, D. Davis, E. J. Daw, D. DeBra, M. Deenadayalan, J. Degal-laix, M. De Laurentis, S. Deléglise, M. Delfavero, N. De Lillo, W. Del Pozzo, L. M. DeMarchi, V. D'Emilio, N. Demos, T. Dent, R. De Pietri, R. De Rosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, O. de Varona, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, Jr. Diaz-Ortiz, M., T. Dietrich, L. Di Fiore, C. Di Fronzo, C. Di Giorgio, F. Di Giovanni, M. Di Giovanni, T. Di Girolamo, A. Di Lieto, B. Ding, S. Di Pace, I. Di Palma, F. Di Renzo, A. K. Divakarla, A. Dmitriev, Z. Doctor, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, T. P. Downes, M. Drago, J. C. Driggers, Z. Du, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, D. D'Urso, S. E. Dwyer, P. J. Easter, G. Eddolls, B. Edelman, T. B. Edo, O. Edy, A. Effler, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, A. Ejlli, L. Errico, R. C. Essick, H. Estelles, D. Estevez, Z. B. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, B. E. Ewing, V. Fafone, S. Fairhurst, X. Fan, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, E. J. Fauchon-Jones, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, J. Feicht, M. M. Fejer, F. Feng, E. Fenyvesi, D. L. Ferguson, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, E. C. Ferreira, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, I. Fiori, D. Fiorucci, M. Fishbach, R. P. Fisher, R. Fittipaldi, M. Fitz-Axen, V. Fiumara, R. Flaminio, E. Floden, E. Flynn, H. Fong, J. A. Font, P. W. F. Forsyth, J. D. Fournier, S. Frasca, F. Frasconi, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. Fronzè, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, B. U. Gadre, S. M. Gaebel, J. R. Gair, S. Galaudage, D. Ganapathy, A. Ganguly, S. G. Gaonkar, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, V. Gayathri, G. Gemme, E. Genin, A. Gennai, D. George, J. George, L. Gergely, S. Ghonge, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, S. Ghosh, B. Giacomazzo, J. A. Giaime, K. D. Giardino, D. R. Gibson, C. Gier, K. Gill, J. Glanzer, J. Gniesmer, P. Godwin, E. Goetz, R. Goetz, N. Gohlke, B. Goncharov, G. González, A. Gopakumar, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, B. Grace, A. Grado, M. Granata, A. Grant, S. Gras, P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, E. M. Gretarsson, H. L. Griggs, G. Grig-nani, A. Grimaldi, S. J. Grimm, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, G. M. Guidi, A. R. Guimaraes, G. Guixé, H. K. Gulati, Y. Guo, A. Gupta, Anchal Gupta, P. Gupta, E. K.

Gustafson, R. Gustafson, L. Haegel, O. Halim, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. A. Hannuksela, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Haughian, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, M. C. Heintze, J. Heinze, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, E. Hennes, J. Hennig, M. Heurs, S. Hild, T. Hinderer, S. Y. Hoback, S. Hochheim, E. Hofgard, D. Hofman, A. M. Holgado, N. A. Holland, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, C. Horst, J. Hough, E. J. Howell, C. G. Hoy, Y. Huang, M. T. Hübner, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey, V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, R. Huxford, T. Huynh-Dinh, B. Idzkowski, A. Iess, H. Inchauspe, C. Ingram, G. Intini, J. M. Isac, M. Isi, B. R. Iyer, T. Jacqmin, S. J. Jadhav, S. P. Jadhav, A. L. James, K. Jani, N. N. Janthalur, P. Jaranowski, D. Jariwala, R. Jaume, A. C. Jenkins, J. Jiang, G. R. Johns, N. K. Johnson-McDaniel, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, P. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, J. Junker, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. J. Kapadia, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, W. Kastaun, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, K. Kawabe, F. Kéfélian, D. Keitel, A. Keivani, R. Kennedy, J. S. Key, S. Khadka, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, Z. A. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, Chunglee Kim, G. J. Kim, J. C. Kim, K. Kim, W. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, P. J. King, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimenko, T. D. Knowles, E. Knyazev, P. Koch, S. M. Koehlenbeck, G. Koekoek, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, W. Z. Korth, M. Kovalam, D. B. Kozak, V. Kringel, N. V. Krishnendu, A. Królak, N. Krupinski, G. Kuehn, A. Kumar, P. Kumar, Rahul Kumar, Rakesh Kumar, S. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, B. D. Lackey, D. Laghi, E. Lalande, T. L. Lam, A. Lamberts, M. Landry, P. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, R. K. Lanza, I. La Rosa, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Lecoecuche, C. H. Lee, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, J. Lehmann, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, A. K. Y. Li, J. Li, K. li, T. G. F. Li, X. Li, F. Linde, S. D. Linker, J. N. Linley, T. B. Littenberg, J. Liu, X. Liu, M. Llorens-Monteagudo, R. K. L. Lo, A. Lockwood, L. T. London, A. Longo, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, Y. Ma, R. Macas, S. Macfoy, M. MacInnis, D. M. Macleod, I. A. O. MacMillan, A. Macquet, I. Magaña Hernandez, F. Magaña-Sandoval, R. M. Magee, E. Majorana, I. Maksimovic, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, V. Martinez, D. V. Martynov, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, F. Matichard, N. Mavalvala, E. Maynard, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, L. McCuller, S. C. McGuire, C. McIsaac, J. McIver, D. J. McManus, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, M. Mehmet, A. K. Mehta, E. Mejuto Villa, A. Melatos, G. Mendell, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh, J. D. Merritt, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, R. Metzдорff, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Mhaske, A. Miani, H. Miao, I. Michaloliakos, C. Michel, H. Middleton, L. Milano, A. L. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, E. Milotti, M. C. Milovich-Goff, O. Minazzoli, Y. Minkov, A. Mishkin, C. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, G. Mo, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, S. R. Mohite, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, G. Moreno, S. Morisaki, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, S. Mozzon, F. Muciaccia, Arunava Mukherjee,

D. Mukherjee, S. Mukherjee, Subroto Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, P. G. Murray, A. Nagar, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, A. Neunzert, K. Y. Ng, S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, D. Nichols, S. A. Nichols, S. Nissanke, F. Nocera, M. Noh, C. North, D. Nothard, L. K. Nuttall, J. Oberling, B. D. O'Brien, G. Oganessian, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, M. Oliver, C. Olivetto, P. Oppermann, Richard J. Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, S. Ossokine, C. Osthelder, D. J. Ottaway, H. Overmier, B. J. Owen, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, H. Pan, P. K. Panda, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, A. Parida, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, B. Patricelli, E. Payne, B. L. Pearlstone, T. C. Pechsiri, A. J. Pedersen, M. Pedraza, A. Pele, S. Penn, A. Perego, C. J. Perez, C. Périgois, A. Perreca, S. Perriès, J. Petermann, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pichot, M. Piendibene, F. Piergiovanni, V. Pierro, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, K. Piotrkowski, M. Pirello, M. Pitkin, W. Plastino, R. Poggiani, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, J. Powell, A. K. Prajapati, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, T. Prestegard, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, M. Punturo, P. Puppo, M. Pürerer, H. Qi, V. Quetschke, P. J. Quinonez, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raffai, H. Rafferty, S. Raja, C. Rajan, B. Rajbhandari, M. Rakhmanov, K. E. Ramirez, A. Ramos-Buades, Javed Rana, K. Rao, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, J. Read, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, P. Rettengo, F. Ricci, C. J. Richardson, J. W. Richardson, P. M. Ricker, G. Riemenschneider, K. Riles, M. Rizzo, N. A. Robertson, F. Robinet, A. Rocchi, R. D. Rodriguez-Soto, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, I. M. Romero-Shaw, J. H. Romie, C. A. Rose, D. Rose, K. Rose, D. Rosińska, S. G. Rosofsky, M. P. Ross, S. Rowan, S. J. Rowlinson, P. K. Roy, Santosh Roy, Soumen Roy, P. Ruggi, G. Rutins, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, M. Sakellariadou, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, E. J. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, K. A. Santiago, E. Santos, N. Sarin, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, O. Sauter, R. L. Savage, V. Savant, D. Sawant, S. Sayah, D. Schaetzel, P. Schale, M. Scheel, J. Scheuer, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, E. Schreiber, B. W. Schulte, B. F. Schutz, O. Schwarm, E. Schwartz, J. Scott, S. M. Scott, E. Seidel, D. Sellers, A. S. Sengupta, N. Sennett, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, D. A. Shaddock, T. Shaffer, M. S. Shahriar, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, H. Shen, M. Shikachi, R. Shink, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Shukla, S. ShyamSundar, K. Siellez, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singha, A. Singhal, A. M. Sintes, V. Sipala, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. Smetana, J. R. Smith, R. J. E. Smith, S. Somala, E. J. Son, S. Soni, B. Sorazu, V. Sordini, F. Sorrentino, T. Souradeep, E. Sowell, A. P. Spencer, M. Spera, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, M. Standke, D. A. Steer, J. Steinhoff, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, S. Stevenson, D. Stocks, D. J. Stoops, M. Stover, K. A. Strain, G. Stratta, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, S. Sudhagar, V. Sudhir, T. Z. Summerscales, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, S. C. Tait, C. Talbot, A. J. Tanasijczuk, D. B. Tanner, D. Tao, M. Tápai, A. Tapia, E. N. Tapia San Martin, J. D. Tasson, R. Taylor, R. Tenorio, L. Terkowski, M. P. Thirugnanasambandam, M. Thomas, P. Thomas, J. E. Thompson, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, C. L. Tinsman, T. R. Saravanan, Shubhanshu Tiwari, S. Tiwari, V. Tiwari, K. Toland, M. Tonelli, Z. Tornasi, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, I. Tosta e

- Melo, D. Töyrä, E. A. Trail, F. Travasso, G. Traylor, M. C. Tringali, A. Tripathee, A. Trovato, R. J. Trudeau, K. W. Tsang, M. Tse, R. Tso, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, M. Turconi, A. S. Ubhi, K. Ueno, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, A. C. Utina, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Valentini, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. Van Heijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, V. Varma, S. Vass, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, G. Venugopalan, D. Verkindt, D. Veske, F. Vetrano, A. Viceré, A. D. Viets, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, Francisco Hernandez Vivanco, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, R. Walet, M. Walker, G. S. Wallace, L. Wallace, S. Walsh, J. Z. Wang, S. Wang, W. H. Wang, R. L. Ward, Z. A. Warden, J. Warner, M. Was, J. Watchi, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, F. Wellmann, L. Wen, P. Weßels, J. W. Westhouse, K. Wette, J. T. Whelan, B. F. Whiting, C. Whittle, D. M. Wilken, D. Williams, J. L. Willis, B. Willke, W. Winkler, C. C. Wipf, H. Wittel, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, C. Wong, J. L. Wright, D. S. Wu, D. M. Wysocki, L. Xiao, H. Yamamoto, L. Yang, Y. Yang, Z. Yang, M. J. Yap, M. Yazback, D. W. Yeeles, Hang Yu, Haocun Yu, S. H. R. Yuen, A. K. Zadrożny, A. Zadrożny, M. Zanolin, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, J. Zhang, L. Zhang, T. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, A. B. Zimmerman, M. E. Zucker, J. Zweizig, LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object. *ApJ*, 896(2):L44, June 2020b. doi: 10.3847/2041-8213/ab960f.
- R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, A. Adams, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, D. Agarwal, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, T. Akutsu, K. M. Aleman, G. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, M. Ando, S. V. Angelova, S. Ansoldi, J. M. Antelis, S. Antier, S. Appert, Koya Arai, Koji Arai, Y. Arai, S. Araki, A. Araya, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Aritomi, N. Arnaud, S. M. Aronson, K. G. Arun, H. Asada, Y. Asali, G. Ashton, Y. Aso, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, P. Aufmuth, K. Aultoneal, C. Austin, S. Babak, F. Badaracco, M. K. M. Bader, S. Bae, Y. Bae, A. M. Baer, S. Bagnasco, Y. Bai, L. Baiotti, J. Baird, R. Bajpai, M. Ball, G. Ballardín, S. W. Ballmer, M. Bals, A. Balsamo, G. Baltus, S. Banagiri, D. Bankar, R. S. Bankar, J. C. Barayoga, C. Barbieri, B. C. Barish, D. Barker, P. Barneo, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj, J. C. Bayley, A. C. Baylor, M. Bazzan, B. Bécsy, V. M. Bedakihalé, M. Bejger, I. Belahcene, V. Benedetto, D. Beniwal, M. G. Benjamin, R. Benkel, T. F. Bennett, J. D. Bentley, M. Benyaala, F. Bergamin, B. K. Berger, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, R. Bhandare, A. V. Bhandari, D. Bhattacharjee, S. Bhaumik, J. Bidler, I. A. Bilenko, G. Billingsley, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bisch, S. Biscoveanu, A. Bisht, B. Biswas, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, J. Blackman, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, G. Bogaert, M. Boldrini, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, N. Bose, S. Bose, V. Bossilkov, V. Boudart, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, A. Branch, M. Branchesi, J. E. Brau, M. Breschi, T. Briant, J. H. Briggs, A. Brillet, M. Brinkmann, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, G. Bruno, R. Bruntz, J. Bryant, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, R. Buscicchio, D. Buskulic, R. L. Byer, L. Cadonati, M. Caesar, G. Cagnoli, C. Cahillane, III Cain, H. W., J. Calderón Bustillo, J. D. Callaghan, T. A. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, M. Canepa,

M. Cannavacciuolo, K. C. Cannon, H. Cao, J. Cao, Z. Cao, E. Capocasa, E. Capote, G. Carapella, F. Carbognani, J. B. Carlin, M. F. Carney, M. Carpinelli, G. Carullo, T. L. Carver, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, G. Castaldi, S. Caudill, M. Cavaglia, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, W. Chaibi, K. Chakravarti, B. Champion, C. H. Chan, C. Chan, C. L. Chan, M. Chan, K. Chandra, P. Chaniel, S. Chao, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, D. Chatterjee, M. Chaturvedi, K. Chatziioannou, A. Chen, C. Chen, H. Y. Chen, J. Chen, K. Chen, X. Chen, Y. B. Chen, Y. R. Chen, Z. Chen, H. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Cheung, H. Y. Chia, F. Chiadini, C. Y. Chiang, R. Chierici, A. Chincarini, M. L. Chiofalo, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, S. Choate, R. K. Choudhary, S. Choudhary, N. Christensen, H. Chu, Q. Chu, Y. K. Chu, S. Chua, K. W. Chung, G. Ciani, P. Ciecielag, M. Ciešlar, M. Cifaldi, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, E. N. Clark, J. A. Clark, L. Clarke, P. Clearwater, S. Clesse, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, D. E. Cohen, L. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, M. Colpi, C. M. Compton, Jr. Constancio, M., L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, B. Cousins, P. Couvares, P. B. Covas, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, A. W. Criswell, M. Croquette, S. G. Crowder, J. R. Cudell, T. J. Cullen, A. Cumming, R. Cummings, E. Cuoco, M. Curyło, T. Dal Canton, G. Dálya, A. Dana, L. M. Daneshgaranbajastani, B. D'Angelo, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, C. Darsow-Fromm, A. Dasgupta, L. E. H. Datrier, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, G. S. Davies, D. Davis, E. J. Daw, R. Dean, D. Debra, M. Deenadayalan, J. Degallaix, M. de Laurentis, S. Deléglise, V. Del Favero, F. de Lillo, N. de Lillo, W. Del Pozzo, L. M. Demarchi, F. de Matteis, V. D'Emilio, N. Demos, T. Dent, A. Depasse, R. de Pietri, R. De Rosa, C. de Rossi, R. Desalvo, R. de Simone, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, Jr. Diaz-Ortiz, M., N. A. Didio, T. Dietrich, L. di Fiore, C. di Fronzo, C. di Giorgio, F. di Giovanni, T. di Girolamo, A. di Lieto, B. Ding, S. di Pace, I. di Palma, F. di Renzo, A. K. Divakarla, A. Dmitriev, Z. Doctor, L. D'Onofrio, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, M. Drago, J. C. Driggers, Y. Drori, Z. Du, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, D. D'Urso, P. A. Duverne, S. E. Dwyer, P. J. Easter, M. Ebersold, G. Eddolls, B. Edelman, T. B. Edo, O. Eddy, A. Effler, S. Eguchi, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, A. Ejlli, Y. Enomoto, L. Errico, R. C. Essick, H. Estellés, D. Estevez, Z. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, B. E. Ewing, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, X. Fan, A. M. Farah, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, N. W. Farrow, E. J. Fauchon-Jones, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, J. Feicht, M. M. Fejer, F. Feng, E. Fenyvesi, D. L. Ferguson, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, P. Figura, I. Fiori, M. Fishbach, R. P. Fisher, R. Fittipaldi, V. Fiurara, R. Flaminio, E. Floden, E. Flynn, H. Fong, J. A. Font, B. Fornal, P. W. F. Forsyth, A. Franke, S. Frasca, F. Frasconi, C. Frederick, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. G. Fronzé, Y. Fujii, Y. Fujikawa, M. Fukunaga, M. Fukushima, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, B. U. Gadre, S. M. Gaebel, J. R. Gair, J. Gais, S. Galaudage, R. Gamba, D. Ganapathy, A. Ganguly, D. Gao, S. G. Gaonkar, B. Garaventa, C. García-Núñez, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, V. Gayathri, G. Ge, G. Gemme, A. Gennai, J. George, L. Gergely, P. Gewecke, S. Ghonge, Abhirup. Ghosh, Archisman Ghosh, Shaon Ghosh, Shrobana Ghosh, Sourath Ghosh, B. Giacomazzo, L. Giacoppo, J. A. Giaime, K. D. Giardino, D. R. Gibson, C. Gier, M. Giesler, P. Giri, F. Gissi, J. Glanzer, A. E. Gleckl, P. Godwin, E. Goetz, R. Goetz, N. Gohlke, B. Goncharov, G. González, A. Gopakumar, M. Gosselin, R. Gouaty, B. Grace, A. Grado, M. Granata, V. Granata, A. Grant, S. Gras,

P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, A. M. Gretarsson, E. M. Gretarsson, D. Griffith, W. Griffiths, H. L. Griggs, G. Grignani, A. Grimaldi, E. Grimes, S. J. Grimm, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, J. G. Guerrero, G. M. Guidi, A. R. Guimaraes, G. Guixé, H. K. Gulati, H. K. Guo, Y. Guo, Anchal Gupta, Anuradha Gupta, P. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, F. Guzman, S. Ha, L. Haegel, A. Hagiwara, S. Haino, O. Halim, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, W. B. Han, M. Haney, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. A. Hannuksela, H. Hansen, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, D. Hartwig, K. Hasegawa, B. Haskell, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Hattori, K. Haughian, H. Hayakawa, K. Hayama, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, M. C. Heintze, J. Heinze, J. Heinzl, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, A. F. Helmling-Cornell, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, E. Hennes, J. Hennig, M. H. Hennig, F. Hernandez Vivanco, M. Heurs, S. Hild, P. Hill, Y. Himemoto, T. Hinderer, A. S. Hines, Y. Hiranuma, N. Hirata, E. Hirose, W. C. G. Ho, S. Hochheim, D. Hofman, J. N. Hohmann, A. M. Holgado, N. A. Holland, I. J. Hollows, Z. J. Holmes, K. Holt, D. E. Holz, Z. Hong, P. Hopkins, J. Hough, E. J. Howell, C. G. Hoy, D. Hoyland, A. Hreibi, B. H. Hsieh, Y. Hsu, G. Z. Huang, H. Y. Huang, P. Huang, Y. C. Huang, Y. J. Huang, Y. W. Huang, M. T. Hübner, A. D. Huddart, E. A. Huerta, B. Hughey, D. C. Y. Hui, V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, R. Huxford, T. Huynh-Dinh, S. Ide, B. Idzkowski, A. Iess, B. Ikenoue, S. Imam, K. Inayoshi, H. Inchauspe, C. Ingram, Y. Inoue, G. Intini, K. Ioka, M. Isi, K. Isleif, K. Ito, Y. Itoh, B. R. Iyer, K. Izumi, V. Jaberianhamedan, T. Jacqmin, S. J. Jadhav, S. P. Jadhav, A. L. James, A. Z. Jan, K. Jani, K. Janssens, N. N. Janthalur, P. Jaranowski, D. Jariwala, R. Jaume, A. C. Jenkins, C. Jeon, M. Jeunon, W. Jia, J. Jiang, H. B. Jin, G. R. Johns, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, P. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, K. Jung, P. Jung, J. Junker, K. Kaihotsu, T. Kajita, M. Kakizaki, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, M. Kamiizumi, N. Kanda, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, Y. Kao, S. J. Kapadia, D. P. Kapasi, S. Karat, C. Karathanasis, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, W. Kastan, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, T. Kaur, K. Kawabe, K. Kawaguchi, N. Kawai, T. Kawasaki, F. Kéfélian, D. Keitel, J. S. Key, S. Khadka, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. C. Kim, J. Kim, K. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, N. Kimura, P. J. King, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchoff, J. S. Kissel, N. Kita, H. Kitazawa, L. Kleybolte, S. Klimenko, A. M. Knee, T. D. Knowles, E. Knyazev, P. Koch, G. Koekoek, Y. Kojima, K. Kokeyama, S. Koley, P. Kolitsidou, M. Kolstein, K. Komori, V. Kondrashov, A. K. H. Kong, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, K. Kotake, M. Kovalam, D. B. Kozak, C. Kozakai, R. Kozu, V. Kringel, N. V. Krishnendu, A. Królak, G. Kuehn, F. Kuei, A. Kumar, P. Kumar, Rahul Kumar, Rakesh Kumar, J. Kume, K. Kuns, C. Kuo, H. S. Kuo, Y. Kuromiya, S. Kuroyanagi, K. Kusayanagi, K. Kwak, S. Kwang, D. Laghi, E. Lalande, T. L. Lam, A. Lamberts, M. Landry, P. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, I. La Rosa, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Lecoecueche, H. K. Lee, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, R. Lee, J. Lehmann, A. Lemaître, E. Leon, M. Leonardi, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, J. N. Leviton, A. K. Y. Li, B. Li, J. Li, K. L. Li, T. G. F. Li, X. Li, C. Y. Lin, F. K. Lin, F. L. Lin, H. L. Lin, L. C. C. Lin, F. Linde, S. D. Linker, J. N. Linley, T. B. Littenberg, G. C. Liu, J. Liu, K. Liu, X. Liu, M. Llorens-Monteagudo, R. K. L. Lo, A. Lockwood, M. L. Lollie, L. T. London, A. Longo, D. Lopez, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, L. W. Luo, R. Macas, M. Macinnis, D. M. MacLeod, I. A. O. MacMillan, A. Macquet, I. Magaña Hernandez, F. Magaña-Sandoval, C. Magazzù, R. M. Magee, R. Mag-

giore, E. Majorana, C. Makarem, I. Maksimovic, S. Maliakal, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, J. L. Mango, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, M. Marchio, F. Marion, Z. Mark, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, M. Martinez, V. Martinez, K. Martinovic, D. V. Martynov, E. J. Marx, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, M. Mateu-Lucena, F. Matichard, M. Matiushchekina, N. Mavalvala, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, P. McClincy, S. McCormick, L. McCuller, G. I. McGhee, S. C. McGuire, C. McIsaac, J. McIver, D. J. McManus, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, M. Mehmet, A. K. Mehta, A. Melatos, D. A. Melchor, G. Mendell, A. Menendez-Vazquez, C. S. Menoni, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh, J. D. Merritt, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Mhaske, A. Miani, H. Miao, I. Michaloliakos, C. Michel, Y. Michimura, H. Middleton, L. Milano, A. L. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, E. Milotti, M. C. Milovich-Goff, O. Minazzoli, Y. Minenkov, N. Mio, Ll. M. Mir, A. Mishkin, C. Mishra, T. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, O. Miyakawa, A. Miyamoto, Y. Miyazaki, K. Miyo, S. Miyoki, Geoffrey Mo, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, S. R. Mohite, I. Molina, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, A. More, C. Moreno, G. Moreno, Y. Mori, S. Morisaki, Y. Moriwaki, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, S. Mozzon, F. Muciaccia, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, Soma Mukherjee, Subroto Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, P. G. Murray, R. Musenich, S. L. Nadji, K. Nagano, S. Nagano, A. Nagar, K. Nakamura, H. Nakano, M. Nakano, R. Nakashima, Y. Nakayama, I. Nardecchia, T. Narikawa, L. Naticchioni, B. Nayak, R. K. Nayak, R. Negishi, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, A. Neunzert, K. Y. Ng, S. W. S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, T. Nguyen, L. Nguyen Quynh, W. T. Ni, S. A. Nichols, A. Nishizawa, S. Nissanke, F. Nocera, M. Noh, M. Norman, C. North, S. Nozaki, L. K. Nuttall, J. Oberling, B. D. O'Brien, Y. Obuchi, J. O'Dell, W. Ogaki, G. Oganessian, J. J. Oh, K. Oh, S. H. Oh, M. Ohashi, N. Ohishi, M. Ohkawa, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, Y. Okutani, K. Okutomi, C. Olivetto, K. Oohara, C. Ooi, R. Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, N. D. Ormsby, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, E. O'Shea, S. Oshino, S. Ossokine, C. Osthelder, S. Otabe, D. J. Ottaway, H. Overmier, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, K. Pan, P. K. Panda, H. Pang, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, A. Paolone, A. Parisi, J. Park, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquietti, D. Passuello, M. Patel, B. Patricelli, E. Payne, T. C. Pechsiri, M. Pedraza, M. Pegoraro, A. Pele, F. E. Peña Arellano, S. Penn, A. Perego, A. Pereira, T. Pereira, C. J. Perez, C. Périgois, A. Perreca, S. Perriès, J. Petermann, D. Petterson, H. P. Pfeiffer, K. A. Pham, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pichot, M. Piendibene, F. Piergiovanni, L. Pierini, V. Pierro, G. Pillant, F. Pilo, L. Pinard, I. M. Pinto, B. J. Piotrkowski, K. Piotrkowski, M. Pirello, M. Pitkin, E. Placidi, W. Placino, C. Pluchar, R. Poggiani, E. Polini, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, J. Powell, M. Pracchia, T. Pradier, A. K. Prajapati, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, T. Prestegard, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, P. Proposito, L. Prudenzi, A. Puecher, M. Punturo, F. Puosi, P. Puppo, M. Pürerer, H. Qi, V. Quetschke, P. J. Quinonez, R. Quitzow-James, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raffai, S. X. Rail, S. Raja, C. Rajan, K. E. Ramirez, T. D. Ramirez, A. Ramos-Buades, J. Rana, P. Rapagnani, U. D. Rapol, B. Ratto, A. Ray, V. Raymond, N. Raza, M. Razzano, J. Read, L. A. Rees, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, P. Relton, P. Rettengo, F. Ricci, C. J.

Richardson, J. W. Richardson, L. Richardson, P. M. Ricker, G. Riemenschneider, K. Riles, M. Rizzo, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, J. A. Rocha, S. Rodriguez, R. D. Rodriguez-Soto, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, A. Romero, I. M. Romero-Shaw, J. H. Romie, C. A. Rose, D. Rosińska, S. G. Rosofsky, M. P. Ross, S. Rowan, S. J. Rowlinson, Santosh Roy, Soumen Roy, D. Rozza, P. Ruggi, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, J. Sadiq, N. Sago, S. Saito, Y. Saito, K. Sakai, Y. Sakai, M. Sakellariadou, Y. Sakuno, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, E. J. Sanchez, J. H. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, A. Sanuy, T. R. Saravanan, N. Sarin, B. Sassolas, H. Satari, B. S. Sathyaprakash, S. Sato, T. Sato, O. Sauter, R. L. Savage, V. Savant, T. Sawada, D. Sawant, H. L. Sawant, S. Sayah, D. Schaetzl, M. Scheel, J. Scheuer, A. Schindler-Tyka, P. Schmidt, R. Schnabel, M. Schneewind, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, B. W. Schulte, B. F. Schutz, E. Schwartz, J. Scott, S. M. Scott, M. Seglar-Arroyo, E. Seidel, T. Sekiguchi, Y. Sekiguchi, D. Sellers, A. S. Sengupta, N. Sennett, D. Sentenac, E. G. Seo, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, T. Shaffer, M. S. Shahriar, B. Shams, L. Shao, S. Sharifi, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, N. S. Shcheblanov, H. Shen, S. Shibagaki, M. Shikauchi, R. Shimizu, T. Shimoda, K. Shimode, R. Shink, H. Shinkai, T. Shishido, A. Shoda, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Shukla, S. Shyamsundar, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singha, A. M. Sintes, V. Sipala, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. Smetana, J. R. Smith, R. J. E. Smith, S. N. Somala, K. Somiya, E. J. Son, K. Soni, S. Soni, B. Sorazu, V. Sordini, F. Sorrentino, N. Sorrentino, H. Sotani, R. Soulard, T. Souradeep, E. Sowell, V. Spagnuolo, A. P. Spencer, M. Spera, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, D. A. Steer, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. J. Stops, S. Stevenson, M. Stover, K. A. Strain, L. C. Strang, G. Stratta, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, J. Südbeck, S. Sudhagar, V. Sudhir, R. Sugimoto, H. G. Suh, T. Z. Summerscales, H. Sun, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, Takamasa Suzuki, Toshikazu Suzuki, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, P. Szewczyk, M. Tacca, H. Tagoshi, S. C. Tait, H. Takahashi, R. Takahashi, A. Takamori, S. Takano, H. Takeda, M. Takeda, C. Talbot, H. Tanaka, Kazuyuki Tanaka, Kenta Tanaka, Taiki Tanaka, Takahiro Tanaka, A. J. Tanasijczuk, S. Tanioka, D. B. Tanner, D. Tao, A. Tapia, E. N. Tapia San Martin, J. D. Tasson, S. Telada, R. Tenorio, L. Terkowski, M. Test, M. P. Thirugnanasambandam, M. Thomas, P. Thomas, J. E. Thompson, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, Shubhanshu Tiwari, Srishti Tiwari, V. Tiwari, K. Toland, A. E. Tolley, T. Tomaru, Y. Tomigami, T. Tomura, M. Tonelli, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, I. Tosta E Melo, D. Töyrä, A. Trapananti, F. Travasso, G. Traylor, M. C. Tringali, A. Tripathee, L. Troiano, A. Trovato, L. Trozzo, R. J. Trudeau, D. S. Tsai, D. Tsai, K. W. Tsang, T. Tsang, J. S. Tsao, M. Tse, R. Tso, K. Tsubono, S. Tsuchida, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, T. Tsuzuki, M. Turconi, D. Tuyenbayev, A. S. Ubhi, N. Uchikata, T. Uchiyama, R. P. Udall, A. Ueda, T. Uehara, K. Ueno, G. Ueshima, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, F. Uraguchi, A. L. Urban, T. Ushiba, S. A. Usman, A. C. Utina, H. Vahlbruch, G. Vajente, A. Vajpeyi, G. Valdes, M. Valentini, V. Valsan, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. van den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, J. Vanosky, M. H. P. M. van Putten, M. Vardaro, A. F. Vargas, V. Varma, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, J. Venneberg, G. Venugopalan, D. Verkindt, Y. Verma, D. Veske, F. Vetrano, A. Viceré, A. D. Viets, V. Villa-Ortega, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, E. R. G. von Reis, J. von Wrangel, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, L. E. Wade, M. Wade, K. J. Wagner, R. C. Walet, M. Walker, G. S. Wallace, L. Wallace, S. Walsh, J. Wang, J. Z. Wang, W. H. Wang, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, T. Washimi, N. Y. Washington, J. Watchi, B. Weaver, L. Wei,

- M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, C. M. Weller, F. Wellmann, L. Wen, P. Weßels, J. W. Westhouse, K. Wette, J. T. Whelan, D. D. White, B. F. Whiting, C. Whittle, D. Wilken, D. Williams, M. J. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, D. J. Wilson, W. Winkler, C. C. Wipf, T. Wlodarczyk, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, I. C. F. Wong, C. Wu, D. S. Wu, H. Wu, S. Wu, D. M. Wysocki, L. Xiao, W. R. Xu, T. Yamada, H. Yamamoto, Kazuhiro Yamamoto, Kohei Yamamoto, T. Yamamoto, K. Yamashita, R. Yamazaki, F. W. Yang, L. Yang, Yang Yang, Yi Yang, Z. Yang, M. J. Yap, D. W. Yeeles, A. B. Yelikar, M. Ying, K. Yokogawa, J. Yokoyama, T. Yokozawa, A. Yoon, T. Yoshioka, Hang Yu, Haocun Yu, H. Yuzurihara, A. Zadrożny, M. Zanolin, F. Zappa, S. Zeidler, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, M. Zhan, H. Zhang, J. Zhang, L. Zhang, R. Zhang, T. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, Yue Zhao, Yuhang Zhao, Z. Zhou, X. J. Zhu, Z. H. Zhu, A. B. Zimmerman, Y. Zlochower, M. E. Zucker, J. Zweizig, Ligo Scientific Collaboration, VIRGO Collaboration, and KAGRA Collaboration. Observation of Gravitational Waves from Two Neutron Star-Black Hole Coalescences. *ApJ*, 915(1):L5, July 2021a. doi: 10.3847/2041-8213/ac082e.
- R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, A. Adams, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, G. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, S. V. Angelova, S. Ansoldi, J. M. Antelis, S. Antier, S. Appert, K. Arai, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Arnaud, S. M. Aronson, K. G. Arun, Y. Asali, S. Ascenzi, G. Ashton, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, P. Aufmuth, K. AultONeal, C. Austin, V. Avendano, S. Babak, F. Badaracco, M. K. M. Bader, S. Bae, A. M. Baer, S. Bagnasco, J. Baird, M. Ball, G. Ballardín, S. W. Ballmer, A. Bals, A. Balsamo, G. Baltus, S. Banagiri, D. Bankar, R. S. Bankar, J. C. Barayoga, C. Barbieri, B. C. Barish, D. Barker, P. Barneo, S. Barnum, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj, J. C. Bayley, M. Bazzan, B. R. Becher, B. Bécsy, V. M. Bedakihalé, M. Bejger, I. Belahcene, D. Beniwal, M. G. Benjamin, T. F. Bennett, J. D. Bentley, F. Bergamin, B. K. Berger, G. Bergmann, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, R. Bhandare, A. V. Bhandari, D. Bhattacharjee, J. Bidler, I. A. Bilenko, G. Billingsley, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bischì, S. Biscoveanu, A. Bisht, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, J. Blackman, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, O. Blanch, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, Y. Boetzel, G. Bogaert, M. Boldrini, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, V. Bossilkov, V. Boudart, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, M. Branchesi, J. E. Brau, M. Breschi, T. Briant, J. H. Briggs, F. Brighenti, A. Brillet, M. Brinkmann, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, G. Bruno, R. Bruntz, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, R. Buscicchio, D. Buskulic, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, M. Caesar, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, J. D. Callaghan, T. A. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, M. Canepa, K. C. Cannon, H. Cao, J. Cao, G. Carapella, F. Carbognani, M. F. Carney, M. Carpinelli, G. Carullo, T. L. Carver, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, W. Chaibi, K. Chakravarti, C. L. Chan, C. Chan, K. Chandra, P. Chaniá, S. Chao, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, D. Chatterjee, D. Chattopadhyay, M. Chaturvedi, K. Chatziioannou, A. Chen, H. Y. Chen, X. Chen, Y. Chen, H. P. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Chia, F. Chiadini, R. Chierici, A. Chincarini, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, M. Cho, S. Choate, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, K. W. Chung, S. Chung, G. Ciani, P. Cielicelag, M. Cieřlar, M. Cifaldi, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, E. N. Clark, J. A. Clark, L. Clarke, P. Clearwater,

S. Clesse, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, D. E. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, C. Collins, M. Colpi, Jr. Constancio, M., L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, P. B. Covas, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, M. Croquette, S. G. Crowder, J. R. Cudell, T. J. Cullen, A. Cumming, R. Cummings, L. Cunningham, E. Cuoco, M. Curylo, T. Dal Canton, G. Dálya, A. Dana, L. M. DaneshgaranBajastani, B. D'Angelo, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, C. Darsow-Fromm, A. Dasgupta, L. E. H. Datrier, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, G. S. Davies, D. Davis, E. J. Daw, R. Dean, D. DeBra, M. Deenadayalan, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, V. Del Favero, F. De Lillo, N. De Lillo, W. Del Pozzo, L. M. DeMarchi, F. De Matteis, V. D'Emilio, N. Demos, T. Denker, T. Dent, A. Depasse, R. De Pietri, R. De Rosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, O. de Varona, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, Jr. Diaz-Ortiz, M., N. A. Didio, T. Dietrich, L. Di Fiore, C. DiFronzo, C. Di Giorgio, F. Di Giovanni, M. Di Giovanni, T. Di Girolamo, A. Di Lieto, B. Ding, S. Di Pace, I. Di Palma, F. Di Renzo, A. K. Divakarla, A. Dmitriev, Z. Doctor, L. D'Onofrio, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, T. P. Downes, M. Drago, J. C. Driggers, Z. Du, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, D. D'Urso, P. A. Duverne, S. E. Dwyer, P. J. Easter, G. Eddolls, B. Edelman, T. B. Edo, O. Edy, A. Effler, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, A. Ejlli, L. Errico, R. C. Essick, H. Estellés, D. Estevez, Z. B. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, B. E. Ewing, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, X. Fan, A. M. Farah, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, E. J. Fauchon-Jones, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, J. Feicht, M. M. Fejer, F. Feng, E. Fenyvesi, D. L. Ferguson, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, P. Figura, I. Fiori, D. Fiorucci, M. Fishbach, R. P. Fisher, J. M. Fishner, R. Fitipaldi, M. Fitz-Axen, V. Fiumara, R. Flaminio, E. Floden, E. Flynn, H. Fong, J. A. Font, P. W. F. Forsyth, J. D. Fournier, S. Frasca, F. Frasconi, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. G. Fronzé, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, B. U. Gadre, S. M. Gaebel, J. R. Gair, J. Gais, S. Galaudage, R. Gamba, D. Ganapathy, A. Ganguly, S. G. Gaonkar, B. Garaventa, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, V. Gayathri, G. Gemme, A. Gennai, D. George, J. George, L. Gergely, S. Ghonge, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, S. Ghosh, B. Giacomazzo, L. Giacoppo, J. A. Giaime, K. D. Giardino, D. R. Gibson, C. Gier, K. Gill, P. Giri, J. Glanzer, A. E. Gleckl, P. Godwin, E. Goetz, R. Goetz, N. Gohlke, B. Goncharov, G. González, A. Gopakumar, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, B. Grace, A. Grado, M. Granata, V. Granata, A. Grant, S. Gras, P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, E. M. Gretarsson, H. L. Griggs, G. Grignani, A. Grimaldi, E. Grimes, S. J. Grimm, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, J. G. Guerrero, G. M. Guidi, A. R. Guimaraes, G. Guixé, H. K. Gulati, Y. Guo, Anchal Gupta, Anuradha Gupta, P. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, F. Guzman, L. Haegel, O. Halim, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, O. A. Hannuksela, O. Hannuksela, H. Hansen, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, D. Hartwig, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Haughian, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, M. C. Heintze, J. Heinze, J. Heinzl, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, A. F. Helmling-Cornell, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, E. Hennes, J. Hennig, M. H. Hennig, F. Hernandez Vivanco, M. Heurs, S. Hild, P. Hill, A. S. Hines, S. Hochheim, E. Hofgard, D. Hofman, J. N. Hohmann, A. M. Holgado, N. A. Holland, I. J. Hollows, Z. J. Holmes, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, C. Horst, J. Hough, E. J. Howell, C. G. Hoy, D. Hoyland, Y. Huang, M. T. Hübner, A. D. Huddart, E. A. Huerta, B. Hughey,

V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, B. M. Hutzler, R. Huxford, T. Huynh-Dinh, B. Idzkowski, A. Iess, S. Imperato, H. Inchauspe, C. Ingram, G. Intini, M. Isi, B. R. Iyer, V. Jaberian-Hamedan, T. Jacquemin, S. J. Jadhav, S. P. Jadhav, A. L. James, K. Jani, K. Janssens, N. N. Janthalur, P. Jaranowski, D. Jariwala, R. Jaume, A. C. Jenkins, M. Jeunon, J. Jiang, G. R. Johns, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, P. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, J. Junker, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kan-ner, S. J. Kapadia, D. P. Kapasi, C. Karathanasis, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, W. Kastaun, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, K. Kawabe, F. Kéfélian, D. Keitel, J. S. Key, S. Khadka, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, C. Kim, G. J. Kim, J. C. Kim, K. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, P. J. King, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimenko, T. D. Knowles, E. Knyazev, P. Koch, S. M. Koehlenbeck, G. Koekoek, S. Koley, M. Kolstein, K. Komori, V. Kondrashov, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, W. Z. Korth, M. Kovalam, D. B. Kozak, C. Krämer, V. Kringel, N. V. Krishnendu, A. Królak, G. Kuehn, A. Kumar, P. Kumar, Rahul Kumar, Rakesh Kumar, K. Kuns, S. Kwang, B. D. Lackey, D. Laghi, E. Lalonde, T. L. Lam, A. Lamberts, M. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, R. K. Lanza, I. La Rosa, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Lecoeuche, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, J. Lehmann, E. Leon, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, A. Li, J. Li, K. J. L. Li, T. G. F. Li, X. Li, F. Linde, S. D. Linker, J. N. Linley, T. B. Littenberg, J. Liu, X. Liu, M. Llorens-Monteagudo, R. K. L. Lo, A. Lockwood, L. T. London, A. Longo, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, Y. Ma, R. Macas, M. MacInnis, D. M. Macleod, I. A. O. MacMillan, A. Macquet, I. Magaña Hernandez, F. Magaña-Sandoval, C. Magazzù, R. M. Magee, E. Majorana, I. Maksimovic, S. Maliakal, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, M. Martinez, V. Martinez, D. V. Martynov, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, M. Mateu-Lucena, F. Matichard, M. Matushechkina, N. Mavalvala, E. Maynard, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, L. McCuller, S. C. McGuire, C. McIsaac, J. McIver, D. J. McManus, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, M. Mehmet, A. K. Mehta, A. Melatos, D. A. Melchor, G. Mendell, A. Menendez-Vazquez, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh, J. D. Merritt, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, R. Metzdorff, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Mhaske, A. Miani, H. Miao, I. Michaloliakos, C. Michel, H. Middleton, L. Milano, A. L. Miller, S. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, E. Milotti, M. C. Milovich-Goff, O. Minazzoli, Y. Minenkov, L. M. Mir, A. Mishkin, C. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mit-teleman, G. Mo, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, S. R. Mohite, I. Molina, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, G. Moreno, S. Morisaki, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, S. Mozzon, F. Muciaccia, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, Soma Mukherjee, Subroto Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, P. G. Murray, S. L. Nadji, A. Nagar, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, A. Neunzert, K. Y. Ng, S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, T. Nguyen, S. A. Nichols, S. Nissanke, F. Nocera, M. Noh, C. North, D. Nothard, L. K. Nuttall, J. Oberling, B. D. O'Brien, J. O'Dell, G. Oganessian, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, C. Olivetto, P. Oppermann, R. J.

Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, N. Ormsby, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, S. Osokine, C. Osthelder, D. J. Ottaway, H. Overmier, B. J. Owen, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, H. Pan, P. K. Panda, T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, A. Paolone, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, M. Patel, B. Patricelli, E. Payne, T. C. Pechsiri, M. Pedraza, M. Pegoraro, A. Pele, S. Penn, A. Perego, C. J. Perez, C. Périgois, A. Perreca, S. Perriès, J. Petermann, D. Petterson, H. P. Pfeiffer, K. A. Pham, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pichot, M. Piendibene, F. Piergiovanni, L. Pierini, V. Pierro, G. Pillant, F. Pilo, L. Pinard, I. M. Pinto, K. Piotrkowski, M. Pirello, M. Pitkin, E. Placidi, W. Plastino, C. Pluchar, R. Poggiani, E. Polini, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, A. Poverman, J. Powell, M. Pracchia, A. K. Prajapati, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, T. Prestegard, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, P. Proposito, A. Puecher, M. Punturo, F. Puosi, P. Puppo, M. Pürner, H. Qi, V. Quetschke, P. J. Quinonez, R. Quitzow-James, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raffai, H. Rafferty, S. X. Rail, S. Raja, C. Rajan, B. Rajbhandari, M. Rakhmanov, K. E. Ramirez, T. D. Ramirez, A. Ramos-Buades, J. Rana, K. Rao, P. Rapagnani, U. D. Rapol, B. Ratto, V. Raymond, M. Razzano, J. Read, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, P. Rettengo, F. Ricci, C. J. Richardson, J. W. Richardson, L. Richardson, P. M. Ricker, G. Riemenschneider, K. Riles, M. Rizzo, N. A. Robertson, F. Robinet, A. Rocchi, J. A. Rocha, S. Rodriguez, R. D. Rodriguez-Soto, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, A. Romero, I. M. Romero-Shaw, J. H. Romie, S. Ronchini, C. A. Rose, D. Rose, K. Rose, M. J. B. Rosell, D. Rosińska, S. G. Rosofsky, M. P. Ross, S. Rowan, S. J. Rowlinson, Santosh Roy, Soumen Roy, P. Ruggi, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, M. Sakellariadou, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, A. Samajdar, E. J. Sanchez, J. H. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, K. A. Santiago, E. Santos, T. R. Saravanan, N. Sarin, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, O. Sauter, R. L. Savage, V. Savant, D. Sawant, S. Sayah, D. Schaetzl, P. Schale, M. Scheel, J. Scheuer, A. Schindler-Tyka, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, E. Schreiber, B. W. Schulte, B. F. Schutz, O. Schwarm, E. Schwartz, J. Scott, S. M. Scott, M. Seglar-Arroyo, E. Seidel, D. Sellers, A. S. Sengupta, N. Sennett, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, T. Shaffer, M. S. Shahriar, S. Sharifi, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, H. Shen, M. Shikauchi, R. Shink, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Shukla, S. ShyamSundar, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singha, A. Singhal, A. M. Sintes, V. Sipala, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. Smetana, J. R. Smith, R. J. E. Smith, S. N. Somala, E. J. Son, S. Soni, B. Sorazu, V. Sordini, F. Sorrentino, N. Sorrentino, R. Soulard, T. Souradeep, E. Sowell, A. P. Spencer, M. Spera, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, D. A. Steer, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, S. P. Stevenson, G. Stolle-McAllister, D. J. Stops, M. Stover, K. A. Strain, G. Stratta, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, J. Südbeck, S. Sudhagar, V. Sudhir, H. G. Suh, T. Z. Summerscales, H. Sun, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, S. C. Tait, C. Talbot, A. J. Tanasijczuk, D. B. Tanner, D. Tao, A. Tapia, E. N. Tapia San Martin, J. D. Tasson, R. Taylor, R. Tenorio, L. Terkowski, M. P. Thirugnanasambandam, L. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, J. E. Thompson, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, Shubhanshu Tiwari, Srishti Tiwari, V. Tiwari, K. Toland, A. E. Tolley, M. Tonelli, Z. Tornasi, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, I. Tosta e Melo, D. Töyrä, A. T. Tran, A. Trapananti, F. Travasso, G. Traylor, M. C. Tringali, A. Tripathee, A. Trovato, R. J. Trudeau, D. S. Tsai, K. W. Tsang, M. Tse, R. Tso, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, M. Turconi, A. S. Ubhi,

- R. P. Udall, K. Ueno, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, A. C. Utina, H. Vahlbruch, G. Vajente, A. Vajpeyi, G. Valdes, M. Valentini, V. Valsan, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, M. Vardaro, A. F. Vargas, V. Varma, S. Vass, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, J. Venneberg, G. Venugopalan, D. Verkindt, Y. Verma, D. Veske, F. Vetrano, A. Viceré, A. D. Viets, V. Villa-Ortega, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, R. C. Walet, M. Walker, G. S. Wallace, L. Wallace, S. Walsh, J. Z. Wang, S. Wang, W. H. Wang, Y. F. Wang, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, N. Y. Washington, J. Watchi, B. Weaver, L. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, F. Wellmann, L. Wen, P. Weßels, J. W. Westhouse, K. Wette, J. T. Whelan, D. D. White, L. V. White, B. F. Whiting, C. Whittle, D. M. Wilken, D. Williams, M. J. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, D. J. Wilson, M. H. Wimmer, W. Winkler, C. C. Wipf, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, I. C. F. Wong, J. Wrangel, J. L. Wright, D. S. Wu, D. M. Wysocki, L. Xiao, H. Yamamoto, L. Yang, Y. Yang, Z. Yang, M. J. Yap, D. W. Yeeles, A. Yoon, Hang Yu, Haocun Yu, S. H. R. Yuen, A. Zadrożny, M. Zanolin, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, J. Zhang, L. Zhang, R. Zhang, T. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, A. B. Zimmerman, M. E. Zucker, J. Zweizig, LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration. Population Properties of Compact Objects from the Second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog. *ApJ*, 913(1):L7, May 2021b. doi: 10.3847/2041-8213/abe949.
- R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, N. Adhikari, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, D. Agarwal, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, T. Akutsu, P. F. de Alarcón, S. Akcay, S. Albanesi, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, C. Anand, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, M. Ando, T. Andrade, N. Andres, T. Andrić, S. V. Angelova, S. Ansoldi, J. M. Antelis, S. Antier, F. Antonini, S. Appert, Koji Arai, Koya Arai, Y. Arai, S. Araki, A. Araya, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Aritomi, N. Arnaud, M. Arogeti, S. M. Aronson, K. G. Arun, H. Asada, Y. Asali, G. Ashton, Y. Aso, M. Assiduo, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, C. Austin, S. Babak, F. Badaracco, M. K. M. Bader, C. Badger, S. Bae, Y. Bae, A. M. Baer, S. Bagnasco, Y. Bai, L. Baiotti, J. Baird, R. Bajpai, M. Ball, G. Ballardín, S. W. Ballmer, A. Balsamo, G. Baltus, S. Banagiri, D. Bankar, J. C. Barayoga, C. Barbieri, B. C. Barish, D. Barker, P. Barneo, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj, J. C. Bayley, A. C. Baylor, M. Bazzan, B. Bécsy, V. M. Bedakihale, M. Bejger, I. Belahcene, V. Benedetto, D. Beniwal, T. F. Bennett, J. D. Bentley, M. Benyaala, F. Bergamin, B. K. Berger, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, D. Beveridge, R. Bhandare, U. Bhardwaj, D. Bhattacharjee, S. Bhaumik, I. A. Bilenko, G. Billingsley, S. Bini, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bisch, S. Biscoveanu, A. Bisht, B. Biswas, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, G. Bogaert, M. Boldrini, L. D. Bonavena, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, N. Bose, S. Bose, V. Bossilkov, V. Boudart, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, A. Branch, M. Branchesi, J. Brandt, J. E. Brau, M. Breschi, T. Briant, J. H. Briggs, A. Brillet, M. Brinkmann, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, G. Bruno, R. Bruntz, J. Bryant, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, R. Buscicchio, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, J. D. Callaghan, T. A. Callister, E. Calloni, J. Cameron, J. B. Camp, M. Canepa, S. Canevarolo, M. Cannavacciuolo, K. C. Cannon,

H. Cao, Z. Cao, E. Capocasa, E. Capote, G. Carapella, F. Carbognani, J. B. Carlin, M. F. Carney, M. Carpinelli, G. Carrillo, G. Carullo, T. L. Carver, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, G. Castaldi, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, M. Ceasar, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, W. Chaibi, K. Chakravarti, S. Chalathadka Subrahmanya, E. Champion, C. H. Chan, C. Chan, C. L. Chan, K. Chan, M. Chan, K. Chandra, P. Charnial, S. Chao, C. E. A. Chapman-Bird, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, C. Chatterjee, Debarati Chatterjee, Deep Chatterjee, M. Chaturvedi, S. Chaty, K. Chatziioannou, C. Chen, H. Y. Chen, J. Chen, K. Chen, X. Chen, Y. B. Chen, Y. R. Chen, Z. Chen, H. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Cheung, H. Y. Chia, F. Chiadini, C. Y. Chiang, G. Chiarini, R. Chierici, A. Chincarini, M. L. Chiofalo, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, R. K. Choudhary, S. Choudhary, N. Christensen, H. Chu, Q. Chu, Y. K. Chu, S. Chua, K. W. Chung, G. Ciani, P. Ciecielag, M. Cieślak, M. Cifaldi, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, E. N. Clark, J. A. Clark, L. Clarke, P. Clearwater, S. Clesse, F. Cleva, E. Coccia, E. Codazzo, P. F. Cohadon, D. E. Cohen, L. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, A. Colombo, M. Colpi, C. M. Compton, M. Constancio, L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, B. Cousins, P. Couvares, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, A. W. Criswell, M. Croquette, S. G. Crowder, J. R. Cudell, T. J. Cullen, A. Cumming, R. Cummings, L. Cunningham, E. Cuoco, M. Curyło, P. Dabadie, T. Dal Canton, S. Dall’Osso, G. Dálya, A. Dana, L. M. Daneshgaranbajastani, B. D’Angelo, B. Danila, S. Danilishin, S. D’Antonio, K. Danzmann, C. Darsow-Fromm, A. Dasgupta, L. E. H. Datrier, S. Datta, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, G. S. Davies, D. Davis, M. C. Davis, E. J. Daw, R. Dean, D. Debra, M. Deenadayalan, J. Degallaix, M. de Laurentis, S. Deléglise, V. Del Favero, F. de Lillo, N. de Lillo, W. Del Pozzo, L. M. Demarchi, F. de Matteis, V. D’Emilio, N. Demos, T. Dent, A. Depasse, R. de Pietri, R. De Rosa, C. de Rossi, R. Desalvo, R. de Simone, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, M. Diaz-Ortiz, N. A. Didio, T. Dietrich, L. di Fiore, C. di Fronzo, C. di Giorgio, F. di Giovanni, M. di Giovanni, T. di Girolamo, A. di Lieto, B. Ding, S. di Pace, I. di Palma, F. di Renzo, A. K. Divakarla, A. Dmitriev, Z. Doctor, L. D’Onofrio, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, M. Drago, J. C. Driggers, Y. Drori, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, D. D’Urso, P. A. Duverne, S. E. Dwyer, C. Eassa, P. J. Easter, M. Ebersold, T. Eckhardt, G. Eddolls, B. Edelman, T. B. Edo, O. Edy, A. Effler, S. Eguchi, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, A. Ejlli, E. Engelby, Y. Enomoto, L. Errico, R. C. Essick, H. Estellés, D. Estevez, Z. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, B. E. Ewing, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, A. M. Farah, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, N. W. Farrow, E. J. Fauchon-Jones, G. Favaro, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, J. Feicht, M. M. Fejer, E. Fenyvesi, D. L. Ferguson, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, P. Figura, I. Fiori, M. Fishbach, R. P. Fisher, R. Fittipaldi, V. Fiumara, R. Flaminio, E. Floden, H. Fong, J. A. Font, B. Fornal, P. W. F. Forsyth, A. Franke, S. Frasca, F. Frasconi, C. Frederick, J. P. Freed, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. G. Fronzé, Y. Fujii, Y. Fujikawa, M. Fukunaga, M. Fukushima, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, B. U. Gadre, J. R. Gair, J. Gais, S. Galaudage, R. Gamba, D. Ganapathy, A. Ganguly, D. Gao, S. G. Gaonkar, B. Garaventa, F. García, C. García-Núñez, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, V. Gayathri, G. G. Ge, G. Gemme, A. Gennai, J. George, R. N. George, O. Gerberding, L. Gergely, P. Gewecke, S. Ghonge, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, Shaon Ghosh, Shrobana Ghosh, B. Giacomazzo, L. Giacoppo, J. A. Gaiame, K. D. Giardino, D. R. Gibson, C. Gier, M. Giesler, P. Giri, F. Gissi, J. Glanzer, A. E.

Gleckl, P. Godwin, J. Golomb, E. Goetz, R. Goetz, N. Gohlke, B. Goncharov, G. González, A. Gopakumar, M. Gosselin, R. Gouaty, D. W. Gould, B. Grace, A. Grado, M. Granata, V. Granata, A. Grant, S. Gras, P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, A. M. Gretarsson, E. M. Gretarsson, D. Griffith, W. Griffiths, H. L. Griggs, G. Grignani, A. Grimaldi, S. J. Grimm, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, D. Guerra, G. M. Guidi, A. R. Guimaraes, G. Guixé, H. K. Gulati, H. K. Guo, Y. Guo, Anchal Gupta, Anuradha Gupta, P. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, F. Guzman, S. Ha, L. Haegel, A. Hagiwara, S. Haino, O. Halim, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, W. B. Han, M. Haney, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. Hannuksela, H. Hansen, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, D. Hartwig, K. Hasegawa, B. Haskell, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Hattori, K. Haughian, H. Hayakawa, K. Hayama, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, A. Heidt, M. C. Heintze, J. Heinze, J. Heinzl, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, A. F. Helmling-Cornell, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, E. Hennes, J. Hennig, M. H. Hennig, A. G. Hernandez, F. Hernandez Vivanco, M. Heurs, S. Hild, P. Hill, Y. Himemoto, A. S. Hines, Y. Hiranuma, N. Hirata, E. Hirose, S. Hochheim, D. Hofman, J. N. Hohmann, D. G. Holcomb, N. A. Holland, I. J. Hollows, Z. J. Holmes, K. Holt, D. E. Holz, Z. Hong, P. Hopkins, J. Hough, S. Hourihane, E. J. Howell, C. G. Hoy, D. Hoyland, A. Hreibi, B. H. Hsieh, Y. Hsu, G. Z. Huang, H. Y. Huang, P. Huang, Y. C. Huang, Y. J. Huang, Y. Huang, M. T. Hübner, A. D. Huddart, B. Hughey, D. C. Y. Hui, V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, R. Huxford, T. Huynh-Dinh, S. Ide, B. Idzkowski, A. Iess, B. Ikenoue, S. Imam, K. Inayoshi, C. Ingram, Y. Inoue, K. Ioka, M. Isi, K. Isleif, K. Ito, Y. Itoh, B. R. Iyer, K. Izumi, V. Jaberianhamedan, T. Jacqumin, S. J. Jadhav, S. P. Jadhav, A. L. James, A. Z. Jan, K. Jani, J. Janquart, K. Janssens, N. N. Janthalur, P. Jaranowski, D. Jariwala, R. Jaume, A. C. Jenkins, K. Jenner, C. Jeon, M. Jeunon, W. Jia, H. B. Jin, G. R. Johns, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, P. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, P. Jung, K. Jung, J. Junker, V. Juste, K. Kaihotsu, T. Kajita, M. Kakizaki, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, M. Kamiizumi, N. Kanda, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, Y. Kao, S. J. Kapadia, D. P. Kapasi, S. Karat, C. Karathanasis, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, W. Kastaun, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, T. Kaur, K. Kawabe, K. Kawaguchi, N. Kawai, T. Kawasaki, F. Kéfélian, D. Keitel, J. S. Key, S. Khadka, F. Y. Khalili, S. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. C. Kim, J. Kim, K. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, N. Kimura, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, N. Kita, H. Kitazawa, L. Kleybolte, S. Klimenko, A. M. Knee, T. D. Knowles, E. Knyazev, P. Koch, G. Koekoek, Y. Kojima, K. Kokeyama, S. Koley, P. Kolitsidou, M. Kolstein, K. Komori, V. Kondrashov, A. K. H. Kong, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, K. Kotake, M. Kovalam, D. B. Kozak, C. Kozakai, R. Kozu, V. Kringel, N. V. Krishnendu, A. Królak, G. Kuehn, F. Kuei, P. Kuijer, S. Kulkarni, A. Kumar, P. Kumar, Rahul Kumar, Rakesh Kumar, J. Kume, K. Kuns, C. Kuo, H. S. Kuo, Y. Kuromiya, S. Kuroyanagi, K. Kusayanagi, S. Kuwahara, K. Kwak, P. Lagabbe, D. Laghi, E. Lalande, T. L. Lam, A. Lamberts, M. Landry, P. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, I. La Rosa, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Lecoeuche, H. K. Lee, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, R. Lee, J. Lehmann, A. Lemaitre, M. Leonardi, N. Leroy, N. Letendre, C. Levesque, Y. Levin, J. N. Leviton, K. Leyde, A. K. Y. Li, B. Li, J. Li, K. L. Li, T. G. F. Li, X. Li, C. Y. Lin, F. K. Lin, F. L. Lin, H. L. Lin, L. C. C. Lin, F. Linde, S. D. Linker, J. N. Linley, T. B. Littenberg, G. C. Liu, J. Liu, K. Liu, X. Liu, F. Llamas, M. Llorens-Monteagudo, R. K. L. Lo, A. Lockwood, M. Loh, L. T. London, A. Longo, D. Lopez, M. Lopez Portilla, M. Lorenzini, V. Lorette,

M. Lormand, G. Losurdo, T. P. Lott, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, J. F. Lucacioni, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, L. W. Luo, J. E. Lynam, R. Macas, M. Macin-nis, D. M. MacLeod, I. A. O. MacMillan, A. Macquet, I. Magaña Hernandez, C. Magazzù, R. M. Magee, R. Maggiore, M. Magnozzi, S. Mahesh, E. Majorana, C. Makarem, I. Maksimovic, S. Maliakal, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, J. L. Mango, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, M. Marchio, F. Marion, Z. Mark, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, M. Martinez, V. A. Martinez, V. Martinez, K. Martinovic, D. V. Martynov, E. J. Marx, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, M. Mateu-Lucena, F. Matichard, M. Matiushchekina, N. Mavalvala, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, P. K. McClincy, S. McCormick, L. McCuller, G. I. McGhee, S. C. McGuire, C. McIsaac, J. McIver, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, M. Mehmet, A. K. Mehta, Q. Meijer, A. Melatos, D. A. Melchor, G. Mendell, A. Menendez-Vazquez, C. S. Menoni, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh, J. D. Merritt, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Mhaske, A. Miani, H. Miao, I. Michaloliakos, C. Michel, Y. Michimura, H. Middleton, L. Milano, A. L. Miller, A. Miller, B. Miller, S. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, E. Milotti, O. Minazzoli, Y. Minenkov, N. Mio, Ll. M. Mir, M. Miravet-Tenés, C. Mishra, T. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitsel-makher, R. Mittleman, O. Miyakawa, A. Miyamoto, Y. Miyazaki, K. Miyo, S. Miyoki, Geoffrey Mo, L. M. Modafferi, E. Moguel, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, S. R. Mohite, I. Molina, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, A. More, C. Moreno, G. Moreno, Y. Mori, S. Morisaki, Y. Moriwaki, G. Morrás, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, S. Mozzon, F. Muciaccia, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, Soma Mukher-
jee, Subroto Mukherjee, Suvodip Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, P. G. Murray, R. Musenich, S. Muusse, S. L. Nadji, K. Nagano, S. Nagano, A. Nagar, K. Nakamura, H. Nakano, M. Nakano, R. Nakashima, Y. Nakayama, V. Napolano, I. Nardecchia, T. Narikawa, L. Naticchioni, B. Nayak, R. K. Nayak, R. Negishi, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, P. Neubauer, A. Neunzert, K. Y. Ng, S. W. S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, T. Nguyen, L. Nguyen Quynh, W. T. Ni, S. A. Nichols, A. Nishizawa, S. Nissanke, E. Nitoglia, F. Nocera, M. Norman, C. North, S. Nozaki, J. F. Nuño Siles, L. K. Nuttall, J. Oberling, B. D. O'Brien, Y. Obuchi, J. O'Dell, E. Oelker, W. Ogaki, G. Oganessian, J. J. Oh, K. Oh, S. H. Oh, M. Ohashi, N. Ohishi, M. Ohkawa, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, Y. Okutani, K. Okutomi, C. Olivetto, K. Oohara, C. Ooi, R. Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, N. D. Ormsby, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, E. O'Shea, S. Oshino, S. Ossokine, C. Osthelder, S. Otabe, D. J. Ottaway, H. Overmier, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, H. Pan, K. Pan, P. K. Panda, H. Pang, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. H. Panther, F. Paoletti, A. Paoli, A. Paolone, A. Parisi, H. Park, J. Park, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, M. Patel, M. Pathak, B. Patricelli, A. S. Patron, S. Paul, E. Payne, M. Pedraza, M. Pegoraro, A. Pele, F. E. Peña Arellano, S. Penn, A. Perego, A. Pereira, T. Pereira, C. J. Perez, C. Périgois, C. C. Perkins, A. Perreca, S. Perriès, J. Petermann, D. Petterson, H. P. Pfeiffer, K. A. Pham, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pichot, M. Piendibene, F. Piergiovanni, L. Pierini, V. Pierro, G. Pillant, M. Pillas, F. Pilo, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pinto, B. Piotrkowski, K. Piotrkowski, M. Pirello, M. D. Pitkin, E. Placidi, L. Planas, W. Plastino, C. Pluchar, R. Poggiani, E. Polini, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, R. Poulton, J. Powell, M. Pracchia, T. Pradier,

- A. K. Prajapati, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, P. Prospero, L. Prudenzi, A. Puecher, M. Punturo, F. Puosi, P. Puppo, M. Pürner, H. Qi, V. Quetschke, R. Quitzow-James, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raffai, S. X. Rail, S. Raja, C. Rajan, K. E. Ramirez, T. D. Ramirez, A. Ramos-Buades, J. Rana, P. Rapagnani, U. D. Rapol, A. Ray, V. Raymond, N. Raza, M. Razzano, J. Read, L. A. Rees, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, S. W. Reid, D. H. Reitze, P. Relton, A. Renzini, P. Rettigno, A. Reza, M. Rezac, F. Ricci, D. Richards, J. W. Richardson, L. Richardson, G. Riemschneider, K. Riles, S. Rinaldi, K. Rink, M. Rizzo, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, S. Rodriguez, L. Rolland, J. G. Rollins, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, A. Romero-Rodríguez, I. M. Romero-Shaw, J. H. Romie, S. Ronchini, L. Rosa, C. A. Rose, D. Rosińska, M. P. Ross, S. Rowan, S. J. Rowlinson, S. Roy, Santosh Roy, Soumen Roy, D. Rozza, P. Ruggi, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, J. Sadiq, N. Sago, S. Saito, Y. Saito, K. Sakai, Y. Sakai, M. Sakellariadou, Y. Sakuno, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, E. J. Sanchez, J. H. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, A. Sanuy, T. R. Saravanan, N. Sarin, B. Sassolas, H. Satari, B. S. Sathyaprakash, S. Sato, T. Sato, O. Sauter, R. L. Savage, T. Sawada, D. Sawant, H. L. Sawant, S. Sayah, D. Schaetzel, M. Scheel, J. Scheuer, M. Schiworski, P. Schmidt, S. Schmidt, R. Schnabel, M. Schneewind, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, B. W. Schulte, B. F. Schutz, E. Schwartz, J. Scott, S. M. Scott, M. Seglar-Arroyo, T. Sekiguchi, Y. Sekiguchi, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, E. G. Seo, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, T. Shaffer, M. S. Shahriar, B. Shams, L. Shao, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, N. S. Shchegolev, S. Shibagaki, M. Shikachi, R. Shimizu, T. Shimoda, K. Shimode, H. Shinkai, T. Shishido, A. Shoda, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, S. Shyamsundar, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singha, A. M. Sintes, V. Sipala, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. Smetana, J. R. Smith, R. J. E. Smith, J. Soldateschi, S. N. Somala, K. Somiya, E. J. Son, K. Soni, S. Soni, V. Sordini, F. Sorrentino, N. Sorrentino, H. Sotani, R. Souillard, T. Souradeep, E. Sowell, V. Spagnuolo, A. P. Spencer, M. Spera, R. Srinivasan, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, D. A. Steer, J. Steinhoff, J. Steinlechner, S. Steinlechner, S. P. Stevenson, D. J. Stops, M. Stover, K. A. Strain, L. C. Strang, G. Stratta, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, S. Sudhagar, V. Sudhir, R. Sugimoto, H. G. Suh, A. G. Sullivan, T. Z. Summerscales, H. Sun, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, Takamasa Suzuki, Toshikazu Suzuki, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, P. Szewczyk, M. Tacca, H. Tagoshi, S. C. Tait, H. Takahashi, R. Takahashi, A. Takamori, S. Takano, H. Takeda, M. Takeda, C. J. Talbot, C. Talbot, H. Tanaka, Kazuyuki Tanaka, Kenta Tanaka, Taiki Tanaka, Takahiro Tanaka, A. J. Tanasijczuk, S. Tanioka, D. B. Tanner, D. Tao, L. Tao, E. N. Tapia San Martín, C. Taranto, J. D. Tasson, S. Telada, R. Tenorio, J. E. Terhune, L. Terkowski, M. P. Thiruganasambandam, L. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, J. E. Thompson, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, Shubhanshu Tiwari, Srishti Tiwari, V. Tiwari, A. M. Toivonen, K. Toland, A. E. Tolley, T. Tomaru, Y. Tomigami, T. Tomura, M. Tonelli, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, I. Tosta E Melo, D. Töyrä, A. Trapananti, F. Travasso, G. Traylor, M. Trevor, M. C. Tringali, A. Tripathy, L. Troiano, A. Trovato, L. Trozzo, R. J. Trudeau, D. S. Tsai, D. Tsai, K. W. Tsang, T. Tsang, J. S. Tsao, M. Tse, R. Tso, K. Tsubono, S. Tsuchida, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, T. Tsuzuki, K. Turbang, M. Turconi, D. Tuyenbayev, A. S. Ubhi, N. Uchikata, T. Uchiyama, R. P. Udall, A. Ueda, T. Uehara, K. Ueno, G. Ueshima, C. S. Unnikrishnan, F. Uraguchi, A. L. Urban, T. Ushiba, A. Utina, H. Vahlbruch, G. Vajente, A. Vajpeyi, G. Valdes, M. Valentini, V. Valsan, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. van den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen,

- J. Vanosky, M. H. P. M. van Putten, N. van Remortel, M. Vardaro, A. F. Vargas, V. Varma, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, J. Venneberg, G. Venugopalan, D. Verkindt, P. Verma, Y. Verma, D. Veske, F. Vetrano, A. Viceré, S. Vidyant, A. D. Viets, A. Vijaykumar, V. Villa-Ortega, J. Y. Vinet, A. Virtuoso, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, E. R. G. von Reis, J. S. A. von Wrangel, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, L. E. Wade, M. Wade, K. J. Wagner, R. C. Walet, M. Walker, G. S. Wallace, L. Wallace, S. Walsh, J. Wang, J. Z. Wang, W. H. Wang, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, T. Washimi, N. Y. Washington, J. Watchi, B. Weaver, S. A. Webster, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, C. M. Weller, F. Wellmann, L. Wen, P. Weßels, K. Wette, J. T. Whelan, D. D. White, B. F. Whiting, C. Whittle, D. Wilken, D. Williams, M. J. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, D. J. Wilson, W. Winkler, C. C. Wipf, T. Wlodarczyk, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, I. C. F. Wong, C. Wu, D. S. Wu, H. Wu, S. Wu, D. M. Wysocki, L. Xiao, W. R. Xu, T. Yamada, H. Yamamoto, Kazuhiro Yamamoto, Kohei Yamamoto, T. Yamamoto, K. Yamashita, R. Yamazaki, F. W. Yang, L. Yang, Y. Yang, Yang Yang, Z. Yang, M. J. Yap, D. W. Yeeles, A. B. Yelikar, M. Ying, K. Yokogawa, J. Yokoyama, T. Yokozawa, J. Yoo, T. Yoshioka, Hang Yu, Haocun Yu, H. Yuzurihara, A. Zadrożny, M. Zanolin, S. Zeidler, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, M. Zhan, H. Zhang, J. Zhang, L. Zhang, T. Zhang, Y. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, Y. Zhao, Yue Zhao, Y. Zheng, R. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, Z. H. Zhu, A. B. Zimmerman, Y. Zlochower, M. E. Zucker, J. Zweizig, LIGO Scientific Collaboration, VIRGO Collaboration, and KAGRA Collaboration. Population of Merging Compact Binaries Inferred Using Gravitational Waves through GWTC-3. *Physical Review X*, 13(1):011048, January 2023. doi: 10.1103/PhysRevX.13.011048.
- Tal Alexander and Oliver Pfuhl. Constraining the Dark Cusp in the Galactic Center by Long-period Binaries. *ApJ*, 780(2):148, January 2014. doi: 10.1088/0004-637X/780/2/148.
- J. M. O. Antognini. Timescales of Kozai-Lidov oscillations at quadrupole and octupole order in the test particle limit. *MNRAS*, 452(4):3610–3619, October 2015. doi: 10.1093/mnras/stv1552.
- Joe M. Antognini, Benjamin J. Shappee, Todd A. Thompson, and Pau Amaro-Seoane. Rapid eccentricity oscillations and the mergers of compact objects in hierarchical triples. *MNRAS*, 439(1):1079–1091, March 2014. doi: 10.1093/mnras/stu039.
- Fabio Antonini, Norman Murray, and Seppo Mikkola. Black Hole Triple Dynamics: A Breakdown of the Orbit Average Approximation and Implications for Gravitational Wave Detections. *ApJ*, 781(1):45, January 2014. doi: 10.1088/0004-637X/781/1/45.
- Manuel Arca Sedda, Gongjie Li, and Bence Kocsis. Order in the chaos. Eccentric black hole binary mergers in triples formed via strong binary-binary scatterings. *A&A*, 650:A189, June 2021. doi: 10.1051/0004-6361/202038795.
- James Binney and Scott Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. 2008.
- Omer Blaes, Man Hoi Lee, and Aristotle Socrates. The Kozai Mechanism and the Evolution of Binary Supermassive Black Holes. *ApJ*, 578(2):775–786, October 2002. doi: 10.1086/342655.
- Dirk Brouwer. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *AJ*, 64:378, November 1959. doi: 10.1086/107958.
- Dirk Brouwer and Gerald M. Clemence. *Methods of celestial mechanics*. 1961.

- T. Damour and N. Deruelle. General relativistic celestial mechanics of binary systems (I and II). *Journal des Astronomes Francais*, 25:21, January 1985.
- Daniel Fabrycky and Scott Tremaine. Shrinking Binary and Planetary Orbits by Kozai Cycles with Tidal Friction. *ApJ*, 669(2):1298–1315, November 2007. doi: 10.1086/521702.
- F. Farago and J. Laskar. High-inclination orbits in the secular quadrupolar three-body problem. *MNRAS*, 401(2):1189–1198, January 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15711.x.
- Eric B. Ford, Boris Kozinsky, and Frederic A. Rasio. Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems. *ApJ*, 535(1):385–401, May 2000. doi: 10.1086/308815.
- Eric B. Ford, Boris Kozinsky, and Frederic A. Rasio. Erratum: “Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems“ (</abs/2000ApJ...535..385F>) *ApJ*, 535, 385 [2000]. *ApJ*, 605(2):966–966, April 2004. doi: 10.1086/382349.
- Giacomo Fragione and Omer Bromberg. Eccentric binary black hole mergers in globular clusters hosting intermediate-mass black holes. *MNRAS*, 488(3):4370–4377, September 2019. doi: 10.1093/mnras/stz2024.
- Nicola Giacobbo and Michela Mapelli. The progenitors of compact-object binaries: impact of metallicity, common envelope and natal kicks. *MNRAS*, 480(2):2011–2030, October 2018. doi: 10.1093/mnras/sty1999.
- Mirek Giersz, Nathan Leigh, Arkadiusz Hypki, Nora Lützgendorf, and Abbas Askar. MOCCA code for star cluster simulations - IV. A new scenario for intermediate mass black hole formation in globular clusters. *MNRAS*, 454(3):3150–3165, December 2015. doi: 10.1093/mnras/stv2162.
- Evgeni Grishin, Hagai B. Perets, and Giacomo Fragione. Quasi-secular evolution of mildly hierarchical triple systems: analytics and applications for GW sources and hot Jupiters. *MNRAS*, 481(4):4907–4923, December 2018. doi: 10.1093/mnras/sty2477.
- Niv Haim and Boaz Katz. Extreme close approaches in hierarchical triple systems with comparable masses. *MNRAS*, 479(3):3155–3166, September 2018. doi: 10.1093/mnras/sty1588.
- Adrian S. Hamers. Properties of von Zeipel-Lidov-Kozai oscillations in triple systems at the quadrupole order: relaxing the test particle approximation. *MNRAS*, 500(3):3481–3496, January 2021. doi: 10.1093/mnras/staa3498.
- R. S. Harrington. Dynamical evolution of triple stars. *AJ*, 73:190–194, April 1968. doi: 10.1086/110614.
- Robert S. Harrington. The Stellar Three-Body Problem. *Celestial Mechanics*, 1(2):200–209, June 1969. doi: 10.1007/BF01228839.
- Matthew Holman, Jihad Touma, and Scott Tremaine. Chaotic variations in the eccentricity of the planet orbiting 16 Cygni B. *Nature*, 386(6622):254–256, March 1997. doi: 10.1038/386254a0.
- P. B. Ivanov, A. G. Polnarev, and P. Saha. The tidal disruption rate in dense galactic cusps containing a supermassive binary black hole. *MNRAS*, 358(4):1361–1378, April 2005. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.08843.x.

- W. H. Jefferys and J. Moser. Quasi-periodic Solutions for the three-body problem. *AJ*, 71:568, September 1966. doi: 10.1086/109964.
- Boaz Katz and Subo Dong. Exponential growth of eccentricity in secular theory. *arXiv e-prints*, art. arXiv:1105.3953, May 2011. doi: 10.48550/arXiv.1105.3953.
- Boaz Katz, Subo Dong, and Renu Malhotra. Long-Term Cycling of Kozai-Lidov Cycles: Extreme Eccentricities and Inclinations Excited by a Distant Eccentric Perturber. *Phys. Rev. Lett.*, 107(18):181101, October 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.181101.
- Fazeel Mahmood Khan, Ingo Berentzen, Peter Berczik, Andreas Just, Lucio Mayer, Keigo Nitadori, and Simone Callegari. Formation and Hardening of Supermassive Black Hole Binaries in Minor Mergers of Disk Galaxies. *ApJ*, 756(1):30, September 2012. doi: 10.1088/0004-637X/756/1/30.
- Yoshihide Kozai. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *AJ*, 67:591–598, November 1962. doi: 10.1086/108790.
- Y. Krymolowski and T. Mazeh. Studies of multiple stellar systems - II. Second-order averaged Hamiltonian to follow long-term orbital modulations of hierarchical triple systems. *MNRAS*, 304(4):720–732, April 1999. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02349.x.
- J. Laskar and G. Boué. Explicit expansion of the three-body disturbing function for arbitrary eccentricities and inclinations. *A&A*, 522:A60, November 2010. doi: 10.1051/0004-6361/201014496.
- Man Hoi Lee and S. J. Peale. Secular Evolution of Hierarchical Planetary Systems. *ApJ*, 592(2):1201–1216, August 2003. doi: 10.1086/375857.
- Nathan W. C. Leigh, Nora Lützgendorf, Aaron M. Geller, Thomas J. Maccarone, Craig Heinke, and Alberto Sesana. On the coexistence of stellar-mass and intermediate-mass black holes in globular clusters. *MNRAS*, 444(1):29–42, October 2014. doi: 10.1093/mnras/stu1437.
- M. L. Lidov. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planet. Space Sci.*, 9(10):719–759, October 1962. doi: 10.1016/0032-0633(62)90129-0.
- M. L. Lidov and S. L. Ziglin. The Analysis of Restricted Circular Twice-averaged Three Body Problem in the Case of Close Orbits. *Celestial Mechanics*, 9(2):151–173, April 1974. doi: 10.1007/BF01260510.
- M. L. Lidov and S. L. Ziglin. Non-Restricted Double-averaged Three Body Problem in Hill’s Case. *Celestial Mechanics*, 13(4):471–489, June 1976. doi: 10.1007/BF01229100.
- Yoram Lithwick and Smadar Naoz. The Eccentric Kozai Mechanism for a Test Particle. *ApJ*, 742(2):94, December 2011. doi: 10.1088/0004-637X/742/2/94.
- Bin Liu and Dong Lai. Black Hole and Neutron Star Binary Mergers in Triple Systems: Merger Fraction and Spin-Orbit Misalignment. *ApJ*, 863(1):68, August 2018. doi: 10.3847/1538-4357/aad09f.

- Bin Liu, Diego J. Muñoz, and Dong Lai. Suppression of extreme orbital evolution in triple systems with short-range forces. *MNRAS*, 447(1):747–764, February 2015. doi: 10.1093/mnras/stu2396.
- Carlos O. Lousto and Hiroyuki Nakano. Three-body equations of motion in successive post-Newtonian approximations. *Classical and Quantum Gravity*, 25(19):195019, October 2008. doi: 10.1088/0264-9381/25/19/195019.
- Liantong Luo, Boaz Katz, and Subo Dong. Double-averaging can fail to characterize the long-term evolution of Lidov-Kozai Cycles and derivation of an analytical correction. *MNRAS*, 458(3):3060–3074, May 2016. doi: 10.1093/mnras/stw475.
- F. Malige, P. Robutel, and J. Laskar. Partial Reduction in the N-Body Planetary Problem using the Angular Momentum Integral. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 84(3):283–316, November 2002.
- Abhi Mangipudi, Evgeni Grishin, Alessandro A. Trani, and Ilya Mandel. Extreme Eccentricities of Triple Systems: Analytic Results. *ApJ*, 934(1):44, July 2022. doi: 10.3847/1538-4357/ac7958.
- Christian Marchal. *The three-body problem*. 1990.
- Rosemary A. Mardling. The determination of planetary structure in tidally relaxed inclined systems. *MNRAS*, 407(2):1048–1069, September 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16814.x.
- Rosemary A. Mardling and Sverre J. Aarseth. Tidal interactions in star cluster simulations. *MNRAS*, 321(3):398–420, March 2001. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.03974.x.
- J. L. Margot, P. Pravec, P. Taylor, B. Carry, and S. Jacobson. Asteroid Systems: Binaries, Triples, and Pairs. In *Asteroids IV*, pages 355–374. 2015. doi: 10.2458/azu_uapress_9780816532131-ch019.
- Miguel A. S. Martinez, Carl L. Rodriguez, and Giacomo Fragione. On the Mass Ratio Distribution of Black Hole Mergers in Triple Systems. *ApJ*, 937(2):78, October 2022. doi: 10.3847/1538-4357/ac8d55.
- Seppo Mikkola and Kiyotaka Tanikawa. Algorithmic regularization of the few-body problem. *MNRAS*, 310(3):745–749, December 1999. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02982.x.
- M. Coleman Miller. Gravitational Radiation from Intermediate-Mass Black Holes. *ApJ*, 581(1):438–450, December 2002. doi: 10.1086/344156.
- M. Coleman Miller and Douglas P. Hamilton. Production of intermediate-mass black holes in globular clusters. *MNRAS*, 330(1):232–240, February 2002. doi: 10.1046/j.1365-8711.2002.05112.x.
- Carl D. Murray and Stanley F. Dermott. *Solar System Dynamics*. 2000. doi: 10.1017/CBO9781139174817.
- Smadar Naoz. The Eccentric Kozai-Lidov Effect and Its Applications. *ARA&A*, 54:441–489, September 2016. doi: 10.1146/annurev-astro-081915-023315.

- Smadar Naoz, Will M. Farr, Yoram Lithwick, Frederic A. Rasio, and Jean Teysandier. Hot Jupiters from secular planet-planet interactions. *Nature*, 473(7346):187–189, May 2011. doi: 10.1038/nature10076.
- Smadar Naoz, Will M. Farr, Yoram Lithwick, Frederic A. Rasio, and Jean Teysandier. Secular dynamics in hierarchical three-body systems. *MNRAS*, 431(3):2155–2171, May 2013a. doi: 10.1093/mnras/stt302.
- Smadar Naoz, Bence Kocsis, Abraham Loeb, and Nicolás Yunes. Resonant Post-Newtonian Eccentricity Excitation in Hierarchical Three-body Systems. *ApJ*, 773(2):187, August 2013b. doi: 10.1088/0004-637X/773/2/187.
- David Nesvorný, David Vokrouhlický, William F. Bottke, Keith Noll, and Harold F. Levison. Observed Binary Fraction Sets Limits on the Extent of Collisional Grinding in the Kuiper Belt. *AJ*, 141(5):159, May 2011. doi: 10.1088/0004-6256/141/5/159.
- P. C. Peters. Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses. *Physical Review*, 136(4B):1224–1232, November 1964. doi: 10.1103/PhysRev.136.B1224.
- P. C. Peters and J. Mathews. Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit. *Physical Review*, 131(1):435–440, July 1963. doi: 10.1103/PhysRev.131.435.
- David Polishook and Noah Brosch. Many binaries among NEAs. *arXiv e-prints*, art. astro-ph/0607128, July 2006. doi: 10.48550/arXiv.astro-ph/0607128.
- Simon F. Portegies Zwart and Stephen L. W. McMillan. Black Hole Mergers in the Universe. *ApJ*, 528(1):L17–L20, January 2000. doi: 10.1086/312422.
- Carl L. Rodriguez, Meagan Morscher, Bharath Pattabiraman, Sourav Chatterjee, Carl-Johan Haster, and Frederic A. Rasio. Binary Black Hole Mergers from Globular Clusters: Implications for Advanced LIGO. *Phys. Rev. Lett.*, 115(5):051101, July 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.051101.
- Johan Samsing and Kenta Hotokezaka. Populating the Black Hole Mass Gaps in Stellar Clusters: General Relations and Upper Limits. *ApJ*, 923(1):126, December 2021. doi: 10.3847/1538-4357/ac2b27.
- Gerhard Schäfer. Three-body hamiltonian in general relativity. *Physics Letters A*, 123(7):336–339, August 1987. doi: 10.1016/0375-9601(87)90389-6.
- M. Sidlichovsky. On the double averaged three-body problem. *Celestial Mechanics*, 29(3):295–305, March 1983. doi: 10.1007/BF01229141.
- Yubo Su, Bin Liu, and Dong Lai. The mass-ratio distribution of tertiary-induced binary black hole mergers. *MNRAS*, 505(3):3681–3697, August 2021. doi: 10.1093/mnras/stab1617.
- The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, N. Adhikari, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, D. Agarwal, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, S. Albanesi, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, C. Anand, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, T. Andrade, N. Andres, T. Andrić, S. V. Angelova, S. Ansoldi,

- J. M. Antelis, S. Antier, S. Appert, K. Arai, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Arnaud, S. M. Aronson, K. G. Arun, Y. Asali, G. Ashton, M. Assiduo, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, C. Austin, S. Babak, F. Badaracco, M. K. M. Bader, C. Badger, S. Bae, A. M. Baer, S. Bagnasco, Y. Bai, J. Baird, M. Ball, G. Ballardin, S. W. Ballmer, A. Balsamo, G. Baltus, S. Banagiri, D. Bankar, J. C. Barayoga, C. Barbieri, B. C. Barish, D. Barker, P. Barneo, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj, J. C. Bayley, A. C. Baylor, M. Bazzan, B. Bécsy, V. M. Bedakihale, M. Bejger, I. Belahcene, V. Benedetto, D. Beniwal, T. F. Bennett, J. D. Bentley, M. BenYaala, F. Bergamin, B. K. Berger, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, D. Beveridge, R. Bhandare, U. Bhardwaj, D. Bhattacharjee, S. Bhaumik, I. A. Bilenko, G. Billingsley, S. Bini, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bisch, S. Biscoveanu, A. Bisht, B. Biswas, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, G. Bogaert, M. Boldrini, L. D. Bonavena, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, N. Bose, S. Bose, V. Bossilkov, V. Boudart, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, A. Branch, M. Branchesi, J. E. Brau, M. Breschi, T. Briant, J. H. Briggs, A. Brillet, M. Brinkmann, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, G. Bruno, R. Bruntz, J. Bryant, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, R. Buscicchio, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, J. D. Callaghan, T. A. Callister, E. Calloni, J. Cameron, J. B. Camp, M. Canepa, S. Canevarolo, M. Cannavacciuolo, K. C. Cannon, H. Cao, E. Capote, G. Carapella, F. Carbognani, J. B. Carlin, M. F. Carney, M. Carpinelli, G. Carrillo, G. Carullo, T. L. Carver, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, G. Castaldi, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, M. Ceasar, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, W. Chaibi, K. Chakravarti, S. Chalathadka Subrahmanya, E. Champion, C. H. Chan, C. Chan, C. L. Chan, K. Chan, K. Chandra, P. Chanial, S. Chao, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, C. Chatterjee, Debarati Chatterjee, Deep Chatterjee, D. Chattopadhyay, M. Chaturvedi, S. Chaty, K. Chatziioannou, H. Y. Chen, J. Chen, X. Chen, Y. Chen, Z. Chen, H. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Cheung, H. Y. Chia, F. Chiadini, G. Chiarini, R. Chierici, A. Chincarini, M. L. Chiofalo, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, R. K. Choudhary, S. Choudhary, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, K. W. Chung, G. Ciani, P. Cielag, M. Cieřlar, M. Cifaldi, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, E. N. Clark, J. A. Clark, L. Clarke, P. Clearwater, S. Clesse, F. Cleva, E. Coccia, E. Codazzo, P. F. Cohadon, D. E. Cohen, L. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, A. Colombo, M. Colpi, C. M. Compton, Jr. Constancio, M., L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, B. Cousins, P. Couvares, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, A. W. Criswell, M. Croquette, S. G. Crowder, J. R. Cudell, T. J. Cullen, A. Cumming, R. Cummings, L. Cunningham, E. Cuoco, M. Curyło, P. Dabadie, T. Dal Canton, S. Dall’Osso, G. Dálya, A. Dana, L. M. DaneshgaranBajastani, B. D’Angelo, B. Danila, S. Danilishin, S. D’Antonio, K. Danzmann, C. Darsow-Fromm, A. Dasgupta, L. E. H. Datrier, S. Datta, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, G. S. Davies, D. Davis, M. C. Davis, E. J. Daw, R. Dean, D. DeBra, M. Deenadayalan, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, V. Del Favero, F. De Lillo, N. De Lillo, W. Del Pozzo, L. M. DeMarchi, F. De Matteis, V. D’Emilio, N. Demos, T. Dent, A. Depasse, R. De Pietri, R. De Rosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, R. De Simone, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, Jr. Diaz-Ortiz, M., N. A. Didio, T. Dietrich, L. Di Fiore, C. Di Fronzo, C. Di Giorgio, F. Di Giovanni, M. Di Giovanni, T. Di

Girolamo, A. Di Lieto, B. Ding, S. Di Pace, I. Di Palma, F. Di Renzo, A. K. Divakarla, Divyajyoti, A. Dmitriev, Z. Doctor, L. D'Onofrio, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, M. Drago, J. C. Driggers, Y. Drori, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, D. D'Urso, P. A. Duverne, S. E. Dwyer, C. Eassa, P. J. Easter, M. Ebersold, T. Eckhardt, G. Eddolls, B. Edelman, T. B. Edo, O. Edy, A. Effler, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, A. Ejlli, E. Engelby, L. Errico, R. C. Essick, H. Estellés, D. Estevez, Z. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, B. E. Ewing, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, S. P. Fanning, A. M. Farah, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, N. W. Farrow, E. J. Fauchon-Jones, G. Favaro, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, J. Feicht, M. M. Fejer, E. Fenyvesi, D. L. Ferguson, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, P. Figura, I. Fiori, M. Fishbach, R. P. Fisher, R. Fittipaldi, V. Fiumara, R. Flaminio, E. Floden, H. Fong, J. A. Font, B. Fornal, P. W. F. Forsyth, A. Franke, S. Frasca, F. Frasconi, C. Frederick, J. P. Freed, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. G. Fronzé, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, W. Gabella, B. U. Gadre, J. R. Gair, J. Gais, S. Galaudage, R. Gamba, D. Ganapathy, A. Ganguly, S. G. Gaonkar, B. Garaventa, F. García, C. García-Núñez, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, V. Gayathri, G. Gemme, A. Gennai, J. George, R. N. George, O. Gerberding, L. Gergely, P. Gewecke, S. Ghonge, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, Shaon Ghosh, Shrobana Ghosh, B. Giacomazzo, L. Giacompo, J. A. Giaime, K. D. Giardino, D. R. Gibson, C. Gier, M. Giesler, P. Giri, F. Gissi, J. Glanzer, A. E. Gleckl, P. Godwin, E. Goetz, R. Goetz, N. Gohlke, B. Goncharov, G. González, A. Gopakumar, M. Gosselin, R. Gouaty, D. W. Gould, B. Grace, A. Grado, M. Granata, V. Granata, A. Grant, S. Gras, P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, A. M. Gretarsson, E. M. Gretarsson, D. Griffith, W. Griffiths, H. L. Griggs, G. Grignani, A. Grimaldi, S. J. Grimm, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, D. Guerra, G. M. Guidi, A. R. Guimaraes, G. Guixé, H. K. Gulati, H. K. Guo, Y. Guo, Anchal Gupta, Anuradha Gupta, P. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, F. Guzman, L. Haegel, O. Halim, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, M. Haney, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. Hannuksela, H. Hansen, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, D. Hartwig, B. Haskell, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Haughian, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, A. Heidt, M. C. Heintze, J. Heinze, J. Heinzl, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, A. F. Helmling-Cornell, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, E. Hennes, J. Hennig, M. H. Hennig, A. G. Hernandez, F. Hernandez Vivanco, M. Heurs, S. Hild, P. Hill, A. S. Hines, S. Hochheim, D. Hofman, J. N. Hohmann, D. G. Holcomb, N. A. Holland, K. Holley-Bockelmann, I. J. Hollows, Z. J. Holmes, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, J. Hough, S. Hourihane, E. J. Howell, C. G. Hoy, D. Hoyland, A. Hreibi, Y. Hsu, Y. Huang, M. T. Hübner, A. D. Huddart, B. Hughey, V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, R. Huxford, T. Huynh-Dinh, B. Idzkowski, A. Iess, C. Ingram, M. Isi, K. Isleif, B. R. Iyer, V. JaberianHamedan, T. Jacqmin, S. J. Jadhav, S. P. Jadhav, A. L. James, A. Z. Jan, K. Jani, J. Janquart, K. Janssens, N. N. Jantahalur, P. Jaranowski, D. Jariwala, R. Jaume, A. C. Jenkins, K. Jenner, M. Jeunon, W. Jia, G. R. Johns, N. K. Johnson-McDaniel, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, P. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, J. Junker, V. Juste, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamaï, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, Y. Kao, S. J. Kapadia, D. P. Kapasi, S. Karat, C. Karathanasis, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, W. Kastaun, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, T. Kaur, K. Kawabe, F. Kéfélian, D. Keitel, J. S. Key, S. Khadka, F. Y. Khalili, S. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. C. Kim, K. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimentko, A. M. Knee, T. D. Knowles, E. Knyazev, P. Koch,

G. Koekoek, S. Koley, P. Kolitsidou, M. Kolstein, K. Komori, V. Kondrashov, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, M. Kovalam, D. B. Kozak, V. Kringel, N. V. Krishnendu, A. Królak, G. Kuehn, F. Kuei, P. Kuijer, A. Kumar, P. Kumar, Rahul Kumar, Rakesh Kumar, K. Kuns, S. Kuwahara, P. Lagabbe, D. Laghi, E. Lalande, T. L. Lam, A. Lamberts, M. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, I. La Rosa, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Lecoeuche, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, J. Lehmann, A. Lemaître, N. Leroy, N. Letendre, C. Levesque, Y. Levin, J. N. Leviton, K. Leyde, A. K. Y. Li, B. Li, J. Li, T. G. F. Li, X. Li, F. Linde, S. D. Linker, J. N. Linley, T. B. Littenberg, J. Liu, K. Liu, X. Liu, F. Llamas, M. Llorens-Monteagudo, R. K. L. Lo, A. Lockwood, L. T. London, A. Longo, D. Lopez, M. Lopez Portilla, M. Lorenzini, V. Lorientte, M. Lormand, G. Losurdo, T. P. Lott, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, J. F. Lucaccioni, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, J. E. Lynam, R. Macas, M. MacInnis, D. M. Macleod, I. A. O. MacMillan, A. Macquet, I. Magaña Hernandez, C. Magazzù, R. M. Magee, R. Maggiore, M. Magnozzi, S. Mahesh, E. Majorana, C. Makarem, I. Maksimovic, S. Maliakal, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, J. L. Mango, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, F. Marion, Z. Mark, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, M. Martinez, V. A. Martinez, V. Martinez, K. Martinovic, D. V. Martynov, E. J. Marx, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, M. Mateu-Lucena, F. Matichard, M. Matiushchikina, N. Mavalvala, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, P. K. McClincy, S. McCormick, L. McCuller, G. I. McGhee, S. C. McGuire, C. McIsaac, J. McIver, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, M. Mehmet, A. K. Mehta, Q. Meijer, A. Melatos, D. A. Melchor, G. Mendell, A. Menendez-Vazquez, C. S. Menoni, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh, J. D. Merritt, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Mhaske, A. Miani, H. Miao, I. Michaloliakos, C. Michel, H. Middleton, L. Milano, A. Miller, A. L. Miller, B. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, E. Milotti, O. Minazzoli, Y. Minenkov, Ll. M. Mir, M. Miravet-Tenés, C. Mishra, T. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, Geoffrey Mo, E. Moguel, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, S. R. Mohite, I. Molina, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, A. More, C. Moreno, G. Moreno, S. Morisaki, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, S. Mozzon, F. Muciaccia, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, Soma Mukherjee, Subroto Mukherjee, Suvodip Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñiz, P. G. Murray, R. Musenich, S. Muusse, S. L. Nadji, A. Nagar, V. Napolano, I. Nardecchia, L. Naticchioni, B. Nayak, R. K. Nayak, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Neilson, M. Nery, P. Neubauer, A. Neunzert, K. Y. Ng, S. W. S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, T. Nguyen, S. A. Nichols, S. Nissanke, E. Nitoglia, F. Nocera, M. Norman, C. North, L. K. Nuttall, J. Oberling, B. D. O'Brien, J. O'Dell, E. Oelker, G. Oganessian, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, C. Olivetto, R. Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, N. D. Ormsby, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, E. O'Shea, S. Ossokine, C. Osthelder, D. J. Ottaway, H. Overmier, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, H. Pan, P. K. Panda, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Panarale, B. C. Pant, F. H. Panther, F. Paoletti, A. Paoli, A. Paolone, H. Park, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquietti, D. Passuello, M. Patel, M. Pathak, B. Patricelli, A. S. Patron, S. Patrone, S. Paul, E. Payne, M. Pedraza, M. Pegoraro, A. Pele, S. Penn, A. Perego, A. Pereira, T. Pereira, C. J. Perez, C. Périgois, C. C. Perkins, A. Perreca, S. Perriès, J. Petermann, D. Petterson, H. P. Pfeiffer, K. A. Pham, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pi-

chot, M. Piendibene, F. Piergiovanni, L. Pierini, V. Pierro, G. Pillant, M. Pillas, F. Pilo, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pinto, K. Piotrkowski, M. Pirello, M. D. Pitkin, E. Placidi, L. Planas, W. Plastino, C. Pluchar, R. Poggiani, E. Polini, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, R. Poulton, J. Powell, M. Pracchia, T. Pradier, A. K. Prajapati, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, P. Proposito, L. Prudenzi, A. Puecher, M. Punturo, F. Puosi, P. Puppo, M. Pürerer, H. Qi, V. Quetschke, R. Quitzow-James, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raffai, S. X. Rail, S. Raja, C. Rajan, K. E. Ramirez, T. D. Ramirez, A. Ramos-Buades, J. Rana, P. Ragnani, U. D. Rapol, A. Ray, V. Raymond, N. Raza, M. Razzano, J. Read, L. A. Rees, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, S. W. Reid, D. H. Reitze, P. Relton, A. Renzini, P. Rettegno, A. Reza, M. Rezac, F. Ricci, D. Richards, J. W. Richardson, L. Richardson, G. Riemen-schneider, K. Riles, S. Rinaldi, K. Rink, M. Rizzo, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, S. Rodriguez, L. Rolland, J. G. Rollins, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, A. Romero-Rodríguez, I. M. Romero-Shaw, J. H. Romie, S. Ronchini, L. Rosa, C. A. Rose, M. J. B. Rosell, D. Rosińska, M. P. Ross, S. Rowan, S. J. Rowlinson, S. Roy, Santosh Roy, Soumen Roy, D. Rozza, P. Ruggi, K. Ruiz-Rocha, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, J. Sadiq, M. Sakellariadou, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, E. J. Sanchez, J. H. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, A. Sanuy, T. R. Saravanan, N. Sarin, B. Sassolas, H. Satari, O. Sauter, R. L. Savage, D. Sawant, H. L. Sawant, S. Sayah, D. Schaetzl, M. Scheel, J. Scheuer, M. Schiworski, P. Schmidt, S. Schmidt, R. Schnabel, M. Schneewind, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, B. W. Schulte, B. F. Schutz, E. Schwartz, J. Scott, S. M. Scott, M. Seglar-Arroyo, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, E. G. Seo, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, T. Shaffer, M. S. Shahriar, B. Shams, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, N. S. Shcheblanov, M. Shikauchi, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, S. ShyamSundar, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singha, A. M. Sintes, V. Sipala, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. Smetana, J. R. Smith, R. J. E. Smith, J. Soldateschi, S. N. Somala, E. J. Son, K. Soni, S. Soni, V. Sordini, F. Sorrentino, N. Sorrentino, R. Souldard, T. Souradeep, E. Sowell, V. Spagnuolo, A. P. Spencer, M. Spera, R. Srinivasan, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, D. A. Steer, J. Steinhoff, J. Steinlechner, S. Steinlechner, S. Stevenson, D. J. Stops, M. Stover, K. A. Strain, L. C. Strang, G. Stratta, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, S. Sudhagar, V. Sudhir, H. G. Suh, T. Z. Summerscales, H. Sun, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, P. Szewczyk, M. Tacca, S. C. Tait, C. J. Talbot, C. Talbot, A. J. Tanasijczuk, D. B. Tanner, D. Tao, L. Tao, E. N. Tapia San Martín, C. Taranto, J. D. Tasson, R. Tenorio, J. E. Terhune, L. Terkowski, M. P. Thirugnanasambandam, L. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, J. E. Thompson, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, Shubhanshu Tiwari, Srishti Tiwari, V. Tiwari, A. M. Toivonen, K. Toland, A. E. Tolley, M. Tonelli, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, I. Tosta e Melo, D. Töyrä, A. Trapananti, F. Travasso, G. Traylor, M. Trevor, M. C. Tringali, A. Tripathee, L. Troiano, A. Trovato, L. Trozzo, R. J. Trudeau, D. S. Tsai, D. Tsai, K. W. Tsang, M. Tse, R. Tso, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, K. Turbang, M. Turconi, A. S. Ubhi, R. P. Udall, K. Ueno, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, A. Utina, H. Vahlbruch, G. Vajente, A. Vajpeyi, G. Valdes, M. Valentini, V. Valsan, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, J. Vanosky, N. van Remortel, M. Vardaro, A. F. Vargas, V. Varma, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, J. Veneberg, G. Venugopalan, D. Verkindt, P. Verma, Y. Verma, D. Veske, F. Vetrano, A. Viceré, S. Vidyant, A. D. Viets, A. Vijaykumar, V. Villa-Ortega, J. Y. Vinet, A. Virtuoso, S. Vitale,

T. Vo, H. Vocca, E. R. G. von Reis, J. S. A. von Wrangel, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, L. E. Wade, M. Wade, K. J. Wagner, R. C. Walet, M. Walker, G. S. Wallace, L. Wallace, S. Walsh, J. Z. Wang, W. H. Wang, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, N. Y. Washington, J. Watchi, B. Weaver, S. A. Webster, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, C. M. Weller, R. Weller, F. Wellmann, L. Wen, P. Weßels, K. Wette, J. T. Whelan, D. D. White, B. F. Whiting, C. Whittle, D. Wilken, D. Williams, M. J. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, D. J. Wilson, W. Winkler, C. C. Wipf, T. Wlodarczyk, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, I. C. F. Wong, D. S. Wu, D. M. Wysocki, L. Xiao, H. Yamamoto, F. W. Yang, L. Yang, Yang Yang, Z. Yang, M. J. Yap, D. W. Yeeles, A. B. Yelikar, M. Ying, J. Yoo, Hang Yu, Haocun Yu, A. Zadrożny, M. Zanolin, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, J. Zhang, L. Zhang, T. Zhang, Y. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, Yue Zhao, R. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, A. B. Zimmerman, Y. Zlochower, M. E. Zucker, and J. Zweizig. GWTC-2.1: Deep Extended Catalog of Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2108.01045, August 2021a. doi: 10.48550/arXiv.2108.01045.

The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, the KAGRA Collaboration, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, N. Adhikari, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, D. Agarwal, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, S. Akcay, T. Akutsu, S. Albanesi, A. Allocca, P. A. Altin, A. Amato, C. Anand, S. Anand, A. Ananyeva, S. B. Anderson, W. G. Anderson, M. Ando, T. Andrade, N. Andres, T. Andrić, S. V. Angelova, S. Ansoldi, J. M. Antelis, S. Antier, S. Appert, Koji Arai, Koya Arai, Y. Arai, S. Araki, A. Araya, M. C. Araya, J. S. Areeda, M. Arène, N. Aritomi, N. Arnaud, M. Arogeti, S. M. Aronson, K. G. Arun, H. Asada, Y. Asali, G. Ashton, Y. Aso, M. Assiduo, S. M. Aston, P. Astone, F. Aubin, C. Austin, S. Babak, F. Badaracco, M. K. M. Bader, C. Badger, S. Bae, Y. Bae, A. M. Baer, S. Bagnasco, Y. Bai, L. Baiotti, J. Baird, R. Bajpai, M. Ball, G. Ballardín, S. W. Ballmer, A. Balsamo, G. Baltus, S. Banagiri, D. Bankar, J. C. Barayoga, C. Barbieri, B. C. Barish, D. Barker, P. Barneo, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, M. Bawaj, J. C. Bayley, A. C. Baylor, M. Bazzan, B. Bécsy, V. M. Bedakihale, M. Bejger, I. Belahcene, V. Benedetto, D. Beniwal, T. F. Bennett, J. D. Bentley, M. BenYaala, F. Bergamin, B. K. Berger, S. Bernuzzi, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, D. Beveridge, R. Bhandare, U. Bhardwaj, D. Bhattacharjee, S. Bhaumik, I. A. Bilenko, G. Billingsley, S. Bini, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, M. Bisch, S. Biscoveanu, A. Bisht, B. Biswas, M. Bitossi, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, F. Bobba, N. Bode, M. Boer, G. Bogaert, M. Boldrini, L. D. Bonavena, F. Bondu, E. Bonilla, R. Bonnand, P. Booker, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, N. Bose, S. Bose, V. Bossilkov, V. Boudart, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, A. Bramley, A. Branch, M. Branchesi, J. Brandt, J. E. Brau, M. Breschi, T. Briant, J. H. Briggs, A. Brillet, M. Brinkmann, P. Brockill, A. F. Brooks, J. Brooks, D. D. Brown, S. Brunett, G. Bruno, R. Bruntz, J. Bryant, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, R. Buscicchio, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, G. S. Cabourn Davies, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, J. D. Callaghan, T. A. Callister, E. Calloni, J. Cameron, J. B. Camp, M. Canepa, S. Canevarolo, M. Cannavacciuolo, K. C. Cannon, H. Cao, Z. Cao, E. Capocasa, E. Capote, G. Carapella, F. Carbognani, J. B. Carlin, M. F. Carney, M. Carpinelli, G. Carrillo, G. Carullo, T. L. Carver, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, G. Castaldi, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, M. Ceasar, G. Cella, P. Cerdá-Durán, E. Cesarini, W. Chaibi, K. Chakravarti, S. Chalathadka Subrah-

manya, E. Champion, C. H. Chan, C. Chan, C. L. Chan, K. Chan, M. Chan, K. Chandra, P. Chanial, S. Chao, C. E. A. Chapman-Bird, P. Charlton, E. A. Chase, E. Chassande-Mottin, C. Chatterjee, Debarati Chatterjee, Deep Chatterjee, M. Chaturvedi, S. Chaty, K. Chatziioannou, C. Chen, H. Y. Chen, J. Chen, K. Chen, X. Chen, Y. B. Chen, Y. R. Chen, Z. Chen, H. Cheng, C. K. Cheong, H. Y. Cheung, H. Y. Chia, F. Chiadini, C-Y. Chiang, G. Chiarini, R. Chierici, A. Chincarini, M. L. Chiofalo, A. Chiummo, G. Cho, H. S. Cho, R. K. Choudhary, S. Choudhary, N. Christensen, H. Chu, Q. Chu, Y-K. Chu, S. Chua, K. W. Chung, G. Ciani, P. Ciecielag, M. Ciešlar, M. Cifaldi, A. A. Ciobanu, R. Ciolfi, F. Cipriano, A. Cirone, F. Clara, E. N. Clark, J. A. Clark, L. Clarke, P. Clearwater, S. Clesse, F. Cleva, E. Coccia, E. Codazzo, P. F. Cohadon, D. E. Cohen, L. Cohen, M. Colleoni, C. G. Collette, A. Colombo, M. Colpi, C. M. Compton, Jr. Constancio, M., L. Conti, S. J. Cooper, P. Corban, T. R. Corbitt, I. Cordero-Carrión, S. Corezzi, K. R. Corley, N. Cornish, D. Corre, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, R. Cotesta, M. W. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, B. Cousins, P. Couvares, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, A. W. Criswell, M. Croquette, S. G. Crowder, J. R. Cudell, T. J. Cullen, A. Cumming, R. Cummings, L. Cunningham, E. Cuoco, M. Curyło, P. Dabadie, T. Dal Canton, S. Dall’Osso, G. Dálya, A. Dana, L. M. DaneshgaranBajastani, B. D’Angelo, B. Danila, S. Danilishin, S. D’Antonio, K. Danzmann, C. Darsow-Fromm, A. Dasgupta, L. E. H. Datrier, S. Datta, V. Dattilo, I. Dave, M. Davier, D. Davis, M. C. Davis, E. J. Daw, P. F. de Alarcón, R. Dean, D. DeBra, M. Deenadayalan, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, V. Del Favero, F. De Lillo, N. De Lillo, W. Del Pozzo, L. M. DeMarchi, F. De Matteis, V. D’Emilio, N. Demos, T. Dent, A. Depasse, R. De Pietri, R. De Rosa, C. De Rossi, R. DeSalvo, R. De Simone, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, Jr. Diaz-Ortiz, M., N. A. Didio, T. Dietrich, L. Di Fiore, C. Di Fronzo, C. Di Giorgio, F. Di Giovanni, M. Di Giovanni, T. Di Girolamo, A. Di Lieto, B. Ding, S. Di Pace, I. Di Palma, F. Di Renzo, A. K. Divakarla, A. Dmitriev, Z. Doctor, L. D’Onofrio, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, I. Dorrington, M. Drago, J. C. Driggers, Y. Drori, J. G. Ducoin, P. Dupej, O. Durante, D. D’Urso, P. A. Duverne, S. E. Dwyer, C. Eassa, P. J. Easter, M. Ebersold, T. Eckhardt, G. Eddolls, B. Edelman, T. B. Edo, O. Edy, A. Effler, S. Eguchi, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, M. Eisenmann, R. A. Eisenstein, A. Ejlli, E. Engelby, Y. Enomoto, L. Errico, R. C. Essick, H. Estellés, D. Estevez, Z. Etienne, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, B. E. Ewing, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, A. M. Farah, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, N. W. Farrow, E. J. Fauchon-Jones, G. Favaro, M. Favata, M. Fays, M. Fazio, J. Feicht, M. M. Fejer, E. Fenyvesi, D. L. Ferguson, A. Fernandez-Galiana, I. Ferrante, T. A. Ferreira, F. Fidecaro, P. Figura, I. Fiori, M. Fishbach, R. P. Fisher, R. Fittipaldi, V. Fiumara, R. Flaminio, E. Floden, H. Fong, J. A. Font, B. Fornal, P. W. F. Forsyth, A. Franke, S. Frasca, F. Frasconi, C. Frederick, J. P. Freed, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, P. Fritschel, V. V. Frolov, G. G. Fronzé, Y. Fujii, Y. Fujikawa, M. Fukunaga, M. Fukushima, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. Gabbard, W. E. Gabella, B. U. Gadre, J. R. Gair, J. Gais, S. Galaudage, R. Gamba, D. Ganapathy, A. Ganguly, D. Gao, S. G. Gaonkar, B. Garaventa, F. García, C. García-Núñez, C. García-Quirós, F. Garufi, B. Gateley, S. Gaudio, V. Gayathri, G. G. Ge, G. Gemme, A. Gennai, J. George, R. N. George, O. Gerberding, L. Gergely, P. Gewecke, S. Ghonge, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, Shaon Ghosh, Shrobana Ghosh, B. Giacomazzo, L. Giacoppo, J. A. Giaime, K. D. Giardino, D. R. Gibson, C. Gier, M. Giesler, P. Giri, F. Gissi, J. Glanzer, A. E. Gleckl, P. Godwin, E. Goetz, R. Goetz, N. Gohlke, J. Golomb, B. Goncharov, G. González, A. Gopakumar, M. Gosselin, R. Gouaty, D. W. Gould, B. Grace, A. Grado, M. Granata, V. Granata, A. Grant, S. Gras, P. Grassia, C. Gray, R. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. Green, A. M. Gretarsson, E. M. Gretarsson,

D. Griffith, W. Griffiths, H. L. Griggs, G. Grignani, A. Grimaldi, S. J. Grimm, H. Grote, S. Grunewald, P. Gruning, D. Guerra, G. M. Guidi, A. R. Guimaraes, G. Guixé, H. K. Gulati, H. K. Guo, Y. Guo, Anchal Gupta, Anuradha Gupta, P. Gupta, E. K. Gustafson, R. Gustafson, F. Guzman, S. Ha, L. Haegel, A. Hagiwara, S. Haino, O. Halim, E. D. Hall, E. Z. Hamilton, G. Hammond, W. B. Han, M. Haney, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, O. Hannuksela, H. Hansen, T. J. Hansen, J. Hanson, T. Harder, T. Hardwick, K. Haris, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, D. Hartwig, K. Hasegawa, B. Haskell, R. K. Hasskew, C. J. Haster, K. Hattori, K. Haughian, H. Hayakawa, K. Hayama, F. J. Hayes, J. Healy, A. Heidmann, A. Heidt, M. C. Heintze, J. Heinze, J. Heinzl, H. Heitmann, F. Hellman, P. Hello, A. F. Helmling-Cornell, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, E. Hennes, J. Hennig, M. H. Hennig, A. G. Hernandez, F. Hernandez Vivanco, M. Heurs, S. Hild, P. Hill, Y. Himemoto, A. S. Hines, Y. Hiranuma, N. Hirata, E. Hirose, S. Hochheim, D. Hofman, J. N. Hohmann, D. G. Holcomb, N. A. Holland, K. Holley-Bockelmann, I. J. Hollows, Z. J. Holmes, K. Holt, D. E. Holz, Z. Hong, P. Hopkins, J. Hough, S. Hourihane, E. J. Howell, C. G. Hoy, D. Hoyland, A. Hreibi, B-H. Hsieh, Y. Hsu, G-Z. Huang, H-Y. Huang, P. Huang, Y-C. Huang, Y. J. Huang, Y. Huang, M. T. Hübner, A. D. Huddart, B. Hughey, D. C. Y. Hui, V. Hui, S. Husa, S. H. Huttner, R. Huxford, T. Huynh-Dinh, S. Ide, B. Idzkowski, A. Iess, B. Ikenoue, S. Imam, K. Inayoshi, C. Ingram, Y. Inoue, K. Ioka, M. Isi, K. Isleif, K. Ito, Y. Itoh, B. R. Iyer, K. Izumi, V. JaberianHamedan, T. Jacqmin, S. J. Jadhav, S. P. Jadhav, A. L. James, A. Z. Jan, K. Jani, J. Janquart, K. Janssens, N. N. Jantahalur, P. Jaranowski, D. Jariwala, R. Jaume, A. C. Jenkins, K. Jenner, C. Jeon, M. Jeunon, W. Jia, H. B. Jin, G. R. Johns, N. K. Johnson-McDaniel, A. W. Jones, D. I. Jones, J. D. Jones, P. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, P. Jung, K. Jung, J. Junker, V. Juste, K. Kaihotsu, T. Kajita, M. Kakizaki, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, B. Kamai, M. Kamiizumi, N. Kanda, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, Y. Kao, S. J. Kapadia, D. P. Kapasi, S. Karat, C. Karathanasis, S. Karki, R. Kashyap, M. Kasprzack, W. Kastaun, S. Katsanevas, E. Katsavounidis, W. Katzman, T. Kaur, K. Kawabe, K. Kawaguchi, N. Kawai, T. Kawasaki, F. Kéfélian, D. Keitel, J. S. Key, S. Khadka, F. Y. Khalili, S. Khan, E. A. Khazanov, N. Khetan, M. Khursheed, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. C. Kim, J. Kim, K. Kim, W. S. Kim, Y. M. Kim, C. Kimball, N. Kimura, M. Kinley-Hanlon, R. Kirchhoff, J. S. Kissel, N. Kita, H. Kitazawa, L. Kleybolte, S. Klimenko, A. M. Knee, T. D. Knowles, E. Knyazev, P. Koch, G. Koekoek, Y. Kojima, K. Kokeyama, S. Koley, P. Kolitsidou, M. Kolstein, K. Komori, V. Kondrashov, A. K. H. Kong, A. Kontos, N. Koper, M. Korobko, K. Kotake, M. Kovalam, D. B. Kozak, C. Kozakai, R. Kozu, V. Kringel, N. V. Krishnendu, A. Królak, G. Kuehn, F. Kuei, P. Kuijser, S. Kulkarni, A. Kumar, P. Kumar, Rahul Kumar, Rakesh Kumar, J. Kume, K. Kuns, C. Kuo, H-S. Kuo, Y. Kuromiya, S. Kuroyanagi, K. Kusayanagi, S. Kuwahara, K. Kwak, P. Lagabbe, D. Laghi, E. Lalande, T. L. Lam, A. Lamberts, M. Landry, B. B. Lane, R. N. Lang, J. Lange, B. Lantz, I. La Rosa, A. Lartaux-Vollard, P. D. Lasky, M. Laxen, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, Y. K. Lecoecuche, H. K. Lee, H. M. Lee, H. W. Lee, J. Lee, K. Lee, R. Lee, J. Lehmann, A. Lemaître, M. Leonardi, N. Leroy, N. Letendre, C. Levesque, Y. Levin, J. N. Leviton, K. Leyde, A. K. Y. Li, B. Li, J. Li, K. L. Li, T. G. F. Li, X. Li, C-Y. Lin, F-K. Lin, F-L. Lin, H. L. Lin, L. C. C. Lin, F. Linde, S. D. Linker, J. N. Linley, T. B. Littenberg, G. C. Liu, J. Liu, K. Liu, X. Liu, F. Llamas, M. Llorens-Monteagudo, R. K. L. Lo, A. Lockwood, M. Loh, L. T. London, A. Longo, D. Lopez, M. Lopez Portilla, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, T. P. Lott, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, J. F. Lucaccioni, H. Lück, D. Lumaca, A. P. Lundgren, L. W. Luo, J. E. Lynam, R. Macas, M. MacInnis, D. M. Macleod, I. A. O. MacMillan, A. Macquet, I. Magaña Hernandez, C. Magazzù, R. M. Magee,

R. Maggiore, M. Magnozzi, S. Mahesh, E. Majorana, C. Makarem, I. Maksimovic, S. Maliakal, A. Malik, N. Man, V. Mandic, V. Mangano, J. L. Mango, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, M. Mapelli, F. Marchesoni, M. Marchio, F. Marion, Z. Mark, S. Márka, Z. Márka, C. Markakis, A. S. Markosyan, A. Markowitz, E. Maros, A. Marquina, S. Marsat, F. Martelli, I. W. Martin, R. M. Martin, M. Martinez, V. A. Martinez, V. Martinez, K. Martinovic, D. V. Martynov, E. J. Marx, H. Masalehdan, K. Mason, E. Massera, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, S. Mastrogiovanni, A. Matas, M. Mateu-Lucena, F. Matichard, M. Matushechkina, N. Mavalvala, J. J. McCann, R. McCarthy, D. E. McClelland, P. K. McClincy, S. McCormick, L. McCuller, G. I. McGhee, S. C. McGuire, C. McIsaac, J. McIver, T. McRae, S. T. McWilliams, D. Meacher, M. Mehmet, A. K. Mehta, Q. Meijer, A. Melatos, D. A. Melchor, G. Mendell, A. Menendez-Vazquez, C. S. Menoni, R. A. Mercer, L. Mereni, K. Merfeld, E. L. Merilh, J. D. Merritt, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Meylahn, A. Mhaske, A. Miani, H. Miao, I. Michaloliakos, C. Michel, Y. Michimura, H. Middleton, L. Milano, A. L. Miller, A. Miller, B. Miller, M. Millhouse, J. C. Mills, E. Milotti, O. Minazzoli, Y. Minenkov, N. Mio, Ll. M. Mir, M. Miravet-Tenés, C. Mishra, T. Mishra, T. Mistry, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, O. Miyakawa, A. Miyamoto, Y. Miyazaki, K. Miyo, S. Miyoki, Geoffrey Mo, L. M. Modafferi, E. Moguel, K. Mogushi, S. R. P. Mohapatra, S. R. Mohite, I. Molina, M. Molina-Ruiz, M. Mondin, M. Montani, C. J. Moore, D. Moraru, F. Morawski, A. More, C. Moreno, G. Moreno, Y. Mori, S. Morisaki, Y. Moriwaki, G. Morrás, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, S. Mozzon, F. Muciaccia, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, Soma Mukherjee, Subroto Mukherjee, Suvodip Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, E. A. Muñoz, P. G. Murray, R. Musenich, S. Muusse, S. L. Nadji, K. Nagano, S. Nagano, A. Nagar, K. Nakamura, H. Nakano, M. Nakano, R. Nakashima, Y. Nakayama, V. Napolano, I. Nardecchia, T. Narikawa, L. Naticchioni, B. Nayak, R. K. Nayak, R. Negishi, B. F. Neil, J. Neilson, G. Nelemans, T. J. N. Nelson, M. Nery, P. Neubauer, A. Neunzert, K. Y. Ng, S. W. S. Ng, C. Nguyen, P. Nguyen, T. Nguyen, L. Nguyen Quynh, W. T. Ni, S. A. Nichols, A. Nishizawa, S. Nissanke, E. Nitoglia, F. Nocera, M. Norman, C. North, S. Nozaki, J. F. Nuño Siles, L. K. Nuttall, J. Oberling, B. D. O'Brien, Y. Obuchi, J. O'Dell, E. Oelker, W. Ogaki, G. Oganessian, J. J. Oh, K. Oh, S. H. Oh, M. Ohashi, N. Ohishi, M. Ohkawa, F. Ohme, H. Ohta, M. A. Okada, Y. Okutani, K. Okutomi, C. Olivetto, K. Oohara, C. Ooi, R. Oram, B. O'Reilly, R. G. Ormiston, N. D. Ormsby, L. F. Ortega, R. O'Shaughnessy, E. O'Shea, S. Oshino, S. Ossokine, C. Osthelder, S. Otabe, D. J. Ottaway, H. Overmier, A. E. Pace, G. Pagano, M. A. Page, G. Pagliaroli, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, H. Pan, K. Pan, P. K. Panda, H. Pang, P. T. H. Pang, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. H. Panther, F. Paoletti, A. Paoli, A. Paolone, A. Parisi, H. Park, J. Park, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, M. Patel, M. Pathak, B. Patricelli, A. S. Patron, S. Paul, E. Payne, M. Pedraza, M. Pegoraro, A. Pele, F. E. Peña Arellano, S. Penn, A. Perego, A. Pereira, T. Pereira, C. J. Perez, C. Périgois, C. C. Perkins, A. Perreca, S. Perriès, J. Petermann, D. Petterson, H. P. Pfeiffer, K. A. Pham, K. S. Phukon, O. J. Piccinni, M. Pichot, M. Piendibene, F. Piergiovanni, L. Pierini, V. Pierro, G. Pillant, M. Pillas, F. Pilo, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pinto, B. Piotrkowski, K. Piotrkowski, M. Pirello, M. D. Pitkin, E. Placidi, L. Planas, W. Plastino, C. Pluchar, R. Poggiani, E. Polini, D. Y. T. Pong, S. Ponrathnam, P. Popolizio, E. K. Porter, R. Poulton, J. Powell, M. Pracchia, T. Pradier, A. K. Prajapati, K. Prasai, R. Prasanna, G. Pratten, M. Principe, G. A. Prodi, L. Prokhorov, P. Prospero, L. Prudenzi, A. Puecher, M. Punturo, F. Puosi, P. Puppo, M. Pürerer, H. Qi, V. Quetschke, R. Quitzow-James, N. Qutob, F. J. Raab, G. Raaijmakers, H. Radkins, N. Radulesco, P. Raf

fai, S. X. Rail, S. Raja, C. Rajan, K. E. Ramirez, T. D. Ramirez, A. Ramos-Buades, J. Rana, P. Rapagnani, U. D. Rapol, A. Ray, V. Raymond, N. Raza, M. Razzano, J. Read, L. A. Rees, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, S. W. Reid, D. H. Reitze, P. Relton, A. Renzini, P. Rettigno, A. Reza, M. Rezac, F. Ricci, D. Richards, J. W. Richardson, L. Richardson, G. Riemen-schneider, K. Riles, S. Rinaldi, K. Rink, M. Rizzo, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, S. Rodriguez, L. Rolland, J. G. Rollins, M. Romanelli, R. Romano, C. L. Romel, A. Romero-Rodríguez, I. M. Romero-Shaw, J. H. Romie, S. Ronchini, L. Rosa, C. A. Rose, D. Rosińska, M. P. Ross, S. Rowan, S. J. Rowlinson, S. Roy, Santosh Roy, Soumen Roy, D. Rozza, P. Ruggi, K. Ruiz-Rocha, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, J. Sadiq, N. Sago, S. Saito, Y. Saito, K. Sakai, Y. Sakai, M. Sakellariadou, Y. Sakuno, O. S. Salafia, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, E. J. Sanchez, J. H. Sanchez, L. E. Sanchez, N. Sanchis-Gual, J. R. Sanders, A. Sanuy, T. R. Saravanan, N. Sarin, B. Sassolas, H. Satari, B. S. Sathyaprakash, S. Sato, T. Sato, O. Sauter, R. L. Savage, T. Sawada, D. Sawant, H. L. Sawant, S. Sayah, D. Schaetzl, M. Scheel, J. Scheuer, M. Schiworski, P. Schmidt, S. Schmidt, R. Schnabel, M. Schneewind, R. M. S. Schofield, A. Schönbeck, B. W. Schulte, B. F. Schutz, E. Schwartz, J. Scott, S. M. Scott, M. Seglar-Arroyo, T. Sekiguchi, Y. Sekiguchi, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, E. G. Seo, V. Sequino, A. Sergeev, Y. Setyawati, T. Shaffer, M. S. Shahriar, B. Shams, L. Shao, A. Sharma, P. Sharma, P. Shawhan, N. S. Shcheblanov, S. Shibagaki, M. Shikauchi, R. Shimizu, T. Shimoda, K. Shimode, H. Shinkai, T. Shishido, A. Shoda, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, S. ShyamSundar, M. Sieniawska, D. Sigg, L. P. Singer, D. Singh, N. Singh, A. Singha, A. M. Sintes, V. Sipala, V. Skliris, B. J. J. Slagmolen, T. J. Slaven-Blair, J. Smetana, J. R. Smith, R. J. E. Smith, J. Soldateschi, S. N. Somala, K. Somiya, E. J. Son, K. Soni, S. Soni, V. Sordini, F. Sorrentino, N. Sorrentino, H. Sotani, R. Souldard, T. Souradeep, E. Sowell, V. Spagnuolo, A. P. Spencer, M. Spera, R. Srinivasan, A. K. Srivastava, V. Srivastava, K. Staats, C. Stachie, D. A. Steer, J. Steinhoff, J. Steinlechner, S. Steinlechner, S. P. Stevenson, D. J. Stops, M. Stover, K. A. Strain, L. C. Strang, G. Stratta, A. Strunk, R. Sturani, A. L. Stuver, S. Sudhagar, V. Sudhir, R. Sugimoto, H. G. Suh, A. G. Sullivan, J. M. Sullivan, T. Z. Summerscales, H. Sun, L. Sun, S. Sunil, A. Sur, J. Suresh, P. J. Sutton, Takamasa Suzuki, Toshikazu Suzuki, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, P. Szewczyk, M. Tacca, H. Tagoshi, S. C. Tait, H. Takahashi, R. Takahashi, A. Takamori, S. Takano, H. Takeda, M. Takeda, C. J. Talbot, C. Talbot, H. Tanaka, Kazuyuki Tanaka, Kenta Tanaka, Taiki Tanaka, Takahiro Tanaka, A. J. Tanasijczuk, S. Tanioka, D. B. Tanner, D. Tao, L. Tao, E. N. Tapia San Martín, C. Taranto, J. D. Tasson, S. Telada, R. Tenorio, J. E. Terhune, L. Terkowski, M. P. Thirugnanasambandam, L. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, J. E. Thompson, S. R. Thondapu, K. A. Thorne, E. Thrane, Shubhanshu Tiwari, Srishti Tiwari, V. Tiwari, A. M. Toivonen, K. Toland, A. E. Tolley, T. Tomaru, Y. Tomigami, T. Tomura, M. Tonelli, A. Torres-Forné, C. I. Torrie, I. Tosta e Melo, D. Töyrä, A. Trapananti, F. Travasso, G. Traylor, M. Trevor, M. C. Tringali, A. Tripathee, L. Troiano, A. Trovato, L. Trozzo, R. J. Trudeau, D. S. Tsai, D. Tsai, K. W. Tsang, T. Tsang, J-S. Tsao, M. Tse, R. Tso, K. Tsubono, S. Tsuchida, L. Tsukada, D. Tsuna, T. Tsutsui, T. Tsuzuki, K. Turbang, M. Turconi, D. Tuyenbayev, A. S. Ubhi, N. Uchikata, T. Uchiyama, R. P. Udall, A. Ueda, T. Uehara, K. Ueno, G. Ueshima, C. S. Ummikrishnan, F. Uraguchi, A. L. Urban, T. Ushiba, A. Utina, H. Vahlbruch, G. Vajente, A. Vajpeyi, G. Valdes, M. Valentini, V. Valsan, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, J. Vanosky, M. H. P. M. van Putten, N. van Remortel, M. Vardaro, A. F. Vargas, V. Varma, M. Vasúth, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, J. Venneberg, G. Venugopalan, D. Verkindt, P. Verma, Y. Verma, D. Veske,

- F. Vetrano, A. Viceré, S. Vidyant, A. D. Viets, A. Vijaykumar, V. Villa-Ortega, J. Y. Vinet, A. Virtuoso, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, E. R. G. von Reis, J. S. A. von Wrangel, C. Vorvick, S. P. Vyatchanin, L. E. Wade, M. Wade, K. J. Wagner, R. C. Walet, M. Walker, G. S. Wallace, L. Wallace, S. Walsh, J. Wang, J. Z. Wang, W. H. Wang, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, T. Washimi, N. Y. Washington, J. Watchi, B. Weaver, S. A. Webster, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, C. M. Weller, R. A. Weller, F. Wellmann, L. Wen, P. Weßels, K. Wette, J. T. Whelan, D. D. White, B. F. Whiting, C. Whittle, D. Wilken, D. Williams, M. J. Williams, N. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, D. J. Wilson, W. Winkler, C. C. Wipf, T. Wlodarczyk, G. Woan, J. Woehler, J. K. Wofford, I. C. F. Wong, C. Wu, D. S. Wu, H. Wu, S. Wu, D. M. Wysocki, L. Xiao, W-R. Xu, T. Yamada, H. Yamamoto, Kazuhiro Yamamoto, Kohei Yamamoto, T. Yamamoto, K. Yamashita, R. Yamazaki, F. W. Yang, L. Yang, Y. Yang, Yang Yang, Z. Yang, M. J. Yap, D. W. Yeeles, A. B. Yelikar, M. Ying, K. Yokogawa, J. Yokoyama, T. Yokozawa, J. Yoo, T. Yoshioka, Hang Yu, Haocun Yu, H. Yuzurihara, A. Zadrożny, M. Zanolin, S. Zeidler, T. Zelenova, J. P. Zendri, M. Zevin, M. Zhan, H. Zhang, J. Zhang, L. Zhang, T. Zhang, Y. Zhang, C. Zhao, G. Zhao, Y. Zhao, Yue Zhao, Y. Zheng, R. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, Z. H. Zhu, A. B. Zimmerman, Y. Zlochower, M. E. Zucker, and J. Zweizig. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2111.03606, November 2021b. doi: 10.48550/arXiv.2111.03606.
- Todd A. Thompson. Accelerating Compact Object Mergers in Triple Systems with the Kozai Resonance: A Mechanism for “Prompt” Type Ia Supernovae, Gamma-Ray Bursts, and Other Exotica. *ApJ*, 741(2):82, November 2011. doi: 10.1088/0004-637X/741/2/82.
- Alessandro Alberto Trani. TSUNAMI: A modern regularized code for planetary and black hole dynamics, November 2020. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.4279545>.
- Scott Tremaine. The Hamiltonian for von Zeipel-Lidov-Kozai oscillations. *MNRAS*, 522(1): 937–947, June 2023. doi: 10.1093/mnras/stad1029.
- Mauri Valtonen and Hannu Karttunen. *The Three-Body Problem*. 2006.
- Mauri J. Valtonen. Triple black hole systems formed in mergers of galaxies. *MNRAS*, 278(1): 186–190, January 1996. doi: 10.1093/mnras/278.1.186.
- 浩之 畑, 恒夫 植松, 秀明 青山, and 敏英 益川. 解析力学. 基幹講座物理学. 東京図書, 2014. URL <https://ci.nii.ac.jp/ncid/BB14819820>.

付録 A

2体のKepler運動

2天体のKepler運動について述べる。Kepler運動では1体目に対し2体目は楕円軌道を描く。A.1節ではこの楕円軌道の長軸半径と離心率の定義について述べ、A.2節では楕円軌道の離心率と離心率ベクトルの関係について述べる。本付録は葛西真寿氏によるWebページ「相対論の理解とその周辺」の「参考：ニュートン力学における万有引力の2体問題」¹を参考に作成した。

A.1 長軸半径と離心率の定義

2章で述べた通り、2体問題は重力ポテンシャル中の1体問題に帰着し、運動方程式は、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.1})$$

となる。天体1を原点にとった座標を導入し、真近点角を ϕ とすると、天体1に対する天体2の相対位置ベクトル \mathbf{r} は $\mathbf{r} = (x, y, 0)^T = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)^T$ である。このとき、2つの天体以外に力を及ぼすものがない場合、系の角運動量とエネルギーは一定である。単位質量あたりの角運動量を k とおくと、

$$k = |\mathbf{k}| = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{A.2})$$

より、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{k}{r^2} \quad (\text{A.3})$$

が成り立つ。また、単位質量あたりのエネルギーを ε とおくと、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} - \frac{GM}{r} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right\} - \frac{GM}{r} \\ &= \frac{k^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\} - \frac{GM}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

¹<https://home.hirosaki-u.ac.jp/relativity/>重力場中のテスト粒子の運動/万有引力の2体問題/

である。

変数変換 $s = 1/r$ により、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r^2} \frac{ds}{d\phi}\right)^2 &= \left(\frac{ds}{dr} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 \\ &= \frac{2}{k^2} \left\{ \varepsilon + \frac{GM}{r} \right\} - \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{2\varepsilon}{k^2} + \left(\frac{GM}{k^2}\right) - \left(s - \frac{GM}{k^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となり、また、 $u_0 = s - \frac{GM}{k^2}$ とおくと、運動方程式は

$$\left(\frac{du_0}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u_0^2 \quad (\text{A.6})$$

と書き直すことができる。ここで

$$\frac{1}{b^2} = \frac{2\varepsilon}{k^2} + \left(\frac{GM}{k^2}\right)^2 \quad (\text{A.7})$$

とおいた。これは直ちに解くことができ、 u_0 は

$$u_0 = s - \frac{GM}{k^2} = \frac{\cos \phi}{b} \quad (\text{A.8})$$

と得られ、

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{k^2} + \frac{\cos \phi}{b} \quad (\text{A.9})$$

となる。ここで、 $\phi = 0$ で r が極値をとるとした。軌道は楕円であるから、 r は長軸半径 a と離心率 e を用いて、

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \phi}{a(1 - e^2)} \quad (\text{A.10})$$

とかけるはずである。したがって、式 (A.9) と式 (A.10) により長軸半径 a と離心率 e を決めることができ、

$$\frac{GM}{k^2} = \frac{1}{a(1 - e^2)} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{k^2} + \left(\frac{GM}{k^2}\right)^2} = \frac{e}{a(1 - e^2)} \quad (\text{A.12})$$

となる。これより、長軸半径 a と離心率 e を単位質量あたりのエネルギー ε と単位質量あたりの角運動量 k を用いて書き表すと、

$$a = \frac{GM}{2|\varepsilon|} \quad (\text{A.13})$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2|\varepsilon|k^2}{(GM)^2}} \quad (\text{A.14})$$

となる。ここで、束縛系において $\varepsilon = -|\varepsilon|$ であることを用いた。したがって、角運動量のみが変化し、エネルギーが変化しない場合は長軸半径 a は一定であり、離心率 e のみが変わる。

A.2 離心率と離心率ベクトル

2章で述べたように、離心率ベクトル e は、

$$\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + GM \frac{\mathbf{r}}{r} = -GM\mathbf{e} \quad (\text{A.15})$$

と定義される。今、 $\mathbf{r} = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)^T$ より、

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

であるから、離心率ベクトル e は、

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\frac{1}{GM} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{k}{GM} (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) - \cos \phi \\ -\frac{k}{GM} (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) - \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

と書き下せる。したがって、離心率ベクトルの大きさ $e = |\mathbf{e}|$ は、

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\left(\frac{k}{GM} (\dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi) - \cos \phi\right)^2 + \left(-\frac{k}{GM} (\dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi) - \sin \phi\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{k^2}{(GM)^2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + 1 - \frac{2kr}{GM} \dot{\phi}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon k^2}{(GM)^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2|\varepsilon|k^2}{(GM)^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる。これは A.1 節で定義した離心率 e に等しい。