

修士論文

軽いダークマターと宇宙の構造形成  
(Cosmological Structure Formation with  
Fuzzy Dark Matter)

2022年1月

東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻

河合宏紀



## 概要

軽いダークマター (Fuzzy Dark Matter, FDM) は、宇宙の小スケール問題を解決する可能性のあるダークマターモデルとして近年盛んに研究が行われている。FDM シミュレーションから、FDM ハローにはソリトンコアと粒状構造という特有の構造ができることが分かっている。これらの特徴に注目し、実際の宇宙の観測データと照らし合わせることで、FDM モデルの妥当性を調べるができる。この過程で必要となるものが、比較する対象に応じた理論モデルの構築である。本修士論文では、理論モデルの構築と観測データの比較について、以下の2つの研究成果を述べる。

1つ目の研究として、FDM が小スケール問題の一つである銀河の回転曲線の多様性問題を解決できるかどうかに着目した。本研究では、回転曲線を比較するために必要となる、FDM ハローの大域的密度プロファイルモデルの構築を行った。FDM シミュレーション結果から FDM ハローは、中心部分にソリトンコアが存在し、その外側は Navarro-Frenk-White (NFW) プロファイルに従うことが知られている。しかし、それらの繋ぎ方に関しては先行文献によって異なる解釈がなされており、理解が不十分である。また、ソリトンコアの質量とハローの質量の関係には、大きな分散があることも知られている。

本研究では、与えられたハロー質量に対応するソリトンコアの大きさの決定方法と、コア・ハロー質量の分散の由来について包括的に調べた。その結果、重力と量子圧力が釣り合う半径、または緩和時間がハロー年齢と一致するような半径によってコア半径を与え、前者に対してはコア半径の 2.25 倍、後者に対しては 0.31 倍の半径で、質量連続性を課すことで FDM シミュレーション結果を再現できることが分かった。また両方の場合において、コア・ハロー質量関係の分散は、NFW プロファイルの質量集中度の分散によって実現されることが分かった。コア半径の決定方法としてどちらがより適当なモデルであるかは、さらなる議論の余地があるが、今後この FDM ハローの大域的密度プロファイルモデルを用いることで、FDM モデルにおける銀河の回転曲線の多様性問題の議論が可能となった。

2つ目の研究では、粒状構造が生む小スケールの物質密度揺らぎに注目し、強重力レンズ系から得た観測結果と比較した。まず粒状構造を考慮した FDM ハロー密度プロファイルモデルの構築とその時の小スケール物質パワースペクトルの計算を行った。ここで、FDM の密度プロファイルはドブロイ波長の大きさの粒状構造の重ね合わせで書けるものとし、FDM の密度プロファイルのアンサンブル平均がハロープロファイル (e.g. NFW プロファイル) に一致するように、粒状構造をランダムに分布させた。我々の理論モデルから、FDM ハローの射影密度場における小スケール物質パワースペクトルは、FDM 質量依存性が大きいことが示され、FDM モデルの議論に有用な手法と言えることが分かった。次に、強重力レンズ系の観測から得られた、レンズ天体のアインシュタイン半径近傍の小スケール物質パワースペクトルと、我々の理論モデルを比較し FDM 質量の満たすべき値について議論した。その結果、ハッブル望遠鏡で観測された強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 の観測結果からは、FDM 質量に対して何ら制限が得られなかったものの、今

後 ALMA 望遠鏡を用いたより高い分解能の観測からは、現在の宇宙のダークマター量を説明する  
ような FDM 質量  $m \simeq 10^{-22}$  eV 付近に対して厳しい制限がかけられることが分かった。

# 目次

<b>第 1 章 序章</b>	<b>1</b>
<b>第 2 章 標準宇宙モデルと小スケール問題</b>	<b>5</b>
2.1 標準宇宙モデル	5
2.1.1 冷たいダークマター	5
2.1.2 宇宙の大規模構造	6
2.1.3 CDM ハロー	8
2.2 小スケール問題	9
2.2.1 コア・カスプ問題	10
2.2.2 ミッシング・サテライト問題	11
2.2.3 銀河の回転曲線の多様性問題	11
2.2.4 Too-big-to-fail 問題	13
2.3 小スケール問題の解決策	15
2.3.1 バリオン物理	15
2.3.2 ダークマターモデルの変更	17
<b>第 3 章 軽いダークマター</b>	<b>22</b>
3.1 FDM の基礎方程式	22
3.1.1 膨張宇宙における Schrödinger-Poisson 方程式	23
3.1.2 流体描像	25
3.1.3 静止座標を用いた SP 方程式からの変換則	26
3.2 FDM の構造形成	28
3.2.1 線形領域の構造形成	28
3.2.2 FDM ハロー	30
3.3 観測からの FDM 質量制限	34
<b>第 4 章 ソリトンコアと銀河の回転曲線の多様性問題</b>	<b>36</b>
4.1 着眼点と本研究の流れ	36
4.2 FDM-only ハローに関する理解	37
4.3 手法	39
4.3.1 SP 方程式の数値計算	40
4.3.2 解の有次元化	42
4.3.3 ハロープロファイルからコア・ハロー質量の決定	43
4.4 結果	45
4.5 まとめと考察	46

---

<b>第 5 章 粒状構造と小スケール物質パワースペクトル</b>	<b>50</b>
5.1 強重力レンズ効果を用いた小構造体の探索	50
5.2 FDM ハローの小スケール物質パワースペクトル	52
5.2.1 粒状構造を考慮した FDM ハロープロファイル	52
5.2.2 3次元パワースペクトル (FDM-only)	54
5.2.3 射影密度場の2次元パワースペクトル (FDM-only)	55
5.2.4 射影密度場の2次元パワースペクトル (バリオン含む)	58
5.2.5 具体的な計算とパラメータ依存性	59
5.3 強重力レンズ系から得られたパワースペクトルとの比較	62
5.3.1 無次元収束場パワースペクトル	62
5.3.2 現在の観測結果から得られる FDM 質量制限	63
5.3.3 将来の観測結果から得られる FDM 質量制限	64
5.4 まとめと議論	66
<b>第 6 章 総括</b>	<b>67</b>
<b>謝辞</b>	<b>69</b>
<b>参考文献</b>	<b>70</b>
<b>付録</b>	<b>79</b>
<b>付録 A 宇宙論的ダークマターの分類と具体的な素粒子モデル</b>	<b>80</b>
A.1 熱い残存粒子	81
A.2 冷たい残存粒子	82
A.3 非熱的残存粒子	84
A.3.1 Axion	84
A.3.2 Axion-like particle	85
A.4 分類のまとめ	89
<b>付録 B 無衝突減衰</b>	<b>90</b>



# 第1章 序章

ダークマターは、1933年に Zwicky が提唱した銀河団の質量欠損問題 (Zwicky 1933) で初めてその存在が予想されてから、解明に向けて約 100 年にわたり精力的に研究が行われてきた。その正体は現在でも未解明であるが、これまでの研究からダークマターが満たすべき性質や役割が明かされてきた。例えば、ダークマターは宇宙の全物質のうち約 8 割を占め、宇宙の構造形成の歴史において大きな影響を与えることが分かった。また、重力相互作用以外の相互作用が非常に小さく、宇宙年齢の時間スケールで非常に安定である。さらに、素粒子標準模型の粒子にはダークマターの候補となる粒子は存在しないことも分かっている。ダークマターの研究は、素粒子理論・観測的宇宙論という理論的アプローチ、直接探索・間接探索・加速器実験という実験的アプローチを通して、多角的観点から様々な手法で行われている。本修士論文では、特に観測的宇宙論の観点から見たダークマター探索の側面についてレビューを行い、加えて我々が行った研究結果について述べる。

観測的宇宙論とは、実際の宇宙の観測結果と理論予言を統計的に照合させることによって、物理を解き明かしていく学問である。これまでの様々な研究から、宇宙の多くの観測結果を説明する標準宇宙モデルが確立された。宇宙マイクロ波背景放射の観測結果から、宇宙を構成するエネルギー密度は、バリオン ( $\simeq 5\%$ )、ダークマター ( $\simeq 27\%$ )、ダークエネルギー ( $\simeq 68\%$ ) で占められていることが分かっている (Planck Collaboration et al. 2020)。標準宇宙モデルでは、ダークマターとダークエネルギーをそれぞれ冷たいダークマター (Cold Dark Matter, CDM) と Einstein 方程式の宇宙項  $\Lambda$  であると仮定している。従って、標準宇宙モデルは、 $\Lambda$ CDM モデルとも呼ばれている。CDM は、重力以外の相互作用を無視することができ、さらに無衝突減衰 (付録 B) が効かないような物質を指す。無衝突で重力相互作用のみするような最も単純な仮定を置いた物質のことを指す。宇宙全体の物質のうち、ダークマターが占める量が約 80% であるため、宇宙の構造形成史においてダークマターが重要な役割を担う。一方、ダークエネルギーは空間が膨張してもそのエネルギー密度が一定に保たれるようなエネルギーである。このダークエネルギーがあることで、宇宙の加速膨張を説明することができる。

標準宇宙モデルは宇宙の大きなスケールに関する観測結果を非常に良く説明してきた (e.g. Chabianier et al. 2019; Tegmark et al. 2004)。一方で、銀河やハローといった、およそ 1 Mpc 以下の小スケール構造に注目すると、観測結果と矛盾することが知られている。これを総称して小スケール問題といい、代表的には以下の 4 つが挙げられる (Bullock and Boylan-Kolchin 2017, for review)。

- コア・カスプ問題：ハローの中心付近の密度分布に注目した時、CDM シミュレーションではカスプ状であるのに対し、矮小銀河や低輝度銀河の観測ではコア状となっている
- ミッシング・サテライト問題：ハロー内の小構造体の量に注目した時、CDM シミュレーションで得られた天の川銀河サイズのハローに存在するサブハローの個数が、実際の天の川銀河

の観測で得られている矮小銀河の個数に比べて桁違いに多い

- 銀河の回転曲線の多様性問題：最大回転速度が同じ銀河を選びその内側の回転曲線の形に注目した時、CDM シミュレーションではほぼ同一であるのに対し、実際の渦巻銀河の観測では様々な半径依存性を持つものが存在する
- Too-big-to-fail 問題：CDM シミュレーションで得られた天の川銀河サイズのハロー内に存在する重いサブハローの中には、実際に観測されているどの矮小楕円体銀河よりも、中心密度が高いものが存在する

この小スケール問題の解決策として、元来の CDM-only シミュレーションでは取り入れられていない星形成や超新星爆発等のバリオン物理を考慮することや、ダークマターモデルの変更が考えられている。これらのどちらがより小スケール問題の解決に本質的な役割を果たすのかは分かっていない。今回の修士論文では、特に後者に注目して議論を進める。

従来の CDM に代わるダークマターモデルとして、特に温かいダークマター (Warm Dark Matter, WDM, [Bonometto and Valdarnini 1985](#))、自己相互作用するダークマター (Self Interacting Dark Matter, SIDM, [Carlson et al. 1992](#)) が注目されている。WDM とは、質量が 1 – 10 keV 程度と軽く、無衝突減衰の効果が無視できないようなダークマターモデルである。この無衝突減衰により、小スケールの構造形成が抑制され ([Bode et al. 2001](#))、特にミッシング・サテライト問題や Too-big-to-fail 問題の解決につながる可能性が示唆されている。SIDM モデルは、重力相互作用以外に相互作用を持つようなダークマターモデルで、その相互作用の大きさに対応したスケール以内で構造形成の様子が変化する。特に SIDM ハローの中心部分のプロファイルがコア状となる ([Rocha et al. 2013](#)) ことから、コア・カスプ問題の解決が示唆されている。また、SIDM ハローはバリオン分布に対する応答性が大きく、銀河の回転曲線の多様性問題を解決できることが明らかにされた ([Kamada et al. 2017](#))。このように、WDM や SIDM は小スケール問題の一部を解決する可能性があるダークマターモデルとして注目され、現在に至るまで様々な観測データとの検証が行われている。

近年、これらのダークマターモデルに加えて、軽いダークマター (Fuzzy Dark Matter, FDM, [Hu et al. 2000](#)) が注目されている。この FDM とは、質量が  $10^{-22}$  eV 程度の、自己相互作用しない仮想的なスカラー粒子である。他のダークマターモデルと同様に、大スケールでは従来の CDM と同様の振る舞いをする一方で、小スケールでは構造形成の様子が異なる。これは、FDM のドブロイ波長  $\lambda \simeq 1$  kpc 以下のスケールで波動性が支配的となるためである。この FDM の波動性は構造形成において、重力崩壊と反対向きに働く量子圧力として働くため、小スケール構造が抑制される。また、FDM シミュレーションによってハロー構造が明らかにされ、ソリトンコアと粒状構造という 2 つの特有な構造ができることが分かった ([Schive et al. 2014a,b](#))。ソリトンコアとは、FDM ハローの中心付近にできるコア状の密度プロファイルのことを指し、コア・カスプ問題の解決の可能性が示唆されている。このソリトンコアは、巨視的な量の FDM がボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) 状態となってできた構造で、その密度プロファイルは FDM の支配方程式である Schrödinger-Poisson 方程式 (SP 方程式) の静的基底状態解で表されることが分かっている。一方、粒状構造は波動関数の干渉によってできた構造である。その大きさは FDM のドブロイ波長程度であり、FDM ハロー内に無数に存在している。これらの 2 つの構造は、FDM モデルに特有な性質であるため、これらの構造に注目し、宇宙の観測データと照らし合わせることで、

FDM モデルの妥当性を調べることができる。

これらのダークマターモデルにおける構造形成の様子は、主にシミュレーションによって明らかにされてきた。しかし、宇宙の観測結果とシミュレーション結果を直接比較し、理論の制限を行うことは効率的ではない。例えば、ある観測結果を用いて理論モデルに存在する1つのパラメータの値を決める際には、そのパラメータを複数回に渡って振りシミュレーションを行うことが必要となってしまう。これを回避するために必要となるものが、比較する対象に応じた理論モデルの構築である。この理論モデルは、いわばシミュレーション結果と観測データを繋ぐ役割を担い、観測的宇宙論において必要不可欠なものと言える。特に本修士論文で着目する FDM モデルでは、FDM シミュレーションの計算コストが非常に大きいという難点があるため、理論モデルの構築が必須となる。計算コストが非常に大きい理由は、SP 方程式の時間発展を解く際に、各時間ステップで波動関数の位相の変化が  $2\pi$  以上大きくならないように時間分解能を小さくする必要があることと、ドブロイ波長程度の構造を分解できるような空間分解能が必要となるためである。これらの状況を踏まえ我々は FDM モデルに注目し、観測対象に合わせた理論モデルの構築を行った。本修士論文では、以下の2つの研究成果について述べる。

1つ目の研究では、FDM が小スケール問題の1つである銀河の回転曲線の多様性問題を解決できるかどうかに着目した。この研究は以下の2つの先行研究の結果から着想を得た。1つ目は、SIDM モデルで銀河の回転曲線の多様性問題を解決できたことである (Kamada et al. 2017)。SIDM モデルにおいて多様な回転曲線を生成できるのは、SIDM ハローのコアが大きなバリオン応答性を持つことに起因する。2つ目は、バリオン物理を考慮した FDM シミュレーションからの示唆である (Veltmaat et al. 2020)。このシミュレーションから、ソリトンコアはバリオンポテンシャルによって、大きく密度プロファイルが変化することが分かった。またこの時のソリトンコアの形状は、バリオンポテンシャルを加えた静的 SP 方程式の基底状態解で表せることも明らかになった。以上の2つの先行研究の結果から、SIDM モデルだけでなく FDM モデルにおいても銀河の回転曲線の多様性問題を解決できるのではないかと考え、本研究の着想に至った。実際に回転曲線を比較するためには、まず FDM ハローの大域的密度プロファイルに関する理論モデルの構築が必要となる。

FDM シミュレーション結果から、FDM ハローは中心部分にソリトンコアが存在し、その外側の密度プロファイルは Navarro-Frenk-White (NFW) プロファイル (Navarro et al. 1997) に従うことが知られている (Schive et al. 2014b)。バリオンを含まない FDM-only ハローの場合は、ソリトンコアと NFW プロファイルの境界半径は、経験的にコア半径（中心密度の半分の値となる半径）の3倍程度であり、密度が連続となるように接続されることが知られている (Schive et al. 2014b)。しかし、本研究ではバリオンを含む場合に2つのプロファイルがどのように接続されるのかを知る必要があるため、この繋ぎ方に関する経験則を利用することはできない。そこで、力学的考察に基づいたソリトンコアと NFW プロファイルの接続方法を知る必要がある。ここでは、与えられたハロー質量（ゆえに NFW プロファイル）に対応するソリトンコアの大きさを以下のように決定するものとして議論を進める。

1. 与えられた NFW プロファイルから、力学的考察に基づいてコア半径の決定する
2. コア半径の定数倍で決められる境界半径において、質量連続性を満たすようにソリトンコアの大きさを決定する

先行研究では、このコア半径の決め方に関して、重力と量子圧力が釣り合うような半径 (Li et al.

2021)、緩和時間がハロー年齢と一致するような半径 (Hui et al. 2017)、単位質量あたりのエネルギーが一致するような半径 (Bar et al. 2018) などが候補として挙げられている。しかし、これらの内どれがより本質的な決定方法であるかは分かっていない。さらに、コア質量とハロー質量の対応関係 (コア・ハロー質量関係) が、別々の FDM シミュレーションによって異なる結果となっており (Jowett Chan et al. 2021)、FDM ハローの構造に分散があることも示唆されている。本研究では、このコア・ハロー質量関係を用いて、コア半径の決定方法を議論するとともに、分散の由来に対する解釈を与えた。今後は、ここで構築した FDM ハローの大域的密度プロファイルモデルを用いて、銀河の回転曲線の多様性問題を議論する予定である。

2つ目の研究では、粒状構造が生む小スケールにおける物質密度揺らぎに注目し、強重力レンズ系の観測から得られた小スケール物質パワースペクトルと比較した。FDM のドブロイ波長程度の大きさの粒状構造により、対応する波数より小さい波数領域において物質密度揺らぎによるパワースペクトルが大きくなることが期待される。このスケールの構造を実際に直接観測することは非常に難しいが、近年強重力レンズ系の観測結果を用いることで、レンズ天体のアインシュタイン半径近傍の小構造体の量を、小スケール物質パワースペクトルの形で求める解析方法が開発された (Diaz Rivero et al. 2018; Hezaveh et al. 2016)。これは、レンズ天体内に小構造体がある場合とない場合で、背景天体のレンズ像の表面輝度にズレが生じることを利用した手法である。この手法をハッブル望遠鏡を用いた SLACS サーベイ (Auger et al. 2009) で観測された銀河-銀河強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 に適用させ、小スケール物質パワースペクトルの上限値を求められた (Bayer et al. 2018)。ここではさらに、この上限値を用いて CDM ハローの小スケール物質パワースペクトルと比較し、CDM モデルの妥当性を議論している。我々はこの議論を FDM の粒状構造の制限、ひいては FDM 質量制限に適用できることに着目し、本研究の着想に至った。実際に強重力レンズ系から得られた観測結果と比較するには、まず粒状構造を考慮した FDM ハローモデルを構築し、それを用いて FDM ハローにおける小スケール物質パワースペクトルの計算を行う必要がある。

本研究では、まず FDM-only の場合について粒状構造を考慮した FDM ハローモデルを構築した。ここでは、FDM ハローはドブロイ波長サイズの粒状構造の集合で構成されており、全体の密度プロファイルは粒状構造の重ね合わせで表せるものとした。粒状構造の分布は、FDM の密度プロファイルのアンサンブル平均が与えられたハロープロファイル (e.g. NFW プロファイル) に一致するように、ランダムに分布しているものと仮定した。次に、バリオン分布を粒状構造とは独立に、滑らかなプロファイルとして加えた。この FDM ハローモデルを用いて、射影密度場における小スケール物質パワースペクトルを計算した。そして最後に、強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 から得られた小スケール物質パワースペクトルの上限値との比較を行うことで、FDM 質量の制限について議論した。

本修士論文は、以下のような構成となっている。まず第 2 章で、標準宇宙モデルと小スケール問題、及びその解決策についてレビューする。第 3 章では、本論文で注目する FDM モデルに関する基礎理論とこれまで行われた先行研究についてレビューする。第 4, 5 章では、ソリトンコアと回転曲線の多様性問題、粒状構造と小スケール物質パワースペクトルについて研究結果を述べる。最後に、我々が行った FDM 研究の意義や今後のダークマター研究の展望を述べ、本論文を締め括る。

## 第2章 標準宇宙モデルと小スケール問題

### 2.1 標準宇宙モデル

20世紀初頭にアインシュタインが一般相対性理論を発見したことによって、我々は宇宙を記述するための道具を手に入れた。また、観測技術も格段に向上し、これまでに得られたデータも非常に多い。この理論的枠組みと観測データの双方からのアプローチにより、我々は宇宙を記述する標準宇宙モデルを構築してきた。特に、20世紀後半から21世紀前半にかけて、我々の宇宙に対する理解が進んできたと言える。代表例として、ダークマターやダークエネルギーと呼ばれる未知のエネルギー密度の存在、一様等方宇宙からの摂動の時間進化と構造形成、摂動の発生源となるインフレーションの存在、ビッグバン元素合成などが挙げられる。この標準宇宙モデルでは、ダークマターとして冷たいダークマター (Cold Dark Matter, CDM) モデルが仮定されており、様々な観測結果を非常に精度良く説明することに成功してきた。この節では、このCDMモデルの性質と生成される宇宙の構造の様子に関してレビューを行う。

#### 2.1.1 冷たいダークマター

宇宙マイクロ波背景放射の観測から、宇宙全体においてダークマターが占めるエネルギー密度は約27%であり、バリオンの約5倍の量を占めることが分かった (Planck Collaboration et al. 2020)。それゆえ、ダークマターは宇宙の構造形成において重要な役割を担っている。ダークマターは未知の物質であるが、その性質の一部は明らかにされており、例えば重力以外の相互作用が非常に小さく、また宇宙年齢で安定であることが分かっている。そこで標準宇宙モデルでは、現象論的に冷たいダークマター (CDM) と呼ばれる、重力以外の相互作用を無視でき、さらに無衝突減衰 (ダークマターが大きな速度分散を持つ時にその自由運動によって揺らぎを減衰させる現象：付録B) の効かないようなダークマターモデルを仮定している。CDMモデルにおける宇宙の構造形成では、無衝突減衰に由来した揺らぎの減衰が起きないため、生成される構造体の大きさに関してカットオフがなく (もしくは非常に小さく)、非常に小さい構造体の生成も可能となる。

CDMの候補となる粒子は、熱的残存粒子 (初期宇宙においては熱平衡にあったものの、宇宙の膨張に伴いある時点から相互作用が実効的に無視できるようになり、それ以降自由粒子として振る舞うような粒子：付録A) の場合、重たい粒子が候補となる。代表的には、質量が  $m \simeq 1$  TeV 程度の Weakly Interacting Massive Particle (WIMP) が、その候補として挙げられる。この質量のWIMPが注目を集める理由は、素粒子物理学における階層性問題 (電弱理論のエネルギースケールとプランクスケールが非常に大きく離れている問題： Bertone et al. 2005) を解決し得ると同時

に、現在の宇宙に存在するダークマター量と一致するためである。これを、WIMP miracle と呼ぶ。実際、CDM が熱的残存粒子の場合を考えると現在のダークマター量は、

$$\Omega_{\text{DM}} \simeq 0.1 \times \frac{3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s}}{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle} \quad (2.1)$$

となる (Profumo 2017)。従って、現在のダークマター量を再現するような対消滅散乱断面積の大きさは、 $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \simeq 3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s}$  である。WIMP の散乱断面積は率直には、 $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \simeq \alpha^2/m_{\text{WIMP}}^2$  で計算される。ここで  $\alpha$  を微細構造定数とおくと、上の散乱断面積に一致するような WIMP の質量は、 $m_{\text{WIMP}} \simeq 1 \text{ TeV}$  程度となることが分かる。このエネルギースケールは、ちょうどヒッグス凝縮を説明するために必要な新物理が隠れているとされるエネルギー領域であり、素粒子物理学における階層性問題の解決につながる粒子であると考えられる。このように、CDM が熱的残存粒子である場合、宇宙論と素粒子物理学双方の問題を解決し得る、WIMP がその候補として考えられている。

一方、非熱的残存粒子も CDM になりうる。この場合、粒子の質量にかかわらず、非相対論的な速度分散を持って生成されれば CDM の性質を満たすことができる。具体的な例としては、アクシオンや Axion-like-Particle (ALP) などが挙げられる。アクシオンは量子色力学における強い CP 問題の解決に必要な粒子であり、ALP は超弦理論から予測される粒子である (付録 A)。また、ALP は我々が注目する軽いダークマター (Fuzzy Dark Matter, FDM) の具体的な素粒子モデルの一例として近年注目されている。

標準宇宙モデルにおいて CDM といった場合、主に前者の熱的残存粒子を指すことが多い。我々はそれに従い、通常の CDM といった場合前者を念頭に置くこととし、それ以外は Beyond CDM と考えることにする。

## 2.1.2 宇宙の大規模構造

2.1.1 節で述べたように、ダークマターは宇宙の構造形成において重要な役割を果たしてきた。この節では、CDM を仮定した標準宇宙モデルが、宇宙の大きなスケール ( $k \lesssim 1 \text{ Mpc}^{-1}$ ) の観測結果を非常に良く説明してきたことについて述べる。

宇宙の観測データと比較を行う際、2点相関関数およびパワースペクトルといった統計的な性質を用いて議論されることが多い。密度揺らぎ  $\delta(\mathbf{r}) \equiv (\rho(\mathbf{r}) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$  に関する 2点相関関数は、空間 2点  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  における密度揺らぎの積のアンサンブル平均

$$\xi(r_{12}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (2.2)$$

で定義される。ここで、 $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  は 2点間の距離を表す。右辺に関して、理論的には多数の統計的に等価な宇宙を仮想的に考えてアンサンブル平均を取るが、観測的には 2点間の距離  $r_{12}$  を固定して空間のあらゆる場所で平均することで計算される。これはエルゴード性を仮定したこと

に対応する。また、パワースペクトルは密度揺らぎのフーリエ変換  $\tilde{\delta}(\mathbf{k})$  を用いて、

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k) \quad (2.3)$$

と定義される。ここで  $\delta_D^3(\mathbf{k})$  はディラックのデルタ関数である。パワースペクトルは2点相関関数をフーリエ変換したものに对应する。

インフレーションで生成された初期密度揺らぎは、 $P_{\text{in}}(k) \propto k^n$ , ( $n \simeq 1$ ) となっており、ほぼスケール不変であることが分かっている (Planck Collaboration et al. 2020)。生成された揺らぎは各時刻においてそのハッブル半径以内であれば、様々な物理効果により成長・抑制される。宇宙の歴史においてハッブル半径は、インフレーション時に非常に小さくなった後、放射優勢期・物質優勢期を経て次第に大きくなっていく (Dodelson 2003)。従って、ゆらぎは短波長側から順にハッブル半径内に入っていき、スケールに依存した変形を受けることになる。線形理論の範囲 ( $\delta \ll 1$ ) では揺らぎの進化は波数ごとに独立した方程式でかけるため、波数  $k$  のモードの揺らぎの大きさは、同じモードの初期揺らぎの大きさに比例する。その比例係数はスケールに依存した物理効果によって決まり、遷移関数  $T(k)$  によって与えられる。放射優勢期に再びホライズンに入ったスケールでは、揺らぎの成長が抑制され、 $T(k) \propto k^{-2}$  に比例し小さくなる (Dodelson 2003)。短波長側は先にハッブル半径に入るため、揺らぎの成長が阻害される期間が長くなり、その分遷移関数は小さくなる事が分かる。一方、等密度時（放射優勢期と物質優勢期の過渡期）のハッブル半径より大きなスケールの揺らぎは、物質優勢期にハッブル半径内に入るため、この抑制効果を受けず、 $T(k) \simeq 1$  となる。従って、パワースペクトルの波数依存性は、

$$P(k) \propto T^2(k) P_{\text{in}}(k) \propto \begin{cases} k & k < k_{\text{eq}} \\ k^{-3} & k > k_{\text{eq}} \end{cases} \quad (2.4)$$

となる。ここで、 $k_{\text{eq}}$  は等密度時のハッブル半径の大きさに対応した波数である。

CDM モデルの場合、パワースペクトルの振る舞いとして重要なのは、この等密度時での折れ曲がりのみとなる。一方、無衝突減衰が無視できない WDM やバリオンでは、遷移関数の振る舞いが CDM の場合と比べて複雑になる。また、ここでの議論は線形領域の構造形成に限ったものであることに注意する。現在の宇宙で線形領域となっているのは、およそ 1 Mpc より大きなスケールである。図 2.1 は、様々なスケールの観測から得られた物質パワースペクトルと標準宇宙モデルによる理論線の比較をしたものである。観測データ点は、最大のスケールでは Planck 衛星による宇宙背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB)、中間のスケールでは SDSS (Sloan Digital Sky Survey) による銀河団、最小のスケールでは SDSS による Lyman- $\alpha$  クラスタリングと DES (Dark Energy Survey) による cosmic shear の観測結果から、赤方偏移  $z = 0$  における 3次元線形物質パワースペクトルを推定したものである。理論線は、Planck 衛星による CMB の観測から得られた宇宙論パラメータ (Planck Collaboration et al. 2020) を用いて描かれた線形パワースペクトルであり、その振る舞いは式 2.4 に従っている。この図から分かるように、 $k \lesssim 1 \text{ Mpc}^{-1}$  の線形領域においては、CDM を仮定した標準宇宙モデルは様々なスケールの観測結果を非常によ

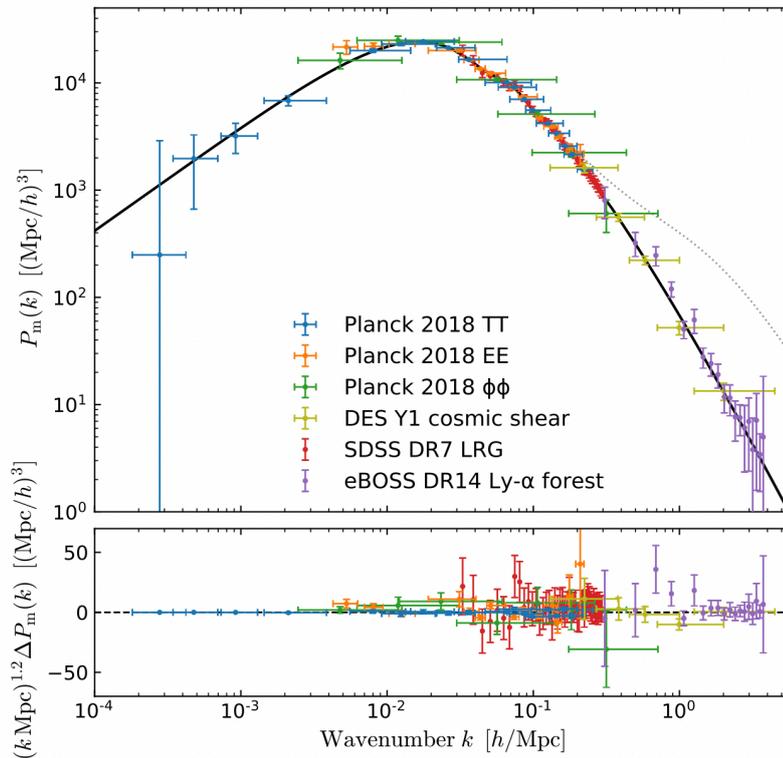


図 2.1:  $\Lambda$ CDM モデルと大スケールの観測結果の一致 (Chabanier et al. 2019)

観測データ点は、最大のスケールでは Planck 衛星による CMB、中間のスケールでは SDSS による銀河団、最小のスケールでは SDSS による Lyman- $\alpha$  クラスタリングと DES による cosmic shear の観測結果から、赤方偏移  $z = 0$  における 3次元線形物質パワースペクトルを推定したものである。黒線は、Planck 衛星による CMB の観測から得られた宇宙論パラメータ (Planck Collaboration et al. 2020) を用いて描かれた標準宇宙モデルが予測する線形パワースペクトルの理論線である。また、下の図は理論線からのズレを示している。

く説明できることが分かる。

### 2.1.3 CDM ハロー

2.1.2 節では、線形領域の構造形成に着目してきた。線形領域では波数ごとに独立な方程式で書けるため、理論的な予測が比較的簡単に行えた。一方で、より小さいスケールに注目すると構造形成は非線形的となり、理論的な予想をすることが難しい。ここで非線形領域とは、密度揺らぎ  $\delta > 1$  となる領域を指す。宇宙において物質が周囲より多く集まった銀河やハローの構造は、この非線形領域に対応する。これらの構造形成の様子を知るために、我々はこれまでシミュレーションに頼ってきた (e.g. Ishiyama et al. 2021)。ここでは、CDM シミュレーションによって明らかにされた CDM ハローの構造についてレビューする。

CDM ハローの動径方向の密度プロファイルは、Navarro-Frenk-White (NFW) プロファイルに

従うことが知られている (Navarro et al. 1997)。NFW プロファイルは、

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{4\rho_{-2}}{(r/r_{-2})(1+r/r_{-2})^2} \quad (2.5)$$

で表される。式 2.5 から分かるように、ハローの中心付近  $r < r_{-2}$  では密度分布がカスプ状  $\rho \propto r^{-1}$ 、その外側  $r > r_{-2}$  では  $\rho \propto r^{-3}$  となり、double power law で表される。NFW プロファイルを記述するパラメータは 2 つであり、密度分布のプロファイルの移り変わりを決める半径  $r_{-2}$  と、そこでの密度  $\rho_{-2}$  である。

NFW プロファイルを決定するパラメータの取り方として、ハロー質量  $M_h$  と質量集中度  $c \equiv r_h/r_{-2}$  の 2 パラメータと取ることもある。ここで  $r_h$  はハローの半径であり、その定義の仕方は複数存在する。具体的には、ビリアル半径  $r_{\text{vir}}$ 、ハロー内の平均密度が宇宙全体の平均物質密度の 200 倍となる半径  $r_{200m}$ 、ハロー内の平均密度が宇宙の臨界密度の 200 倍となる半径  $r_{200c}$  の 3 通りが、ハローの半径の定義として用いられることが多い。これらの定義の仕方に応じて質量集中度も  $c_{\text{vir}}, c_{200m}, c_{200c}$  と表記される。また、ハロー質量と質量集中度の間には、シミュレーションから経験的に得られた関係式 (c-M 関係) が存在する (e.g. Ishiyama et al. 2021)。質量集中度は、質量が小さいハローほど増加し、また赤方偏移が大きいほど減少し、 $c \propto M_h^{-0.1}(1+z)^{-1}$  に従う (Bullock et al. 2001)。またハロープロファイルの分散は、質量集中度の分散に落とし込め、中央値からの分散はハロー質量や赤方偏移に依存せず、0.11 dex 程度であることが知られている (Bullock et al. 2001)。

また、CDM ハローの中にはサブハローが数多く存在する。その個数は小さいサブハローほど多く、サブハロー質量関数は

$$\left(\frac{dN}{dM}\right)_{\text{CDM}} \propto M^{-1.9} \quad (2.6)$$

となる (Springel et al. 2008)。ここで、 $N$  はサブハローの個数、 $M$  はサブハローの質量を表す。無衝突減衰の効果を見捨てた CDM モデルでは、カットオフスケールが存在せず、非常に小さいサブハローまで存在する。ただし CDM として WIMP を考える場合には、非常に小さいカットオフスケールが存在し、最小質量が地球程度の  $10^{-6} M_\odot$  と期待される。また、サブハローの密度プロファイルは、潮汐効果によって端が切れた NFW プロファイルに従う。

## 2.2 小スケール問題

2.1 節では、CDM を仮定した標準宇宙モデルが線形領域・非線形領域でどのような構造形成を行うのかについて議論し、特に線形領域では宇宙の観測結果を非常によく再現できることを示した。本節では、1 Mpc 程度以下の非線形領域の観測結果に注目し、シミュレーション結果との矛盾が存在することを述べる。これらの矛盾は総称して小スケール問題と呼ばれ、ここでは代表的な 4 つの小スケール問題についてレビューする。

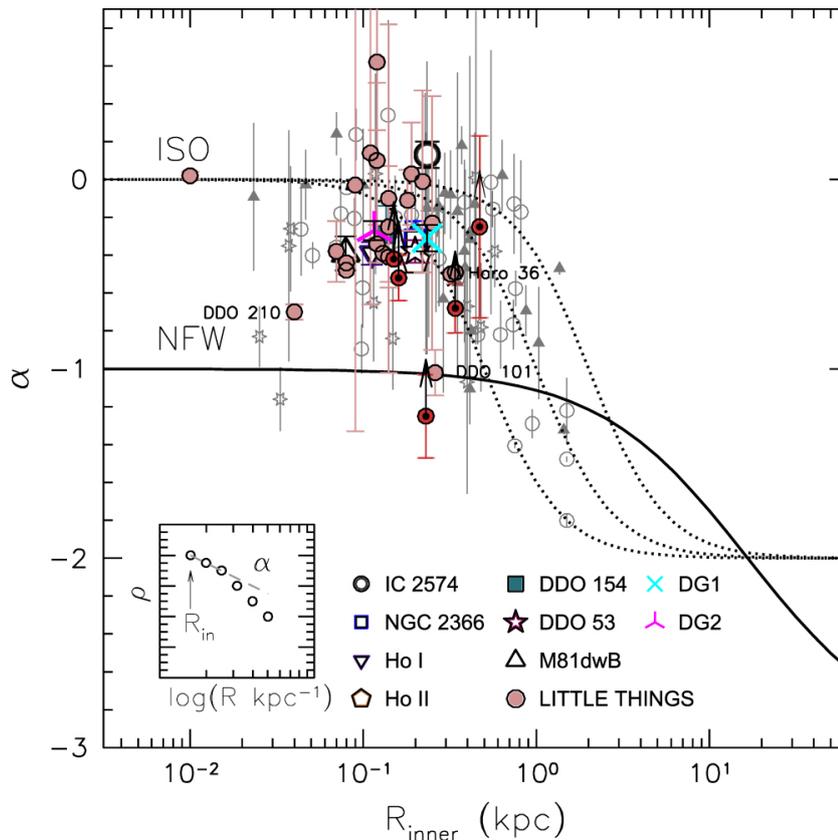


図 2.2: コア・カスプ問題 (Oh et al. 2015)

横軸はハローの中心からの距離、縦軸は密度分布の傾きを表す。黒実線は NFW プロファイルを表し、中心付近で  $\alpha = 1$  となっていることが分かる。観測データ点は、LITTLE THINGS サーベイから得られた 26 個の矮小銀河、および de Blok and Bosma (2002); de Blok et al. (2001); Swaters et al. (2003) の解析で得られた低輝度銀河 (灰色点) を含む。これらは  $\alpha \simeq 0$  を支持することが分かる。

### 2.2.1 コア・カスプ問題

コア・カスプ問題とは、ハローの中心密度プロファイルの様子が、CDM シミュレーションが予測する CDM ハローと実際の矮小銀河や低輝度銀河の観測で異なるという問題である (Alam et al. 2002; de Blok 2010; Flores and Primack 1994; Moore 1994; Oh et al. 2015)。2.1.3 節で見たように、CDM ハローの密度プロファイルは NFW プロファイルに従い、中心付近の密度分布はカスプ状 ( $\rho \propto r^{-1}$ ) になる。一方で、矮小銀河や低輝度銀河の回転曲線の観測から、密度プロファイルは中心付近でコア状 ( $\rho = \text{const.}$ ) になっていることが知られている (e.g. Marchesini et al. 2002)。図 2.2 は、ハローの中心付近の密度プロファイル  $\rho \propto r^\alpha$  の傾きをプロットしたものである。NFW プロファイルでは  $\alpha = -1$  となるのに対し、矮小銀河や低輝度銀河の観測からは  $\alpha \simeq 0$  であることが分かる。これらの系はダークマターが支配的でバリオンが含まれる量が少ないような系であるため、2.3.1 節で述べるようなバリオン物理による小スケール問題の解決策が考えられにくい。

### 2.2.2 ミッシング・サテライト問題

ミッシング・サテライト問題は、天の川銀河サイズの CDM ハローに含まれるサブハローの個数が実際の天の川銀河の矮小銀河の個数と比べて桁違いに多いという問題である (Moore et al. 1999)。質量が  $M \gtrsim 10^7 M_\odot$  のサブハローは分子冷却を支えることができる程度に大きいため、サブハロー内に矮小銀河を保有していることが期待される。従って、サブハローの個数と矮小銀河の個数は同程度であることが期待されるが、実際には特に小さい質量の個数が桁違いで違うというのがミッシング・サテライト問題である。個数の違いは、サブハロー質量関数  $dN/dM \propto M^\beta$  の傾き  $\beta$  の違いであるとも考えられる。式 2.6 に示したように、CDM サブハローの場合  $\beta \simeq -1.9$  であるのに対し、天の川銀河の観測では銀河質量関数の傾きは  $\beta \simeq -1.47$  となっている (Baldry et al. 2012)。このために、特に小さい質量でその個数が大きく異なる。

図 2.3 は、サブハロー/矮小銀河の累積個数を回転速度  $v_c = (GM/r)^{1/2}$  の関数としてプロットしたものである。ただし、回転速度は親ハローの回転速度で正規化している。天の川銀河で見つかった衛星銀河 (点線) の個数と、CDM シミュレーションで得られたサブハローの個数 (波線) を比べると、10 – 100 倍程度の違いがあることが分かる。

ただし近年、観測技術の向上やバリオン物理に伴う銀河・ハローの対応関係の理解の進展により、ミッシング・サテライト問題自体が消失する可能性が示唆されている。実際、天の川銀河内に当初より多くの矮小銀河が見つかってきている (e.g. Drlica-Wagner et al. 2015)。また、DES (Dark Energy Survey) や LSST (Large Synoptic Survey Telescope) の観測からより多くの矮小銀河が見つかることが予測されている (Hargis et al. 2014)。さらに Kim et al. (2018) では、銀河・ハロー質量のスケーリング関係 (Behroozi et al. 2013; Brook et al. 2014; Moster et al. 2013) を考慮した時に CDM モデルが予測する衛星の個数と、SDSS (Sloan Digital Sky Survey) の検出効率を考慮し補正された観測衛星数が一致することを示し、ミッシング・サテライト問題が消失し得ることを示唆した。

### 2.2.3 銀河の回転曲線の多様性問題

銀河の回転曲線の多様性問題とは、最大回転速度が同じ銀河を選びその内側の回転曲線に注目した時、その半径依存性が CDM シミュレーションではほぼ同一であるのに対し、実際の渦巻銀河の観測では様々なものが存在するという問題である (Oman et al. 2015)。この問題は、中心付近での密度分布の違いが回転曲線の形状に反映されるため、コア・カスプ問題の現代版とも解釈される。ただし、コア・カスプ問題はダークマターの分布に注目した問題であったのに対し、この回転曲線の多様性問題はバリオン分布も考慮した上での問題であることに注意する。図 2.4 は、最大回転速度が一致するものに対して、シミュレーションから得られた回転曲線と、実際に観測された矮小銀河の回転曲線を比較したものである。色付きの領域は、シミュレーションで得られた銀河の回転曲線の内、その最大回転曲線が、観測で得られた各矮小銀河の最大回転速度と 10% 以内で一致しているようなものを選んだ時の様子を表している。また 4 つの図は、どれも最大回転曲線がおよそ 80 km/s の回転曲線を選んでいる。この図から、シミュレーションで得られた回転曲線の形状は分散が小さくほぼ同一であるが、実際の矮小銀河では様々な形状の回転曲線が存在することが分かる。中心付近の密度プロファイルが回転曲線の形状に影響を与えることから、CDM

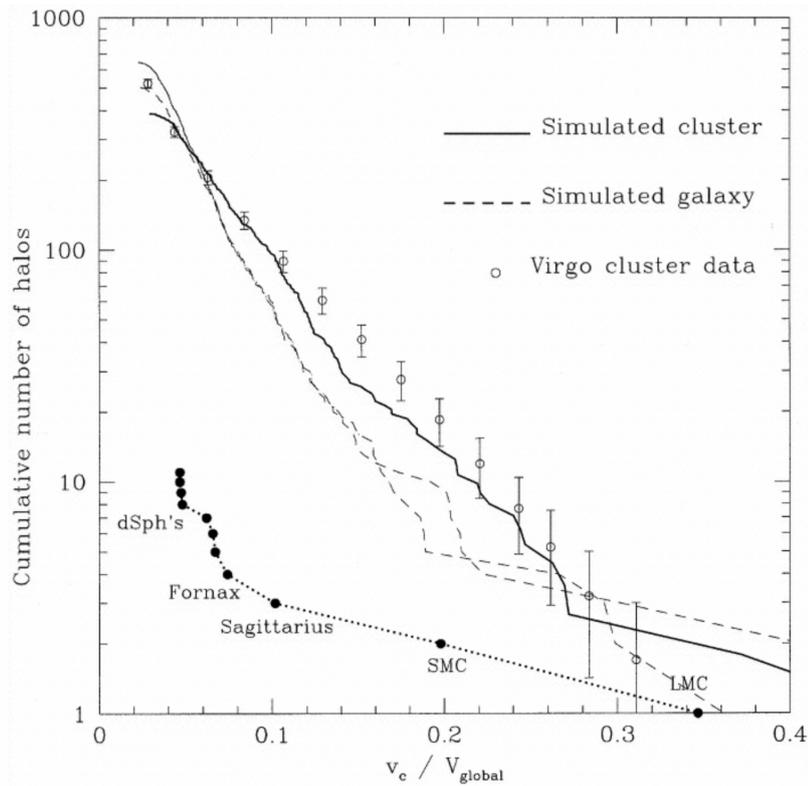


図 2.3: ミッシング・サテライト問題 (Moore et al. 1999)

我々の天の川銀河、おとめ座銀河団において、サブハロー/矮小銀河の累積個数を回転速度  $v_c$  の関数としてプロットしている。ただし、横軸はそれらが属する親ハローの回転速度  $v_{\text{global}}$  で正規化している。点線は天の川銀河ハロー内の衛星の分布 (Mateo 1998) で、誤差付きの白丸はおとめ座銀河団 (Binggeli et al. 1985) のデータを表す。また、波線はシミュレーションで得られた銀河質量ハロー、実線は銀河団ハローを表す。天の川銀河に注目すると CDM シミュレーションと観測結果に大きな違いがあることが分かる。一方、銀河団サイズではシミュレーション結果と観測結果がおおよそ一致していることが分かる。従ってミッシング・サテライト問題は天の川銀河サイズに注目した時に見られる問題である。

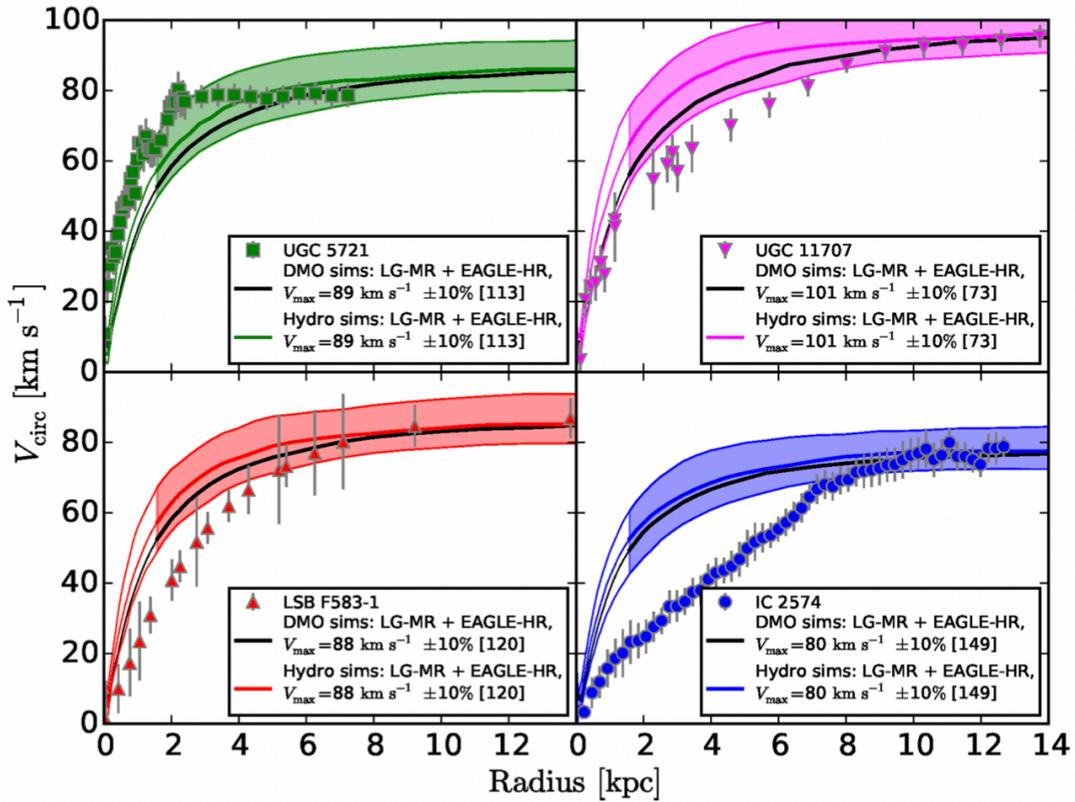


図 2.4: 銀河の回転曲線の多様性問題 (Oman et al. 2015)

横軸は中心からの距離、縦軸は回転速度を表す。データ点は矮小銀河の観測から得られたもので、これら4つの回転曲線は最大回転速度が同じ（およそ  $80 \text{ km/s}$ ）ものを選んでている。色付きの領域は、2つの流体シミュレーション (EAGLE, Schaye et al. 2015 と LOCAL GROUPS, Fattahi et al. 2016) から得られた銀河の回転曲線の内、その最大回転速度が、観測で得られた各矮小銀河の最大回転速度と10%以内で一致しているようなものを選んだ結果である。これらと比較することで、矮小銀河の回転曲線の半径依存性には多様性があり、CDMモデルを仮定した流体シミュレーション結果とは矛盾することが分かる。

ハローの密度プロファイルはバリオン応答性が小さく、回転曲線に多様性を生めないことが示唆される。

#### 2.2.4 Too-big-to-fail 問題

Too-big-to-fail 問題とは、CDMシミュレーションで得られた天の川銀河サイズのハロー内に存在する比較的重いサブハローの中には、実際に観測されているどの矮小楕円体銀河よりも中心密度が高いものが存在するという問題である (Boylan-Kolchin et al. 2011)。天の川銀河の観測から、矮小楕円体銀河の half-light 半径  $r_{1/2}$  とそれより内側の半径に存在する内包質量  $M_{1/2}$  が得られている (Mateo 1998; Wolf et al. 2010)。Boylan-Kolchin et al. (2011) では、矮小楕円体銀河を含む

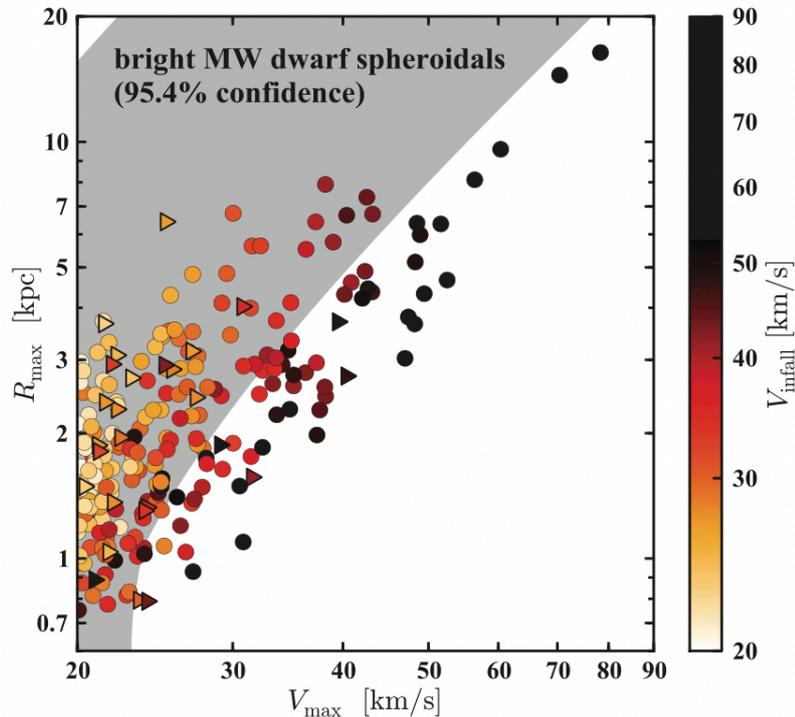


図 2.5: Too-big-to-fail 問題 (Boylan-Kolchin et al. 2011)

サブハローの最大回転速度とその半径を比較したもの。丸点は Aquarius シミュレーション (Springel et al. 2008)、三角点は Via Lactea II シミュレーション (Diemand et al. 2008) から得たサブハローを表す。灰色の領域は、天の川銀河の矮小楕円体銀河をホストするサブハローの密度プロファイルが NFW プロファイルに従うと仮定した時の、各サブハローの最大回転速度とその半径が満たすべき領域を示している。ここで用いた矮小楕円体銀河は、Sextans, CVnI, Carina, Fornax, LeoII, LeoI, Sculpt, UrsMin, Draco の 9 つである。

サブハローの密度プロファイルが NFW プロファイルに従うものと仮定して、各サブハローの最大回転速度  $V_{\max}$  とその半径  $R_{\max}$  の満たすべき関係 (図 2.5 の灰色の領域) を求め、シミュレーション結果 (図 2.5 のデータ点) と比較した。図 2.5 から分かるように、シミュレーションで得られたサブハローの一部は、天の川銀河内の矮小楕円体銀河を含むどのサブハローよりも中心質量が大きいことが分かる。また、一部の非常に重いサブハローの回転速度は、天の川銀河に存在する矮小楕円体銀河の観測から得られたどの回転速度よりも大きいことから、Too-big-to-fail 問題が支持されている (Boylan-Kolchin et al. 2012; Bullock and Boylan-Kolchin 2017)。

Too-big-to-fail 問題は、ミッシング・サテライト問題と同様に天の川銀河内の小構造体の個数に注目したものであり、ミッシング・サテライト問題の現代版と考えられる。ただし、ミッシング・サテライト問題は、主に小さい構造の個数に関してシミュレーションと観測結果で大きな違いがあったことを指摘していたが、Too-big-to-fail 問題では最も重いサブハローに注目している点が異なる。また、コア・カスプ問題が解決されれば中心密度を小さくなるため、同時に Too-big-to-fail 問題も解決され得る。

## 2.3 小スケール問題の解決策

2.2節では、標準宇宙モデルによる理論予言と小スケールの観測に矛盾があることを示した。宇宙をより良く説明できるような理論を構築するためには、標準宇宙モデルにおける大規模構造の成功を保ったまま、小スケールの観測とも一致するように標準宇宙モデルを修正する必要がある。小スケール問題の解決策として、主に2つのアプローチで研究されている。1つ目は、構成要素としてCDMのみを考えているシミュレーションでは考慮されていない、星形成や超新星爆発などのバリオン物理を含めるという方法である。2つ目は、温かいダークマター（Warm Dark Matter, WDM）や自己相互作用ダークマター（Self Interacting dark matter, SIDM）など、CDMに代わるダークマターモデルを考える方法である。この節では、各々のアプローチについて現状の研究状況をまとめる。

### 2.3.1 バリオン物理

バリオン物理の考慮することによって、CDMを仮定した標準宇宙モデルの範囲内で小スケール問題を解決できる可能性が示唆されている。近年開発されてきた星形成・超新星爆発の効果を取り入れたシミュレーション（e.g. NIHAO, Wang et al. 2015）によると、ダークマターハローの中心付近での密度プロファイル  $\rho \propto r^\alpha$  の傾き  $\alpha$  は、CDM-only の場合（NFW プロファイル）と異なることが分かった。このバリオン物理による密度プロファイルの変化は、銀河質量（または銀河・ハロー質量比）に依存することが示唆されている（Di Cintio et al. 2014; Governato et al. 2012; Tollet et al. 2016）。

図2.6はこの依存性を表した図になっている。横軸は銀河・ハロー質量比  $M_s/M_h$ 、縦軸はビリアル半径の1.5%以内の密度プロファイルの傾きである。 $\alpha \lesssim -0.8$  がカスプ状である。内部分散も含めた時のNFWプロファイルの傾きは灰色の領域で表されている。NFWプロファイルは質量に依らず普遍的なプロファイルであるため、銀河・ハロー質量比によらず一定値をとる。青色の領域はバリオン物理を含んだシミュレーションNIHAOから得られた領域を示している。この場合、銀河・ハロー質量比に大きく依存していることが分かる。銀河・ハロー質量比が小さい（ $M_s/M_h \lesssim 10^{-4}$ ）場合、ダークマターが支配的となり星形成の効果が小さいため、NFWプロファイルに近い密度プロファイルとなる。このような系は、超低輝度銀河に対応する。質量比が大きくなると、十分な量の星形成が起き、重たい星が超新星爆発を起こすことにより中心密度が減少する。特に、質量比  $M_s/M_h \simeq 6 \times 10^{-3}$  付近では、これらのバリオン物理の影響が最も有効的に働き、コア状の密度プロファイルを形成する。この時の典型的な銀河の質量は、 $M_s \simeq 10^8 - 10^9 M_\odot$  で、矮小銀河に対応する。さらに質量比が大きいような系では、バリオンの重力ポテンシャルにより、超新星爆発で飛ばされたダークマターが再び引き戻される。その結果、NFWプロファイルより傾きが大きいカスプ状になる。

以上のように、バリオン物理により低輝度銀河や矮小銀河では、コア状のプロファイルを生成できることが分かった。実際Tollet et al. (2016)では、LITTLE THINGSサーベイで得られたプロファイル（図2.2参照）と比較し、コア・カスプ問題が解決されたと結論付けている。

また、星形成や超新星爆発という衛星内部のバリオン物理以外にも、潮汐剥離、円盤衝撃、ラム圧剥離などの衛星と天の川銀河との間の相互作用が、衛星の中心質量を減少させる追加的なフィー

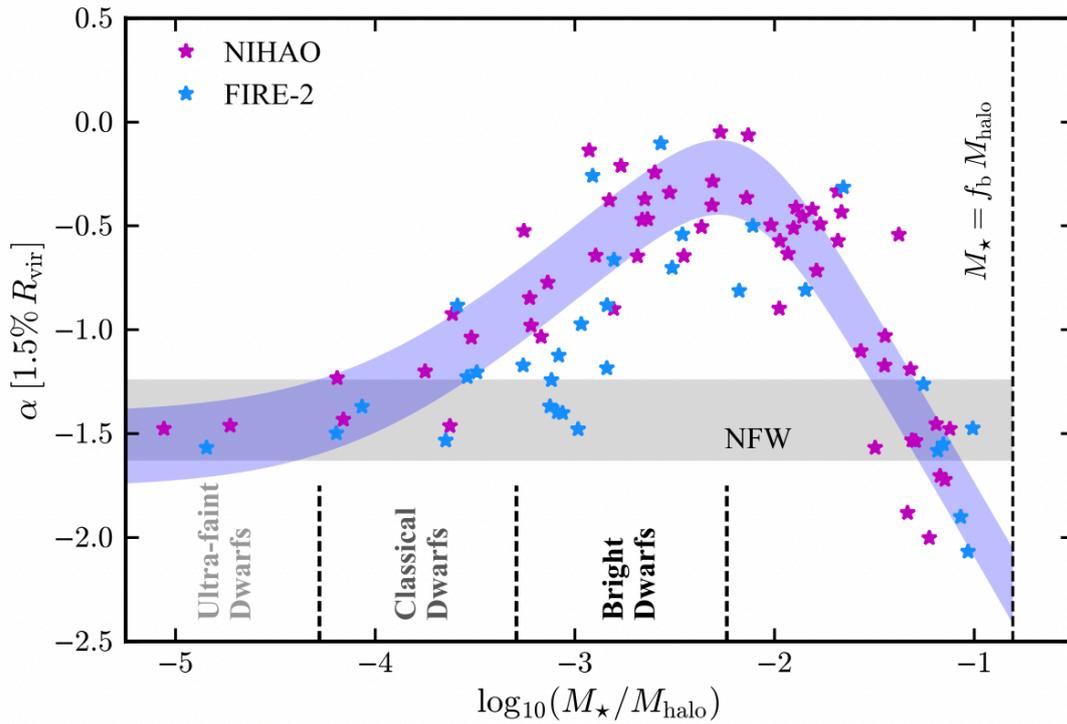


図 2.6: バリオン物理の影響とダークマター密度プロファイルの傾きの関係 (Bullock and Boylan-Kolchin 2017)

横軸は銀河・ハロー質量比、縦軸はビリアル半径の1.5%以内におけるCDM密度プロファイルの傾きを表している。灰色の領域はNFWプロファイルを表す。バリオン物理を考慮した2つのシミュレーションNIHAO(Wang et al. 2015), FIRE-2(Hopkins et al. 2018)から得られた結果は、それぞれ赤点と青点で示されている。また、青色の領域はNIHAOから推定される範囲を表したものである。これらの結果から、ダークマター密度プロファイルの傾きは、銀河・ハロー質量比に大きく依存し、特に低輝度銀河や矮小銀河ではコア状の密度プロファイルを生成できることが分かる。

ドバックとして作用する。銀河形成シミュレーションの多くでは、これらの相互作用の重要性が指摘されており、Too-big-to-fail 問題の解決にも繋がると考えられている (e.g. Dutton et al. 2016; Zolotov et al. 2012)。

### 2.3.2 ダークマターモデルの変更

2.3.1 節では、 $\Lambda$ CDM モデルの範囲内で小スケール問題を解決する方法を考えていた。本節では、小スケールの構造を変えるためのもう一つの手法であるダークマターモデルの変更について述べる。CDM は重力以外の相互作用を無視でき、無衝突減衰の効かないようなダークマターモデルであるため、いわば最も単純化されたモデルである。CDM に代わる代表的なダークマターモデルとして、WDM と SIDM が挙げられる。WDM は無衝突減衰を考慮したモデル、SIDM は重力相互作用以外の相互作用を考えたモデルになる。ここでは、WDM と SIDM に関してレビューを行い、FDM に関しては 3 章で述べる。また、ここでは熱的残存粒子 (付録 A) の場合のみを考える。

#### WDM

まず、初期宇宙において無視できない速度分散を持つようなダークマターモデルを考える。この速度分散によって無衝突減衰が起き、構造形成が抑制される (付録 B)。ダークマターの速度分散が非常に大きい場合、熱い残存粒子 (Hot Dark Matter, HDM) と呼ばれ、例えばニュートリノがその具体的な候補として考えられてきた。しかし、付録 B で示したように、HDM モデルでは無衝突減衰のスケールが銀河団より大きくなってしまい、現在観測されているような宇宙の構造を生成できないため、棄却された。ここで式 B.7 から、脱結合時のエントロピー自由度  $g_{*S}(T_D)$  が通常のニュートリノより大きい値となれば、抑制するスケールを小さくなるのが分かる。熱的残存粒子の場合における脱結合時の温度に注目すると、ニュートリノ (HDM) の場合は  $T_D \simeq 1.5$  MeV、WIMP (CDM) の場合は質量が  $m_{\text{WIMP}} \simeq 10$  GeV に対しては  $T_D \simeq 400$  MeV、質量が  $m_{\text{WIMP}} \simeq 1$  TeV に対しては  $T_D \simeq 40$  GeV となる (付録 B)。従って、脱結合時の温度がこれらの中間の値を取るようなダークマターモデルを考えると、エントロピー自由度  $g_{*S}(T_D)$  をニュートリノの場合より大きくすることができ、小スケール問題を解決し得ることが期待される。このように、HDM と CDM の中間の性質を持つようなダークマターモデルを、WDM と呼ぶ。

WDM シミュレーションから、WDM の質量と自由流長の関係は、

$$\lambda_{\text{fs}} = 70 \left( \frac{m_{\text{WDM}}}{1 \text{ keV}} \right)^{-1.11} \text{ kpc} \quad (2.7)$$

となることが知られている (Bode et al. 2001)。この時対応する質量は、

$$M_{\text{fs}} = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{m}} \left( \frac{\lambda_{\text{fs}}}{2} \right)^3 = 7.1 \times 10^6 \left( \frac{m_{\text{WDM}}}{1 \text{ keV}} \right)^{-3.33} M_{\odot} \quad (2.8)$$

である。実際には、物質パワースペクトルの抑制は自由流長スケールより大きいスケールまで広がる。それを特徴づけるスケールを Half-mode スケールと呼び、CDM パワースペクトルに比べて 50% に減衰するところと定義される。WDM シミュレーションによって、Half-mode 質量  $M_{\text{hm}}$  の WDM 質量依存性が明らかにされ、

$$M_{\text{hm}} = 1.9 \times 10^{10} \left( \frac{m_{\text{WDM}}}{1 \text{ keV}} \right)^{-3.33} M_{\odot} \quad (2.9)$$

で与えられる (Schneider et al. 2012)。以上のように、WDM モデルでは小構造体の形成を抑制し、特にミッシング・サテライト問題の解決につながる可能性が示唆される。ここでは、WDM が熱的残存粒子である場合について、構造形成が抑制されるスケールと WDM 質量の関係を示してきたが、WDM が非熱的残存粒子の場合は、これらの関係はユニークに決まっているわけではなく、生成機構に依存することに注意する。

WDM モデルは、小構造体の個数の減少のみに影響するのではない。宇宙の構造は階層的に形成されるため、小さな摂動が減衰することでより質量の大きいハローの形成が遅れる。ハローの中心密度は、その形成時の宇宙の密度を反映しているため、WDM モデルでは、質量  $M_{\text{fs}}$  から 2-3dex 以内のハローでは、中心密度が減少する。これにより、Too-big-to-fail 問題を解決する可能性がある (Anderhalden et al. 2013)。一方で、WDM ハローの中心密度プロファイルは、CDM と場合と同様にカスプ状になることが確認されている (e.g. Macciò et al. 2013)。

図 2.7 では、CDM シミュレーションと質量 2 keV の WDM シミュレーションから得た天の川銀河サイズのハローを比較している。左図は、ホストハローの密度分布を表しており、WDM ハローは CDM ハローと同様にカスプ状の密度プロファイルに従うことが分かる。右図は、構造体の個数を最大回転速度の関数でプロットしたものになっている。Half-mode 質量より小さい構造は抑制されていることが分かり、ミッシング・サテライト問題の解決の可能性が示唆される。中央の図では、CDM と WDM において対応するホストハローとサブハローの最大回転速度を比較している。質量の大きいハロー ( $V_{\text{max}} \gtrsim 50 \text{ km/s}$ ) は同一な構造をしているが、質量が小さいハローに注目すると、WDM ハローは CDM ハローよりも  $V_{\text{max}}$  の値が系統的に小さくなる。これは、Half-mode 質量付近のハローでは中心密度が減少することを意味し、Too-big-to-fail 問題の解決に繋がる可能性があることが分かる。

これまで見てきたように、WDM は小スケールの構造形成を抑制する。WDM の質量を小さくすると、より大きい構造まで抑制されることになり、サブハローの個数は減少する。従って、実際に天の川銀河の観測事実と比較することによって、WDM の質量に制限をかけることができる。観測された暗黒物質主体の衛星の数は、天の川銀河内のサブハローの数の下限となり、WDM の質量の下限を得られる。その結果、Polisensky and Ricotti (2011) では  $m > 2.3 \text{ keV}$  (95% 信頼度) という制限を得られ、Lovell et al. (2014) では  $m > 1.6 \text{ keV}$  という制限を得た。これらの違いは、宇宙論、天の川のダークマターハローの質量に関する仮定、衛星検出の完全性限界のモデルが微妙に異なることによる。また、Banik et al. (2021) では恒星ストリームのパワースペクトルと矮小銀河の個数から  $m > 6.2 \text{ keV}$  という非常に厳しい制限を与えた。この恒星ストリームは、サブハローが近くを通過した時に起きる潮汐現象に敏感であるため、サブハローの個数密度に大きく依存し、ダークマターモデルの制限に有用な観測対象と言える。

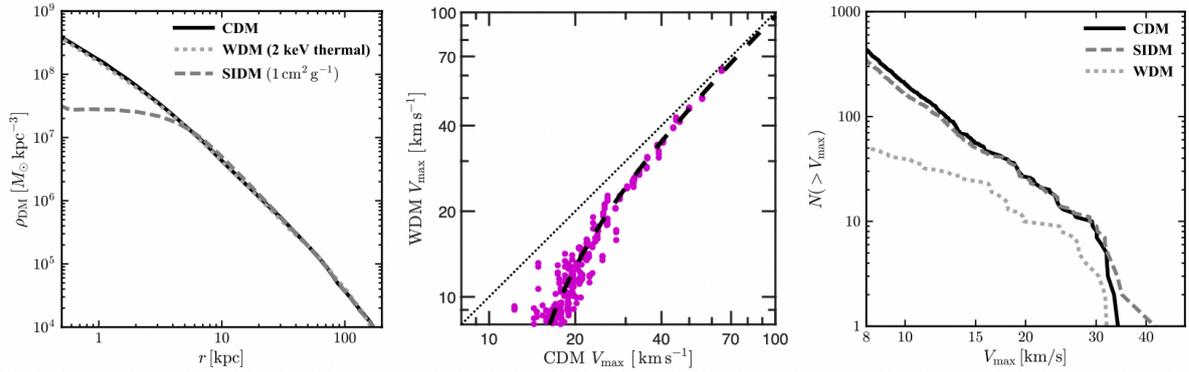


図 2.7: CDM、WDM、SIDM モデルにおける天の川銀河サイズのハローの比較 (Bullock and Boylan-Kolchin 2017)

CDM、SIDM (散乱断面積  $\sigma/m = 1 \text{ cm}^2/\text{g}$ )、WDM (質量 2 keV の熱的残存粒子) シミュレーションで得られた天の川銀河サイズの同一ハローを取り出して比較した。左図ではホストハローの密度分布を示している。天の川銀河サイズでは、WDM は CDM と同様にカスプ状の密度プロファイルとなる一方で、SIDM ハローの場合はコア状となる。右図はサブハローの個数を速度の関数としてプロットしている。SIDM ハローは CDM ハローと変わらないが、WDM では Half-mode 質量より小さなサブハローの構造形成が抑制されることが分かる。中央の図は、CDM と WDM において対応するホストハローとサブハローの最大回転速度を比較している。ホストハローの密度構造が WDM と CDM でほぼ同じであるのに対し、個々のサブハローは、WDM モデルの方が系統的に  $V_{\text{max}}$  の値が小さいことが分かる。このことから WDM モデルでは、Half-mode 質量付近の構造において中心の重力ポテンシャルが浅くなることが分かり、Too-big-to-fail 問題の解決に繋がる可能性がある。

最後に、WDM の候補となる粒子は、超対称性粒子である gravitino や弱い相互作用をしない sterile neutrino などの仮説的粒子が挙げられる。

## SIDM

次に、SIDM モデル (Carlson et al. 1992; Spergel and Steinhardt 2000) に注目する。CDM モデルではその定義から重力以外の相互作用は無視することができ、非線形進化を追うには、無衝突ボルツマン方程式を解けば良い。一方で、重力以外の相互作用が十分大きい場合を考えるのが、SIDM モデルである。SIDM モデルを特徴づけるパラメータは散乱断面積  $\sigma$  である。ただし、我々はダークマターの質量を知らないため、単位質量あたりの散乱断面積  $\sigma/m$  で SIDM モデルを特徴づけることが多い。

散乱断面積の大きさから平均自由行程を求めることができ、 $\lambda = (n\sigma)^{-1} = (\rho\sigma/m)^{-1}$  と表される。ここで、 $n$  は SIDM の数密度を表す。SIDM ハローの中心付近では、密度が大きいため平均自由行程が短く、局所的な力学的時間あたりに多くの散乱現象が起きる。この散乱現象によりエネルギーのやりとりが行われ、結果として SIDM ハローの中心密度プロファイルは等温密度プロ

ファイルで記述できる。一方で、外側に行くと数密度が小さくなるため衝突が起きにくく、CDMと同様の振る舞いをするようになる。この移り変わりの半径  $r_1$  は、

$$\frac{\langle \sigma v \rangle}{m} \rho(r_1) t_{\text{age}} \simeq 1 \quad (2.10)$$

を満たす半径として評価できる。この式は、ハロー年齢の間に散乱が少なくとも一度起きるような半径を  $r_1$  とする、という意味である。この移り変わり半径  $r_1$  を用いると、SIDM ハロー密度プロファイルは、

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_{\text{iso}}(r) & r < r_1 \\ \rho_{\text{NFW}}(r) & r > r_1 \end{cases} \quad (2.11)$$

と書ける (Kaplinghat et al. 2016)。内側の等温密度プロファイルの具体的な表式は、以下のように導出できる。SIDM 粒子は等温ガスのように振る舞うので、状態方程式は  $p = \rho \sigma_0^2$  と書ける。ここで、 $p$  は圧力、 $\sigma_0$  は速度分散を表す。ハローの内側では静水圧平衡に達していると仮定すると、Euler 方程式から  $\nabla p = -\rho \nabla \Phi_{\text{tot}}$  を満たす。  $\Phi_{\text{tot}}$  はダークマターとバリオンの総重力ポテンシャルを表し、Poisson 方程式  $\nabla^2 \Phi_{\text{tot}} = 4\pi G(\rho + \rho_b)$  を満たす。ここで、 $\rho_b$  はバリオンの密度分布を表す。これらを連立させることで、

$$\sigma_0^2 \nabla^2 \ln \rho = -4\pi G(\rho + \rho_b) \quad (2.12)$$

を得る。ハローの中心での重力ポテンシャルを 0 となるように定め、中心密度を  $\rho_0$  と書くことにすると、等温密度プロファイルは、

$$\rho_{\text{iso}}(r) = \rho_0 \exp\left(\frac{-\Phi_{\text{tot}}(r)}{\sigma_0^2}\right) \quad (2.13)$$

となる (Kamada et al. 2017)。この等温密度プロファイルによって、SIDM ハローの中心付近にコアを形成することができ、コア・カスプ問題の解決が示唆されている。散乱断面積を大きくするとコア半径が大きくなることも確かめられている (Elbert et al. 2015)。これは散乱断面積が大きくなると熱交換が効率的になり、より広い範囲で等温密度プロファイルとなることを意味する。また、SIDM モデルでは銀河の回転曲線の多様性問題を解決できることが分かっている (Kaplinghat et al. 2016)。SIDM コアがバリオン応答性が大きいことが、この多様性問題の解決に繋がった。これは式 2.13 を見ると分かり、中心密度プロファイルは重力ポテンシャルに依存した形になっている。重力ポテンシャルはバリオン分布に依存するので、SIDM ハローがバリオン分布の違いに敏感であることが示唆される。

図 2.7 は、CDM シミュレーションと単位質量あたりの散乱断面積を  $1 \text{ cm}^2/\text{g}$  とした SIDM シミュレーションから得た天の川銀河サイズのハローの比較をしている。左図を見ると、SIDM ハローの中心付近の密度分布はコア状になっていることが確認され、コア・カスプ問題を解決し得る

ことが分かる。一方右図に注目すると、構造体の個数は CDM の場合とほぼ同一であり、ミッシング・サテライト問題を大きく軽減することはできないことが分かる (see also [Rocha et al. 2013](#))。

これまでに、宇宙の観測と合うような SIDM の散乱断面積の大きさを調べる試みが多数なされてきた。その一例として、天の川銀河のダークマターハローでコア・カスプ問題を解決するためには、SIDM の平均自由行程が  $1 \text{ kpc} \lesssim \lambda \lesssim 1 \text{ Mpc}$  であることを示された ([Spergel and Steinhardt 2000](#))。散乱断面積に換算すると、 $400 \gtrsim \sigma/m \gtrsim 0.4 \text{ cm}^2/\text{g}$  となる。この散乱断面積の大きさは素粒子物理学的には非常に大きく、中性子-中性子散乱の断面積に匹敵する。しかし、このように大きな散乱断面積も観測的にはまだ除外することはできていない。[Spergel and Steinhardt \(2000\)](#) では解析的に上記の制限を得たが、近年 SIDM シミュレーションが開発され、小スケール問題がより詳しく議論できるようになった (e.g. [Vogelsberger et al. 2012](#))。実際に、散乱断面積を  $\sigma/m \simeq 0.5 - 10 \text{ cm}^2/\text{g}$  とした時、コアの大きさが  $0.3 - 1.5 \text{ kpc}$  程度で、中心密度が  $2 - 0.2 \times 10^8 M_{\odot} \text{ kpc}^{-3}$  程度の矮小銀河が生成され、コア・カスプ問題や Too-big-to-fail 問題が解決されることが分かった ([Fry et al. 2015](#); [Peter et al. 2013](#); [Vogelsberger et al. 2012](#))。

SIDM モデルを制限する可能性のある重要な観測結果の一つとして、銀河団の観測が挙げられる。観測された銀河団の中心密度が非常に高く、 $\sigma/m \simeq 0.5 \text{ cm}^2/\text{g}$  は棄却された一方で、 $\sigma/m \simeq 0.1 \text{ cm}^2/\text{g}$  は CDM よりよく一致することが分かった ([Kaplinghat et al. 2016](#))。これらの結果から、SIDM が小スケール問題を軽減し、かつ銀河団の観測とも無矛盾であるためには、ダークマターの速度分散が矮小銀河 ( $v \simeq 10 \text{ km/s}$ ) から銀河団 ( $v \simeq 1000 \text{ km/s}$ ) のスケールになるにつれて、散乱断面積が減少する必要がある。つまり、SIDM の散乱断面積は速度依存性を持つ必要がある。このように散乱断面積が速度依存性を持つような SIDM の候補も既に考えられており、ダークマターの質量が  $15 \text{ GeV}$  で、相互作用を媒介するダークフォトンの質量が  $17 \text{ MeV}$  であるようなモデルがその一例として考えられている ([Kaplinghat et al. 2016](#))。

以上のように、WDM や SIDM のように従来の CDM モデルを修正したダークマターモデルを考えることにより、小スケール問題を緩和・解決する可能性が示唆されており、盛んに研究がなされている。また、本節では紹介しなかった軽いダークマター (Fuzzy Dark Matter, FDM) も CDM に代わるダークマターモデルとして注目を集めている。これについては次章で紹介する。

## 第3章 軽いダークマター

CDMによる小スケール問題を解決する可能性があるダークマターモデルとして、近年軽いダークマター (Fuzzy Dark Matter, FDM, [Hu et al. 2000](#)) が注目されている。FDMとは、質量が  $m \simeq 10^{-22}$  eV 程度の、自己相互作用せず重力場と最小結合したスカラー粒子のことを指す。質量が非常に小さいことから、FDMのドブロイ波長は非常に大きくなり、宇宙論スケールで量子力学的効果が働くことになる。実際、ドブロイ波長は、

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{mv} = 1.92 \text{ kpc} \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m} \right) \left( \frac{10 \text{ km/s}}{v} \right) \quad (3.1)$$

と計算できる。この式から分かるように、1 kpc 程度のドブロイ波長より小さなスケールでは、波動性が支配的となり、それより大きなスケールでは粒子性が支配的となる。従って、小スケールの構造形成の様子は量子力学的効果の影響で従来の CDM とは異なる一方で、大きなスケールでは CDM と同様な構造形成を行うものと期待される。このように FDM モデルでは、小スケールの構造が CDM の場合と比べて変わることから、小スケール問題を解決する可能性のあるダークマターモデルとして注目を集めている。本章では、FDMの基礎方程式と構造形成の様子、現在得られている FDM 質量制限についてレビューする。また、本章では特に述べない限り自然単位系  $c = \hbar = 1$  を用いることにする。

### 3.1 FDMの基礎方程式

本節では、FDMの支配方程式である Schrödinger-Poisson(SP) 方程式について述べる。まず 3.1.1 節では、膨張宇宙における SP 方程式の導出を共動座標系を用いて行う。3.1.2 節では、SP 方程式を書き換えることで流体方程式に帰着させることができ、CDM の場合に現れる重力項以外に、量子圧力項が現れることを見る。膨張宇宙における共動座標系の SP 方程式は、静止宇宙における静止座標系の SP 方程式から、変換則を与えることでも導出できる。これについて 3.1.3 節で見る。

### 3.1.1 膨張宇宙における Schrödinger-Poisson 方程式

自己相互作用をせず重力場の計量  $g_{\mu\nu}$  と最小結合している、スカラー場  $\phi$  の作用は、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.3)$$

で与えられる (Mina et al. 2020)。ここで、 $m$  はスカラー場の質量を表し、 $g$  は計量  $g_{\mu\nu}$  の行列式である。また、計量を対角化したときの符号は  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$  となるように定義している。作用の第 1 項は運動エネルギー項で、第 2 項が質量項となっている。スカラー場  $\phi$  が満たす運動方程式は、作用  $S$  を  $\phi$  で変分することで得られる。Euler・ラグランジュ方程式

$$\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\phi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (3.4)$$

に上記のラグランジアンを代入すると、Klein-Goldon 方程式

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2) \phi = 0 \quad (3.5)$$

が得られる。ただし、 $\nabla^\mu$  は共変微分で

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) \quad (3.6)$$

を満たす。

弱重力場を仮定し、一様等方宇宙にスカラー摂動を加えた計量を考える。共同座標  $(t, \mathbf{x})$  を取り、スケール因子を  $a(t)$  とした時、膨張宇宙の計量は、Friedmann-Robertson-Walker 計量

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2\Phi(t, \mathbf{x}) & & & \\ & -a^2(t)(1 - 2\Phi) & & \\ & & -a^2(t)(1 - 2\Phi) & \\ & & & -a^2(t)(1 - 2\Phi) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

で表せる。ここで  $\Phi(t, \mathbf{x})$  は共同座標から見た時の (physical な) 重力ポテンシャルであり、弱重

力場の仮定より  $|\Phi(t, \mathbf{x})| \ll 1$  である。この時、逆行列は、

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - 2\Phi(t, \mathbf{x}) & & & \\ & -a^{-2}(t)(1 + 2\Phi) & & \\ & & -a^{-2}(t)(1 + 2\Phi) & \\ & & & -a^{-2}(t)(1 + 2\Phi) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

となる。また、この重力ポテンシャル  $\Phi(t, \mathbf{x})$  は、膨張宇宙における Poisson 方程式

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(t, \mathbf{x}) &= 4\pi G a^2 (\rho(t, \mathbf{x}) - \bar{\rho}(t)) \\ &= 4\pi G a^2 \bar{\rho}(t) \delta(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

を満たす。ここで、 $\bar{\rho}(t)$  は考えている空間における平均密度である。また、 $\delta(t, \mathbf{x})$  は密度揺らぎを表し、

$$\delta(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\rho(t, \mathbf{x}) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad (3.10)$$

と定義される。この計量を式 3.6 に代入すると、場  $\phi$  が満たす運動方程式は、

$$(1 - 2\Phi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 4(1 + 2\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + 3H(1 - 2\Phi) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{a^2} (1 + 2\Phi) \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad (3.11)$$

となる。

FDM モデルでは、粒子間距離がドブロイ波長に比べて十分小さくなるので、波動関数の重なりが起きる。この場合 FDM は、巨視的な粒子数が同一状態、つまりコヒーレント状態で存在し、非相対論的振る舞いをするようになる。従って、Klein-Gordon 方程式の非相対論的極限を取る必要があり、

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\psi(t, \mathbf{x}) e^{-imt} + \psi^*(t, \mathbf{x}) e^{imt}) \quad (3.12)$$

として、非相対論的な波動関数  $\psi$  を導入する。この  $\psi$  はコヒーレント状態で存在する FDM の巨視的な波動関数を表す。波動関数  $\psi$  は FDM の一つ一つの粒子を表すわけではないことに注意する。ここで、 $\phi, \psi$  の規格化条件から質量次元がそれぞれ  $[\phi] = 1, [\psi] = \frac{3}{2}$  であるため、規格化因子に質量が含まれている。また、 $e^{\pm imt}$  は静止質量エネルギーを取り除いたことに対応し、右辺第 1 項の波動関数  $\psi$  は粒子、右辺第 2 項の  $\psi^*$  は反粒子を表す。これを式 3.11 に代入する。今非相対論的極限を考えているので、静止質量エネルギーが運動エネルギーより大きく、 $i\partial/\partial t \ll m$  という関係性を満たすことに注意すると、

$$i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{3}{2} H \psi \right) = \left( -\frac{1}{2ma^2} \nabla^2 + m\Phi \right) \psi \quad (3.13)$$

となる。さらに、Poisson 方程式 (式 3.9) は FDM の自己重力によるポテンシャルでかけるので、

$$\Delta\Phi(t, \boldsymbol{x}) = 4\pi G a^2 m (|\psi(t, \boldsymbol{x})|^2 - |\bar{\psi}(t)|^2) \quad (3.14)$$

となる。ただし、 $\bar{\psi}(t)$  は空間平均を取った波動関数である。式 3.14 は、弱重力場における計量 (式 3.7) とスカラー場  $\phi$  の作用 (式 3.2) を用いて Einstein 方程式の 00 成分に代入し、非相対論的極限を取ることによって得られる。

これらの方程式を、Schrödinger-Poisson(SP) 方程式と呼び、FDM の基礎方程式となっている。この方程式は、量子力学の基礎方程式である Schrödinger 方程式に似ているが、自己重力系となっているため非線形方程式となっている。最後に、ここで用いた重力ポテンシャルや波動関数は、共動座標から見た時の (comoving な物理量ではなく) physical な物理量であることに再度注意しておく。

### 3.1.2 流体描像

SP 方程式は流体方程式に変形することができ、FDM は古典的な流体として振る舞うことが分かる。以下で、FDM の流体描像について見ていく。

コヒーレント状態を表す FDM の巨視的波動関数  $\psi$  は、

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{\rho(t, \boldsymbol{x})}{m}} e^{i\theta(t, \boldsymbol{x})} \quad (3.15)$$

と書ける。ここで、 $\rho/m$  は数密度を表し、波動関数の 2 乗を空間全体で積分することでコヒーレント状態になっている FDM 粒子数が得られる。また、流体の速度は位相項から、

$$\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{am} \nabla\theta(t, \boldsymbol{x}) \quad (3.16)$$

と定義できる。この時、 $\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$  より渦なし流体を表す。

これを SP 方程式 (式 3.13) に代入して、実部・虚部それぞれについて整理する。虚部からは、膨張宇宙における流れの保存の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad (3.17)$$

が得られる。実部からは、両辺に  $\nabla$  を作用させてから整理することで、Euler 方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + H\boldsymbol{v} + \frac{1}{a}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{a}\nabla\Phi + \frac{1}{2m^2a^3}\nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (3.18)$$

が得られる。ここで、Euler 方程式の右辺第 2 項には通常の CDM の場合には存在しない、量子力学の不確定性関係に由来した量子圧力項が現れることが分かる。自然単位系から戻して量子圧力  $Q$  を書くと、

$$Q \equiv \frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = \frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{\nabla^2 \rho}{2\rho} - \frac{(\nabla \rho)^2}{4\rho^2} \right) \quad (3.19)$$

である。この量子圧力項の存在によって構造形成が抑制される (3.2.1 節参照)。このように、流体方程式の形で SP 方程式を記述することを Madelung 形式 (Madelung 方程式) と呼ぶ。

ここまで、SP 方程式から Madelung 方程式に書き換えてきたが、これらは 2 つの方程式系は完全には等価ではない。式 3.15 を見ると、密度が 0 となる場所では速度が定義できないこと分かる。同様に、量子圧力も密度が 0 となる場所では ill-defined なことも分かる。さらに上述したように、密度が 0 でないところは Madelung 形式で渦なし場で表されるが、密度が 0 の場所周りでは渦が存在し得る。従って、渦場の中で密度が 0 の領域がトポロジカル欠陥となり、その挙動が近年研究されている (Hui et al. 2021)。Madelung 形式と SP 方程式を完全に等価なものにするためには、さらに量子化条件  $\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi j$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) を課す必要がある (Wallstrom 1994)。

### 3.1.3 静止座標を用いた SP 方程式からの変換則

3.1.1 節では、膨張宇宙を考え共動座標を用いて SP 方程式を導出した。しかしこの方程式は、静止宇宙における静止座標系を用いた SP 方程式から座標変換することでも簡単に導出できる。本節では、共動座標から見た (physical な) 物理量を  $\psi_x, \Phi_x, \nabla_x$  などと表し、静止座標から見た物理量を  $\psi_r, \Phi_r, \nabla_r$  などと表し、これを具体的に確認していく。

静止宇宙における SP 方程式は、静止座標  $(t, \mathbf{r})$  を用いて Minkowski 時空を考えることで、

$$i \frac{\partial \psi_r}{\partial t} = \left( -\frac{1}{2m^2} \nabla_r^2 + m\Phi_r \right) \psi_r \quad (3.20)$$

と得られる。これは、3.1.1 節と全く同じ計算で導出できる。また、Poisson 方程式は

$$\nabla_r^2 \Phi_r = 4\pi G m |\psi_r|^2 \quad (3.21)$$

で与えられる。

共動座標  $\mathbf{x}$  と静止座標  $\mathbf{r}$  は、スケール因子  $a(t)$  を用いて、 $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$  の関係式を満たす。まず、静止座標で速度  $\mathbf{v}_r$  で動いている物質を共動座標系から見た時の速度  $\mathbf{v}_x$  を考える。ここでは、流体を Euler の方法で表現する。つまり、空間変数と時間変数は全て独立であり、速度はラグランジュ微分

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.22)$$

を用いて、

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \quad (3.23)$$

で与えられることに注意する。関係式  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$  にラグランジュ微分を作用させて、

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{x}}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{a} \right) \\ &= \mathbf{r} \left( -\frac{\dot{a}}{a^2} \right) + \frac{1}{a} \mathbf{v}_r \end{aligned} \quad (3.24)$$

を得る。ここで、 $\dot{a}$  はスケール因子を時間で偏微分したものを表す。この式を書き換えると、

$$\mathbf{v}_r = a \frac{D\mathbf{x}}{Dt} + \dot{a}\mathbf{x} \quad (3.25)$$

となる。右辺第2項は、共動座標で静止している物質が静止座標から見たときに運動して見える効果を表しているので、共動座標から見た速度  $\mathbf{v}_x$  は右辺第1項に対応する。従って、速度場の変換則は、

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_x + \dot{a}\mathbf{x} \quad (3.26)$$

とすれば良いことが分かる。また、 $(t_r, \mathbf{r}) \rightarrow (t_x, \mathbf{x})$  の座標変換に伴って、偏微分も変換される。ここで、 $t_r = t_r(t_x, \mathbf{x}) = t_x$ ,  $t_x = t_x(t_r, \mathbf{r}) = t_r$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_x, \mathbf{x}) = a(t_x)\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_r, \mathbf{r}) = \mathbf{r}/a(t_r)$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t_r} \right)_r &= \left( \frac{\partial t_x}{\partial t_r} \right)_r \left( \frac{\partial}{\partial t_x} \right)_x + \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t_r} \right)_r \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_x} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t_x} \right)_x - H\mathbf{x} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_x} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)_{t_r} &= \left( \frac{\partial t_x}{\partial \mathbf{r}} \right)_{t_r} \left( \frac{\partial}{\partial t_x} \right)_x + \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \right)_{t_r} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_x} \\ &= \frac{1}{a(t_x)} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t_x} \end{aligned} \quad (3.28)$$

という変換をすれば良いことが分かる。

次に重力ポテンシャルの変換を見る。静止座標と共動座標は原点以外で互いに加速度運動しているため、宇宙膨張に合わせて運動する物質は共動座標系では力を受けないが、静止座標系から見ると見かけの力が働く。速度場の変換則をさらにもう1回ラグランジュ微分し、同様の考察をすると、

$$\Phi_x = \Phi_r + \frac{1}{2} a \ddot{a} |\mathbf{x}|^2 \quad (3.29)$$

と変換すれば良いことが分かる。

最後に波動関数の変換を見る。波動関数  $\psi$  を式 3.15, 3.16 の形で表したときに、密度は変換する必要がない。一方、式 3.26 によって速度の変換則が与えられているので、それに従うように波動関数の位相部分の変換則を与える必要がある。その結果、

$$\theta_r(t, \mathbf{r}) = \theta_x(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2}ma\dot{a}|\mathbf{x}|^2 \quad (3.30)$$

という変換をすれば良いことが分かる。つまり、波動関数の変換は、

$$\psi_r(t, \mathbf{r}) = \psi_x(t, \mathbf{x}) e^{-\frac{i}{2}ma\dot{a}|\mathbf{x}|^2} \quad (3.31)$$

とすれば良いことが分かる。この時、上述したように密度  $\rho = m|\psi|^2$  は一定に保たれている。

非相対論的物質が支配的な宇宙において、空間平均した密度  $\bar{\rho}$  は、フリードマン方程式から、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho} \quad (3.32)$$

を満たす。以上の変換則および関係式を用いると、静止宇宙における静止座標系を用いた SP 方程式 (式 3.20, 3.21) から、膨張宇宙における共動座標系を用いた SP 方程式 (式 3.13, 3.14) に変換されることが確認できる。

## 3.2 FDM の構造形成

3.1 節では、FDM の支配方程式について述べた。この支配方程式から我々は宇宙の構造形成の様子を知ることができる。3.2.1 節では、線形領域における構造形成の様子を解析的に見る。次に 3.2.2 節では、非線形領域の構造、特に FDM ハローの構造について、FDM シミュレーションから明らかにされていることをレビューする。

### 3.2.1 線形領域の構造形成

ここでは、3.1.2 節で導いた流体方程式を用いて線形領域における構造形成の様子を見る。そのために式 3.10 を用いて、 $\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$  として、密度揺らぎ  $\delta$  の方程式に書き換える。今は線形領域に注目するので、 $\delta, \mathbf{v}, \Phi \ll 1$  として微少量の 2 次以上の項は無視する。式 3.17, 3.18 に代入すると、流れの保存の式は、

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.33)$$

となり、Euler 方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{v} = -\frac{1}{a}\nabla\Phi + \frac{1}{4m^2a^3}\nabla^3\delta \quad (3.34)$$

となる。さらに、 $(\partial/\partial t + 2H) \times$  (式 3.33)  $- a^{-1}\nabla \cdot$  (式 3.34) を計算すると、揺らぎの方程式

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial \delta}{\partial t} + \left( \frac{1}{4m^2a^4}\nabla^4 - 4\pi G\bar{\rho} \right) \delta = 0 \quad (3.35)$$

が得られる。密度揺らぎ  $\delta(t, \mathbf{x})$  を空間成分についてフーリエ変換したものを、 $\tilde{\delta}(t, \mathbf{k})$  とすると、

$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} + \left( \frac{k^4}{4m^2a^4} - 4\pi G\bar{\rho} \right) \tilde{\delta} = 0 \quad (3.36)$$

を満たす。FDM モデル特有の量子圧力項は、この方程式の第 3 項に現れている。この第 3 項は、CDM モデルの構造形成における音速に対応しているとも解釈でき、この時の音速  $c_s$  は

$$c_s^2 = \frac{k^2}{4m^2a^2} \quad (3.37)$$

となり、波数に依存した形となる。

この揺らぎの方程式から、ジーンズ長  $k_J$  が得られる。つまり、揺らぎの方程式の第 3 項と第 4 項が等しくなるような波数で、

$$\begin{aligned} k_J &= (16\pi Gm^2\bar{\rho}a^4)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left( 16\pi Gm^2 \cdot \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_{m0} \right)^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{4}} \\ &\simeq 70 a^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\Omega_{m0}}{0.3} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{H_0}{70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{m}{10^{-22} \text{ eV}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ Mpc}^{-1} \end{aligned} \quad (3.38)$$

と得られる。これに対応するジーンズ質量  $M_J$  は、

$$M_J = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho} \left( \frac{\pi}{k_J} \right)^3 \simeq 10^7 a^{-\frac{3}{4}} \left( \frac{\Omega_{m0}}{0.3} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{m}{10^{-22} \text{ eV}} \right)^{-\frac{3}{2}} M_\odot \quad (3.39)$$

である (Mina et al. 2020)。揺らぎの発展方程式 (式 3.36) は、摩擦を受けながらポテンシャル中

を運動する粒子と等価である。このときのポテンシャル  $V(\tilde{\delta})$  は、

$$V(\tilde{\delta}) = \frac{1}{2} \left( \frac{k^4}{4m^2 a^4} - 4\pi G \bar{\rho} \right) \tilde{\delta}^2 \quad (3.40)$$

である。ジーンズ長より小さいスケール、つまり  $k > k_J$  のとき、ポテンシャルは下に凸になるため、宇宙膨張と共に密度揺らぎは振動しながら 0 に近づいていく。ただし宇宙膨張を無視できるような時間スケールで考えると、摩擦項がないため単に振動するだけとなり、減衰は見られないことに注意する。一方、ジーンズ長より大きいスケール、つまり  $k < k_J$  のとき、ポテンシャルは上に凸になるため、時間と共に密度揺らぎはますます大きくなっていく。また、この場合量子圧力項を無視できることになるので、従う方程式は CDM の場合と同じになる。

以上より、FDM モデルによる線形領域の構造形成の様子は、大きいスケールでは CDM と同じ構造形成を行うのに対し、小スケールでは量子圧力項の存在により揺らぎが減衰され、構造形成の抑制に繋がることが分かった。このことから、FDM はミッシング・サテライト問題等の小スケール問題を解決できる可能性が示唆されている。

### 3.2.2 FDM ハロー

FDM シミュレーションによって、非線形領域の構造形成の様子が明らかにされてきた (e.g. [Schive et al. 2014b](#))。それによると、FDM ハローは 2 つの大きな特徴があることが分かった (図 3.1)。1 つ目の特徴は、FDM ハローの中心にソリトンコアと呼ばれるコア状の密度プロファイルができることである。これにより、コア・カスプ問題が解決できる可能性が示唆されている。このソリトンコアは、巨視的な粒子数の FDM が最低エネルギー状態、つまりボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) 状態となっていることに由来する構造である。2 つ目の特徴は、FDM ハロー内にドロイ波長程度の大きさの粒状構造が無数に存在することである。これは、コヒーレント状態にある波動関数の干渉縞に対応する構造で、FDM の波動性が宇宙論スケールで現れていることが分かる。無数に存在する粒状構造を粗視化して FDM ハローの密度プロファイルを求めると、中心はソリトンコア、その外側は NFW-like プロファイル ([Navarro et al. 1997](#)) となっている (図 3.2)。ここで、NFW-like プロファイルと表現しているのは、微視的に見ると粒状構造が無数に存在し、空間的に細かく振動しているようなプロファイルとなっているためである。以下では、FDM-only シミュレーション ([Schive et al. 2014a,b](#)) によって明らかになった事実を中心にレビューする。

ソリトンコアは BEC 状態で存在する構造であるため、SP 方程式の基底状態解を用いて表される。SP 方程式は非線形方程式であり、基底状態の解析解は存在しない。しかし経験的に、ソリトンコアは

$$\rho_{\text{sol}}(r) = \frac{1.9(m/10^{-23} \text{ eV})^{-2}(r_c/\text{kpc})^{-4}}{\{1 + 0.091(r/r_c)^2\}^8} M_{\odot} \text{ pc}^{-3} \quad (3.41)$$

に従うことが分かっている。ここで、 $r_c$  はソリトンコア半径と呼び、中心密度からおおよそ半分にした半径で定義される。ソリトンコアの形状を決めるパラメータは 1 パラメータのみで、式 3.41 を見ると、ソリトンコア半径  $r_c$  のみで決まることが分かる。この経験式から分かるように、SP 方

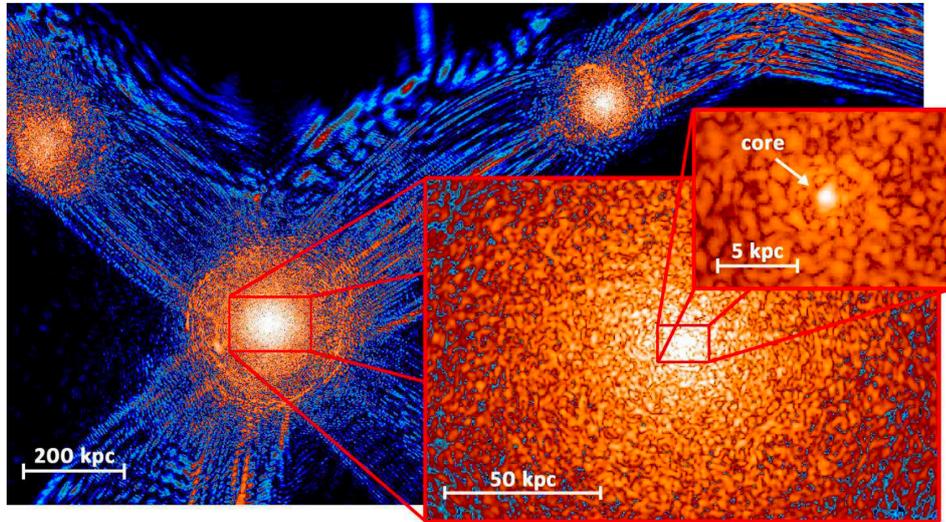


図 3.1: 宇宙論的 FDM シミュレーションから得られた FDM ハローの様子 (Schive et al. 2014b)。FDM ハローは無数の粒状構造の集まりで構成されており、中心にはソリトンコアが存在することが分かる。

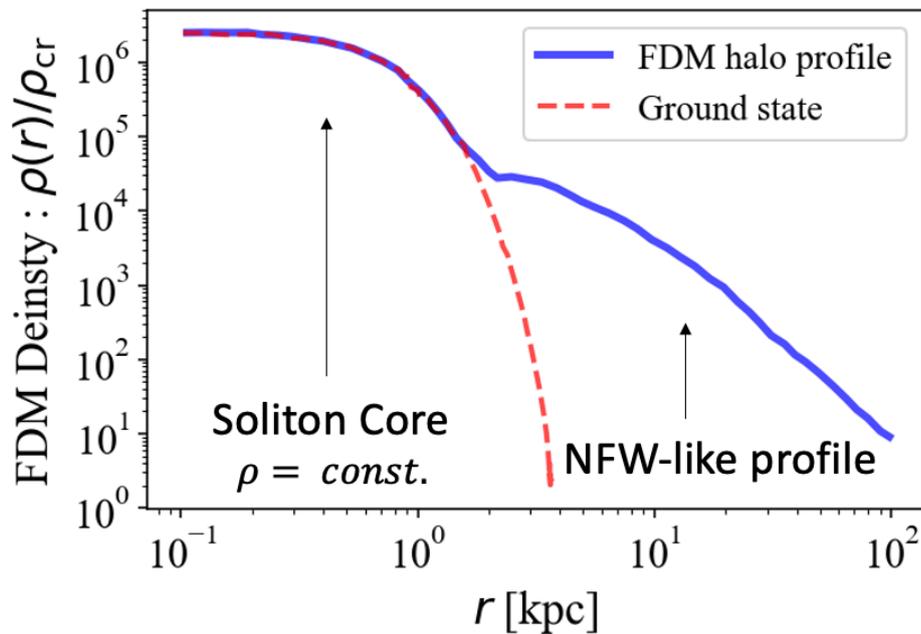


図 3.2: FDM ハローの密度分布の様子。Schive et al. (2014b) をもとに作成。中心付近はソリトンコア、外側は NFW-like プロファイルになる。また、ソリトンコアは SP 方程式の基底状態解で記述できることが分かる。

程式の基底状態解から求めた密度分布は  $r < r_c$  では、密度は一定（コア状）で、その外側では急激に落ちる。また、ソリトンコアの赤方偏移依存性はコア半径  $r_c$  に含まれるため、この経験式にはスケール因子が現れていない。従ってソリトンコアの形状を求める際には、静止座標で書かれた SP 方程式を考えれば十分であることが分かる。

次に、静的球対称 SP 方程式のスケール不変性について見る。まず式 3.20, 式 3.21 に、 $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r)e^{-iEt}$  を代入することで、静的球対称 SP 方程式は、

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + m\Phi\psi \quad (3.42)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi Gm|\psi|^2 \quad (3.43)$$

となる。この方程式は、

$$(r, \psi, \Phi, E) \rightarrow (s^{-1}r, s^2\psi, s^2\Phi, s^2E) \quad (3.44)$$

の変換に対して不変である。これらが意味することは、 $r' = s^{-1}r$  とした時に、波動関数は  $\psi'(r') = s^2\psi(r)$  と変換するということである。このスケール不変の式から、さらにソリトンコアの密度や質量、エネルギーの変換性も求められ、

$$(r, \rho_{\text{sol}}, M, E_c) \rightarrow (s^{-1}r, s^4\rho_{\text{sol}}, sM, s^3E_c) \quad (3.45)$$

となる。ソリトンコアの経験的な密度プロファイルの関数形（式 3.41）を見ると、式 3.45 で表されるスケール変換性を満たした表式となっている。また、ソリトンコア質量  $M$  は 2通りの定義の仕方がある。1つ目は、コア半径  $r_c$  内の質量による定義の仕方、一般に  $M_c$ （コア質量）と表される。2つ目は、半径無限大まで積分して得られた質量で、一般に  $M_s$  で表される。これらを具体的に数値計算すると、

$$\begin{aligned} M_c &= 4\pi \int_0^{r_c} r^2 \rho_{\text{sol}}(r) dr \simeq 4\pi \cdot 0.2225 \rho_c r_c^3 \\ &\simeq 5.3124 \times 10^9 \left( \frac{m}{10^{-23} \text{ eV}} \right)^{-2} \left( \frac{r_c}{\text{kpc}} \right)^{-1} M_\odot \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} M_s &= 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho_{\text{sol}}(r) dr \simeq 4\pi \cdot 0.9296 \rho_c r_c^3 \\ &\simeq 2.1966 \times 10^{10} \left( \frac{m}{10^{-23} \text{ eV}} \right)^{-2} \left( \frac{r_c}{\text{kpc}} \right)^{-1} M_\odot \end{aligned} \quad (3.47)$$

となる (Nori and Baldi 2021)。ここで、 $\rho_c$  は中心密度を表す。これらの質量には 4 倍程度の違いがあるが、どちらの定義を用いても上のスケール変換性を満たす。また、ソリトンコアのエネルギー  $E_c$  は

$$E_c = 4\pi \int_0^\infty r^2 \left( \frac{|\nabla\psi|^2}{2m^2} + \frac{\Phi|\psi|^2}{2} \right) dr \quad (3.48)$$

で定義される (Bar et al. 2018)。第1項は運動エネルギー、第2項はポテンシャルエネルギーを表す。ここでは、重力ポテンシャルは  $\Phi(\infty) = 0$  となるように規格化されている。

既に述べてきたように、FDM ハローは内側のソリトンコアと外側の NFW-like プロファイルから構成される。宇宙論的 FDM シミュレーションから、境界半径  $r_t$  は、経験的にソリトンコア半径の3倍程度、つまり  $r_t \simeq 3r_c$  と知られている (Schive et al. 2014b)。FDM ハローの密度プロファイルは、境界半径においてソリトンコアと NFW-like プロファイルの密度が連続となるように繋がれる。つまり、

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_{\text{sol}}(r) & r < r_t \\ \rho_{\text{NFW}}(r) & r > r_t \end{cases} \quad (3.49)$$

となり、

$$\rho_{\text{sol}}(r_t) = \rho_{\text{NFW}}(r_t) \quad (3.50)$$

を満たすように、ソリトンコアと NFW プロファイルが繋がれる。また、宇宙論的 FDM シミュレーションおよびソリトンコア衝突シミュレーションから、コア質量  $M_c$  とハロー質量  $M_h$  は、

$$M_c = \frac{1}{4} a^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\zeta(z)}{\zeta(0)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{M_h}{M_0} \right)^{\frac{1}{3}} M_0 \quad (3.51)$$

という関係を満たすことが確かめられた。ここで、 $M_0 \simeq 4.4 \times 10^7 (m/10^{-22} \text{ eV})^{-3/2} M_\odot$  である。また、ハロー質量  $M_h$  はビリアル質量で、

$$M_h \equiv \frac{4}{3} \pi x_{\text{vir}}^3 \zeta(z) \rho_{m0} \quad (3.52)$$

と定義される (Bryan and Norman 1998)。ここで、 $\zeta(z) \equiv (18\pi^2 + 82(\Omega_m(z) - 1) - 39(\Omega_m(z) - 1)^2)/\Omega_m(z) \simeq 350(180)$  for  $z = 0(z > 1)$  であり、現在の平均物質密度の何倍でハローを定義するか決める関数となっている。式 3.51 をコア半径とハロー質量の関係に変換すると、

$$r_c = 1.6 \left( \frac{m}{10^{-22} \text{ eV}} \right)^{-1} a^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\zeta(z)}{\zeta(0)} \right)^{-\frac{1}{6}} \left( \frac{M_h}{10^9 M_\odot} \right)^{-\frac{1}{3}} \text{ kpc} \quad (3.53)$$

となる。従ってハロー質量が大きくなるほどコア半径が小さくなり、FDM 質量が大きいくほどコア半径が小さくなるのが分かる。また、ハロー内のダークマター粒子の速度分散を  $v = \sqrt{GM_h(<r)/r} \propto M_h^{1/3}$  と評価すると、コア半径のハロー質量依存性および FDM 質量依存性は、FDM のドブロイ波長 (式 3.1) と全く同じになるのが分かる。これを解釈し直すと、ハロー内のダークマター粒子の速度分散が与えられた時に、巨視的に不確定性関係を満たすようにコア半径が決まると考えられる (Schive et al. 2014a)。コア半径がドブロイ波長程度であることは、ソリトンコアがドブロイ波長程度の広がりを持った波動関数の基底状態で書けることと一致している。

ここでは、特に Schive et al. (2014a,b) によるシミュレーションから明らかになった、境界半径

の位置、コア半径・質量とハロー質量の関係についてレビューした。しかし、他の FDM シミュレーションではソリトンコアと NFW-like プロファイルは確認されているものの、境界半径やコア・ハロー質量関係が異なるような結果が確認されており、FDM ハローに分散があるのではないかと議論されている (Jowett Chan et al. 2021)。これらについては、4.2 節で詳しく述べる。

最後に FDM ハローの構造における直感的な理解を述べ、本節を締め括ることとする。既に述べてきたように、ドブロイ波長が非常に大きく波動関数の重なりが起きることから、巨視的な量の FDM がコヒーレント状態で存在する。コヒーレント状態の典型的なスケールはドブロイ波長程度であり、これを表す物理量が波動関数  $\psi$  であった。また、その支配方程式が SP 方程式であった。FDM ハローは、このドブロイ波長程度の広がりを持つコヒーレント状態が非常に多く集まったような系である。各コヒーレント状態は、近似的にドブロイ波長程度の大きさを持つ準粒子と捉えることができ、FDM ハローの力学的進化は準粒子同士の二体緩和により起きると考えられる。その結果、中心付近にはエネルギー的に最安定な BEC 状態の構造ができることになり、これがソリトンコアに対応する。実際、ソリトンコアは SP 方程式の基底状態解で表せる。各波動関数  $\psi$  は、ドブロイ波長程度の広がりを持っていたことを念頭におくと、ソリトンコアのサイズもドブロイ波長程度となることが理解できる。一方、中心付近以外にも FDM は多数存在し、コヒーレント状態にある波動関数が充満している。ただし、これらの波動関数は BEC 状態のみならず励起状態も含まれている。これらの波動関数は互いに重なり合うことにより干渉縞を作り、これが粒状構造の正体である。再度、波動関数がドブロイ波長程度の広がりを持つことに注意すると、干渉縞の間隔はドブロイ波長程度となる。従って、粒状構造の大きさはドブロイ波長程度で、FDM ハロー内全体に無数に存在していることが理解できる。以上のように、FDM ハローに特徴的なソリトンコアと粒状構造は、直感的にその存在が予想され、その性質はシミュレーションで明かされてきた事実と一致している。

### 3.3 観測からの FDM 質量制限

これまでに、様々な観測結果から FDM 質量の制限が得られてきた (Ferreira 2020, for review)。波数  $k \lesssim 10 \text{ Mpc}^{-1}$  の大きなスケールの観測からの制限として、CMB からの制限 (Hložek et al. 2018; Hložek et al. 2015) や、Lyman- $\alpha$  forests からの制限 (Armengaud et al. 2017; Iršič et al. 2017; Nori et al. 2019; Rogers and Peiris 2021) が挙げられる。Planck 衛星を用いた CMB の観測からは、質量が  $10^{-33} \text{ eV} \leq m \leq 10^{-24} \text{ eV}$  の FDM の存在が棄却されている。また、Lyman- $\alpha$  forest の観測からは最も厳しい制限のうちの一つとなっており、概ね  $m \gtrsim 2 \times 10^{-21} \text{ eV}$  (95%信頼度) という制限が得られている。ただし、Rogers and Peiris (2021) では  $m \gtrsim 2 \times 10^{-20} \text{ eV}$  (95%信頼度) という非常に厳しい制限が得られている。これらは、FDM モデルが大規模構造や銀河間物質の構造に与える影響に注目した制限であり、小スケール構造から直接得られたものではない。中性水素の 21 cm 線の観測を用いることで、波数  $k \gtrsim 10 \text{ Mpc}^{-1}$  の小スケール構造に到達することができる。実際、FDM 質量に  $m \gtrsim 5 \times 10^{-21} \text{ eV}$  程度の厳しい制限をかけられることが分かっている (Jones et al. 2021; Lidz and Hui 2018; Schneider 2018)。これら以外にも、様々な観測対象から FDM 質量に制限がかけられている。例えば、恒星ストリームからの制限 (Banik et al. 2021; Benito et al. 2020; Schutz 2020)、天の川銀河の NSC 星団を用いた制限 (Toguz et al. 2021)、天の

川銀河および M87 の中心に存在する超巨大ブラックホール (SgrA\*, M21) を用いた制限 (Davies and Mocz 2020)、矮小楕円体銀河からの制限 (Chen et al. 2017; González-Morales et al. 2017)、18 個の超低輝度銀河からの制限 (Hayashi et al. 2021)、天の川銀河の回転曲線からの制限 (Maleki et al. 2020) 等が得られている。

しかし、これら全ての制限は無矛盾ではなく、またこの中には小スケール問題の解決や現在のダークマター残存量から期待される FDM 質量  $m \simeq 10^{-22}$  eV 付近を除外するような制限も多く含まれている。しかし、これらの観測データから得られた制限では、バリオン物理を主な起源とする統計的な不確かさが含まれているため、さらに様々な手法により FDM 質量制限を追加検証することが求められる。

## 第4章 ソリトンコアと銀河の回転曲線の多様性

### 問題

#### 4.1 着眼点と本研究の流れ

本研究は、FDM モデルが小スケール問題の1つである銀河の回転曲線の多様性問題を解決できるかどうか注目して、研究を始めた。ここではまず、本研究の着想に至った2つの先行研究について述べる。1つ目は、SIDM モデルによる多様性問題の解決である (Kamada et al. 2017)。彼らは、観測から得られているバリオンプロファイルに対して、SIDM ハローの理論モデルを用いて SIDM プロファイル計算し、実際の回転曲線と比較した。その結果、実際の回転曲線と非常によく合うことを示した。SIDM ハローは中心付近に等温密度プロファイルで表されるコアができ (2.3.2 節参照)、この等温密度プロファイルはポテンシャル項にあらわに依存していることから、バリオン応答性が大きいという特徴を持つ。このバリオン応答性の大きさが多様性問題の解決に繋がったと考えられる。

2つ目は、近年開発されたバリオン物理を考慮した FDM シミュレーション結果である (Veltmaat et al. 2020)。このシミュレーションは、従来の FDM-only シミュレーションとは異なり、H, H<sup>+</sup>, He, He<sup>+</sup>, He<sup>++</sup> のレート方程式を解く非平衡冷却と、太陽系の存在量を仮定した金属の平衡冷却過程を含み、さらに星形成の効果を考慮したものとなっている。得られた FDM ハロープロファイルは FDM-only の場合と同様に、中心付近はソリトンコア、外側は NFW プロファイルであることが分かった。しかし、ソリトンコアは FDM-only の場合に比べて、密度が大きく上がることが分かった。つまり、ソリトンコアはバリオン応答性が大きいことが示唆された。また、このソリトンコアは、バリオン分布を外場として加えた SP 方程式の基底状態解を用いて表されることも分かった。

以上の2つの研究から、FDM ハローもバリオン応答性が大きいことが期待され、また与えられたバリオンプロファイルに対して、バリオン分布を外場とした SP 方程式を解くことによって、FDM プロファイルを計算することができることが分かった。本研究では、これらの研究結果を元に以下のステップで、FDM モデルが銀河の回転曲線の多様性問題を解決できるのかを調べる。

まず、FDM ハローの密度プロファイルに関する理論モデルを構築する。そのために、まず FDM-only ハローに注目し、その構造を力学的考察に基づいて理解する。既に 3.2.2 節で述べたように、FDM ハローはソリトンコアと NFW プロファイルの繋ぎ合わせによって構成されることは明らかにされているが、ソリトンコアと NFW プロファイルの境界半径や、コア・ハロー質量の対応関係は、シミュレーションごとに異なる結果が得られている。この点に注意して、我々は FDM ハローモデルを構築した。次に、様々なバリオン分布を外場として SP 方程式を解き、上で構成した

FDM ハロープロファイルに関する理論モデルに基づき、バリオン分布が与えられた時の FDM ハローの密度プロファイルを求める。最後に、回転曲線を比較し、多様性問題が解決できるかを考察する。我々は、FDM-only ハローのモデル構築まで研究を進めた。本章ではその研究成果について述べ、残りは今後の研究課題とする。

## 4.2 FDM-only ハローに関する理解

FDM-only ハローは、中心付近は SP 方程式の基底状態解を用いて表されるソリトンコア、その外側は CDM の場合と同様の NFW-like プロファイルで構成される。ソリトンコアの形状を決めるパラメータは1つだけであり、例えばコア質量  $M_c$  や、コア半径  $r_c$  などを決めれば一意に決まる。ここで、NFW-like プロファイルと呼ぶ理由は、FDM ハローの場合粒状構造がハロー内に多数あり、租視化して初めて NFW プロファイルになるためである。NFW-like プロファイルを決定するパラメータは、主に2つである。その2パラメータの選び方として、ハロー質量  $M_h$  と質量集中度  $c$  と取ることができる。質量集中度  $c$  とハロー質量  $M_h$  は対応関係が知られているので、実質ハロー質量  $M_h$  の1パラメータで NFW-like プロファイルを決定できる。この節では、このソリトンコアと NFW-like プロファイルの接続条件、もしくはソリトンコアとハロー質量の関係に注目して、先行研究の内容をレビューする。

3.2.2 節で述べたように、FDM シミュレーションから境界半径  $r_t$  は、コア半径  $r_c$  の3倍程度で、密度分布が滑らかになるように2つのプロファイルが繋がれる (Schive et al. 2014b)。つまり、あるソリトンコアに対して、コア半径の3倍程度の境界半径で密度連続性を満たすように NFW-like プロファイルに繋がるという描像である。しかし力学的考察の観点から、ハロー質量  $M_h$  を与えた時のソリトンコア半径  $r_c$  の決め方を探る試みも行われている。代表的には、以下の2通りが考えられている。

1つ目は重力と量子圧力が釣り合い、静水圧平衡となるような半径を用いた定義である (Li et al. 2021)。これは、コア半径より内側では量子圧力項が支配的で、それより外側では重力相互作用が支配的であるという考察に基づいた定義の仕方である。この時、Euler 方程式 (式 3.18) の右辺の釣り合いから、コア半径  $r_c$  とコア質量  $M_c$  の関係は、

$$\frac{GM_c}{r_c} \simeq \frac{\hbar^2}{m^2 r_c^2} \quad \text{または} \quad r_c \simeq \frac{\hbar^2}{m^2 GM_c} \quad (4.1)$$

を満たす。ハロー質量に対するコア半径は、質量連続性を課すことで求められる。つまり、ソリトンコアと NFW-like プロファイルのコア半径以内の内包質量が同一という条件を課して、ハロー質量  $M_h$  を与えた時のコア半径  $r_c$  は、

$$r_c \simeq \frac{\hbar^2}{m^2 GM_h(< r_c)} \quad (4.2)$$

を解くことで決められる。

2つ目は、緩和時間を用いた決め方である (Hui et al. 2017)。平衡状態にある孤立した CDM 系は、二体緩和によってのみ進化し、その時間スケールは対数因子を無視すると、 $t_{\text{relax}} \simeq 0.1 t_{\text{cr}}(M/m)$  で書ける (Binney and Tremaine 1987)。ここで、 $t_{\text{cr}} \simeq r/v$  は交差時間であり、 $M, m$  はそれぞれハロー質量および CDM 質量を表し、 $M/m$  で粒子数を表す。FDM ハローの場合、基底状態以外の全ての状態は不安定であるため、確率密度をハローの外側に流出させ全質量・エネルギーを落とすことで系が発展していく (重力冷却, Schwabe et al. 2016)。実際、FDM シミュレーションからハローの外側に干渉縞が確認されており、この重力冷却が起きている証拠であると考えられる。また、これはドブロイ波長を  $\lambda = h/(mv)$  とした時に、 $(r/\lambda)^3$  個程度の準粒子がハロー内に存在し、準粒子同士の二体緩和により系が発展していく、とも解釈できる (3.2.2 節)。局所密度を  $\rho$  とすると、各準粒子は有効質量  $m_{\text{eff}} \simeq \rho(\lambda/2)^3$  を持つ。CDM ハローの計算を利用すると、FDM ハローにおける緩和時間は  $t_{\text{relax}} \simeq 0.1 t_{\text{cr}} M/m_{\text{eff}}$  となる。ここで、 $M \simeq \frac{4}{3}\pi\rho r^3$  は半径  $r$  の内部のハロー質量である。そうすると、半径  $r$  における緩和時間は、

$$t_{\text{relax}}(r) \simeq \frac{0.4}{f_{\text{relax}}} \frac{m^3 v^2 r^4}{\pi^3 \hbar^3} \simeq \frac{10^{10} \text{ yr}}{f_{\text{relax}}} \left( \frac{v}{100 \text{ km/s}} \right)^2 \left( \frac{r}{5 \text{ kpc}} \right)^4 \left( \frac{m}{10^{-22} \text{ eV}} \right)^3 \quad (4.3)$$

と計算できる。ここで、 $f_{\text{relax}} \lesssim 1$  は無次元定数であり、より詳細な議論により決めるべき値である。しかしここでは簡単のため、 $f_{\text{relax}} = 1$  として扱う。コア半径は、この緩和時間を用いることで、

$$t_{\text{relax}}(r_c) = t_{\text{age}} \quad (4.4)$$

を満たすように決める。ここで、 $t_{\text{age}}$  はハロー年齢を表す。質量連続性を課すとハロー質量を決めた時、NFW-like プロファイルから速度  $v$  が半径  $r$  の関数として表されるため、ハロー質量からコア半径を決める式となっている。

以上のように、ハロー質量からコア半径を力学的考察に基づいて決めることが提案されている。ただ、実際にソリトンコアと NFW-like プロファイルを繋ぐ際には、境界半径  $r_t$  は、ハロー質量から決めたコア半径  $r_c$  と一致する必要はない。そこで、上記で定義されたコア半径を利用して境界半径を定義し、再び質量連続性を課すことにより、ハロー質量からコア質量を決定する。つまり、 $\mathcal{O}(1)$  程度の定数  $p_1$  を用いて、

$$r_t = p_1 r_c \quad (4.5)$$

と定め、境界半径  $r_t$  内でのコア質量が、NFW-like プロファイルの  $r_t$  内での内包質量に一致するようにソリトンコアを決めれば良いと考えられている。

ここまでで、ハロー質量を与えた時のコア質量の決定の仕方、つまりコア・ハローの質量関係を力学的考察に基づいて述べてきた。次に様々な FDM シミュレーションから知られているコア・ハロー質量関係について述べる。3.2.2 節で述べたように、当初の FDM シミュレーション (Schive et al. 2014a) によると、

$$a^{\frac{1}{2}} M_c = \frac{1}{4} \left( \frac{\zeta(z)}{\zeta(0)} \right)^{\frac{1}{6}} \left( \frac{M_h}{M_0} \right)^{\frac{1}{3}} M_0 \quad (4.6)$$

となることが知られている。つまり、コア・ハロー質量関係を  $M_c \propto M_h^\alpha$  とすると、 $\alpha = 1/3$  となる

ことが知られている。ただし、このシミュレーションで得られたハロー質量は、主に  $10^9 - 10^{11} M_\odot$  の範囲に限られている。その後、様々な手法によりシミュレーションが行われてきたが、コア・ハロー質量関係が異なる結果が得られている。例えば、Mocz et al. (2017) では  $\alpha = 5/9$ 、Jowett Chan et al. (2021) では、 $\alpha = 0.9$  となっている。このコア・ハロー質量関係の分散に関しては、Jowett Chan et al. (2021) で調べられており、シミュレーションのサイズの違いによる潮汐現象の効果等が原因の一つと述べられている。現時点で最も大きな FDM シミュレーションは、May and Springel (2021) であり、様々な種類のハローを含んだシミュレーションになっていることが確かめられている。Jowett Chan et al. (2021) では、これらを踏まえて FDM ハローのコア・ハロー質量関係には分散が存在し、

$$a^{\frac{1}{2}} M_c = \beta \left( \frac{m}{8 \times 10^{-23} \text{ eV}} \right)^{-\frac{3}{2}} + \left( \sqrt{\frac{\zeta(z)}{\zeta(0)} \frac{M_h}{\gamma}} \right)^\delta \left( \frac{m}{8 \times 10^{-23} \text{ eV}} \right)^{\frac{3}{2}(\delta-1)} M_\odot \quad (4.7)$$

で与えられると結論づけられた。ベストフィットパラメータは、 $\beta = 8.0^{+0.5}_{-6.0} \times 10^6 M_\odot$ ,  $\log_{10}(\gamma/M_\odot) = -5.73^{+2.29}_{-8.38}$ ,  $\delta = 0.515^{+0.111}_{-0.189}$  である。

以上より、FDM ハローのコア・ハロー質量関係には分散があること、密度プロファイルの構成方法に関して主に 2 通りの理論モデルがあることを述べてきた。しかし、この理論モデルはどちらが妥当か、またこの分散関係の由来については理論的に十分な研究をなされていない。そこで我々は本研究で、特に May and Springel (2021); Schive et al. (2014b) のシミュレーションデータを用いて、2つの理論モデルとの比較を行い、上の質問に対する答えを得た。また以下では2つの理論モデルを順に、静水圧平衡モデル、緩和時間モデルと呼ぶことにする。

### 4.3 手法

ここでは、本研究に必要となる数値計算、解析手法についてまとめる。まず 4.3.1 節では、SP 方程式の数値計算手法について述べる。我々は、SP 方程式を解くにあたって、まず方程式を無次元化した。無次元方程式から求めた解の次元を戻すための変換則を 4.3.2 節で述べる。また、FDM ハローのソリトンコアと NFW プロファイルの対応関係に関する理論モデルを作るにあたって、我々はコア・ハロー質量関係に注目した。従って、FDM シミュレーションに関する先行研究で与えられている密度プロファイルからそれらの質量を求める必要がある。我々は、回転曲線を用いてフィッティングを行った。これについて 4.3.3 節で述べる。

## 4.3.1 SP 方程式の数値計算

宇宙膨張の効果を無視した有次元 SP 方程式を解く。全ての物理量を physical な物理量で表すと、SP 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + m\Phi\psi \quad (4.8)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G (m|\psi|^2 + \rho_b) \quad (4.9)$$

となる。ここで、 $\rho_b$  はバリオン密度であり、FDM-only の場合には無視することができる。ここでは定常で球対称な解を考える。つまり、 $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r)e^{-iEt}$  を代入して、

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + m\Phi\psi \quad (4.10)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G (m\psi^2 + \rho_b) \quad (4.11)$$

を得る。ここで、 $\psi$  は一般性を失うことなく実数にとれることを用いた (Moroz et al. 1998)。また、ラプラシアンは、

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \quad (4.12)$$

である。数値計算の際には、無次元化した SP 方程式を解きたいので、

$$r \rightarrow r' = \frac{\sqrt{2}r}{G^{-1}m^{-3}\hbar^2} \quad (4.13)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \frac{\sqrt{2\pi}\psi}{G^{\frac{3}{2}}m^{\frac{9}{2}}\hbar^{-3}} \quad (4.14)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \frac{\Phi}{G^2m^4\hbar^{-2}} \quad (4.15)$$

$$E \rightarrow E' = \frac{E}{G^2m^5\hbar^{-2}} \quad (4.16)$$

$$\rho \rightarrow \rho' = \frac{2\pi\rho}{G^3m^{10}\hbar^{-6}} \quad (4.17)$$

と変数変換を行い、無次元量を作る。これらを代入することで、無次元 SP 方程式、

$$E'\psi' = -\nabla'^2\psi' + \Phi'\psi' \quad (4.18)$$

$$\nabla'^2\Phi' = \psi'^2 + \rho'_b \quad (4.19)$$

を得る。さらに、これを式変換して、

$$\frac{d^2}{dr'^2}(r'\psi') = -r'\psi'U' \quad (4.20)$$

$$\frac{d^2}{dr'^2}(r'U') = -r'(\psi'^2 + \rho'_b) \quad (4.21)$$

とできる。ここで、

$$U' = E' - \Phi' \quad (4.22)$$

と定義した。我々が興味ある解は、任意の  $r$  で  $\psi, U$  が発散しないような解である。境界条件として

$$\psi'(\infty) = \Phi'(\infty) = 0 \quad (4.23)$$

$$\left. \frac{d\psi'}{dr'} \right|_{r'=0} = \left. \frac{d\Phi'}{dr'} \right|_{r'=0} = 0 \quad (4.24)$$

を課すと、実際に発散しないような解が得られた。従って、以下ではこの境界条件の元で数値計算を行う。

数値計算の際には  $U'$  の  $r' = 0$  での初期値を  $U'_0 = 1$  と固定して、 $\psi'$  の初期値  $\psi'_0$  を変えていった。そして、十分大きい  $r' = r'_{\max}$  で波動関数が 0 に収束するような  $\psi'_0$  をシューティング法により探した。微分方程式の逐次積分は、刻み幅を  $dr' = 0.001$  とし、最初の 1 ステップ以後は 4 次 Runge-Kutta 法を用いた。初期値の変化させた時の無限大での関数  $\psi'$  の挙動は解析的・数値的に調べられている (Moroz et al. 1998)。SP 方程式の基底状態解を与える  $\psi'$  の初期値を  $\psi'_{0,\text{GS}}$  とすると、 $\psi'_0 > \psi'_{0,\text{GS}}$  の場合は  $\psi'$  は  $r'$  が十分大きな値で正の無限大に発散する。初期値を下げていき、 $\psi'_0 < \psi'_{0,\text{GS}}$  となると、一度は負の無限大に発散する。さらに下げていくと、ノードを 1 つ持つ第 1 励起状態を得ることができる。そしてさらに計算精度を上げて初期値を下げていけば、ノードを  $n$  個持つ第  $n$  励起状態を求めることができる。この性質を利用し、シューティング法を用いることで、 $\psi'_0$  を大きい値から徐々に下げていき、 $r_{\max}$  で 0 に収束するような  $\psi'_{0,\text{GS}}$  を求めた。我々は、 $r_{\max} = 20$  として基底状態解を求めたところ、 $\psi_{0,\text{GS}} = 1.0886371142973073$  が得られ、Moroz et al. (1998) の結果と小数点 6 桁まで一致し、十分な精度の解を求められた。

また、 $U'_0 = 1$  と固定したのは数値計算の際の解のスケールを決めたことに対応するため、 $U'_0$  を他の任意の値にしてもそれに対応した解が存在する。ここでは、SP 方程式の持つスケール不変性と解のスケールの固定の関係について明確にしておく。FDM-only の SP 方程式の解は、 $(r', \psi', U', \rho', M') \mapsto (s^{-1}r', s^2\psi', s^2U', s^4\rho', sM')$  の変換に対して、不変である。一方で、任意のバリオン分布に対して、このスケール不変性は成り立たない。これが意味することは、FDM-only の場合には、例えば  $U'_0 = 1$  と固定して得られた解から  $U'_0 = 10$  として得られる解を  $s = \sqrt{10}$  としてスケール変換の公式によって得ることができる一方で、バリオン分布を入れた場合は、 $U'_0 = 1$  で得られた解を  $s = \sqrt{10}$  としてスケール変換しても、 $U'_0 = 10$  の解とはならないということである。これは以下の式を見るとすぐに分かる。スケール変換後のパラメータを  $r'', \psi'', U''$  などと表

すことにすると、式 4.18 および式 4.19 は、

$$E''\psi'' = -\nabla''^2\psi'' + \Phi''\psi'' \quad (4.25)$$

$$\nabla''^2\Phi'' = \psi''^2 + s^{-4}\rho'_b \quad (4.26)$$

となる。従って、 $\rho''_b(r'') = s^4\rho'_b(r')$  を満たさない限り方程式が変わることになる。例えば、以下の Hernquist プロファイル

$$\rho_b(r') = \frac{\rho_a}{\frac{r'}{a} \left(1 + \frac{r'}{a}\right)^3} \quad (4.27)$$

を考えると、明らかにこれを満たさない。従って、一般のバリオン密度プロファイルを加えるとスケール不変性は成り立たず、別々の  $U'_0$  で得られた解は互いに独立となっている。

### 4.3.2 解の有次元化

数値計算では、方程式を無次元化して解を求めた。ここでは、得られた解の次元を戻して本来の解を得る際に必要となる変換則をまとめる。数値計算での  $r' = 1$  が、実際の  $r = 1 \text{ kpc}/h$  に対応するように、スケール変換のパラメータ  $s$  を決めた。つまり、式 4.13 とスケール変換を用いて、

$$1 = s^{-1} \frac{\sqrt{2} \times 1 \text{ kpc}/h}{G^{-1}m^{-3}\hbar^2} \quad (4.28)$$

なる  $s$  を求めればよく、

$$s = 1.481 \times 10^{-96} h^{-1} \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m} \right)^{-3} \quad (4.29)$$

を得た。これを用いると、密度および質量を数値計算の際の無次元量から有次元に戻す変換則は、

$$\frac{\rho_c}{h^2 M_\odot \text{ kpc}^{-3}} = 3.403 \times 10^{-3} h^2 \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m} \right)^2 \rho'_c \quad (4.30)$$

$$\frac{M_c}{h^{-1} M_\odot} = 3.405 \times 10^6 h^2 \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m} \right)^2 M'_c \quad (4.31)$$

この逆も有用なので示しておく、

$$\rho'_c = 2.939 \times 10^2 h^{-2} \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m} \right)^{-2} \frac{\rho_c}{h^2 M_\odot \text{ kpc}^{-3}} \quad (4.32)$$

$$M'_c = 2.937 \times 10^{-7} h^{-2} \left( \frac{10^{-22} \text{ eV}}{m} \right)^{-2} \frac{M_c}{h^{-1} M_\odot} \quad (4.33)$$

となる。

### 4.3.3 ハロープロファイルからコア・ハロー質量の決定

我々は、先行研究にある FDM シミュレーションデータ（論文にある FDM ハロープロファイルの図）から、ソリトンコアとハロー質量の決定を行なった。ここでは、その手法について述べる。

まず、WebPlotDigitizer (<https://automeris.io/WebPlotDigitizer/>) を用いて FDM ハロープロファイルを複数点読み込んだ。その点の集合に線形外挿することで、ハローの中心からソリトンコア半径の十分外側までの滑らかなプロファイルを得た。この滑らかな密度プロファイルを積分することで、FDM シミュレーションで得られたハローの回転曲線を求めた。本研究では、この回転曲線に合うようなコア質量およびハロー質量を求めた。実際の銀河の回転曲線のデータには、エラーバーがつく。ここでは各ビンに 5 km/s の誤差をつけて、誤差付きの  $\chi^2$  検定を行なった。この誤差の大きさは、175 個の近傍銀河の回転曲線のデータ SPARC (Spitzer Photometry & Accurate Rotation Curves [Lelli et al. 2016](#)) を参考に近似的に与えた。

我々は、フィッティングする FDM ハロープロファイルを、

$$\begin{aligned} \rho(r) = & \frac{1}{2} \left\{ 1 - \tanh \left( \frac{r - r_t}{dr} \right) \right\} \{ 1 - \Theta(r - r_t - 2dr) \} \rho_{\text{sol}}(r) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left( \frac{r - r_t}{dr} \right) \right\} \Theta(r - r_t + 2dr) \rho_{\text{NFW}}(r) \end{aligned} \quad (4.34)$$

とおいた。ここで、 $r_t$  はソリトンコアと NFW プロファイルの境界半径を表し、 $dr$  は 2 つのプロファイルを繋ぐ幅を決める。 $\Theta$  はステップ関数を表し、

$$\Theta(r) = \begin{cases} 1 & r > 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

である。式 4.34 で与えられるハローでは、 $\tanh$  によって半径  $r_t$  の周りで幅  $dr$  で滑らかにソリトンコアと NFW プロファイルを繋ぐことができる。また、ステップ関数を用いたのは、境界半径から  $2dr$  離れたところでは完全に移り変わるようにするためである。今 FDM-only の場合を考えているので、ソリトンコアプロファイル  $\rho_{\text{sol}}(r)$  は経験式を用いることができ、

$$\rho_{\text{sol}}(r) = \frac{1.9(m/10^{-23} \text{ eV})^{-2}(r_c/\text{kpc})^{-4}}{\{1 + 0.091(r/r_c)^2\}^8} M_{\odot} \text{ pc}^{-3} \quad (4.36)$$

で与えられる。シミュレーションの設定から、FDM 質量  $m$  は分かっているため、必要なパラメータは  $r_c$  の 1 パラメータのみである。NFW プロファイル  $\rho_{\text{NFW}}(r)$  は、ハロー質量  $M_h$ 、質量集中度  $c$  と赤方偏移  $z$  の 3 パラメータによって決められる。ただし、赤方偏移  $z$  はシミュレーションの設

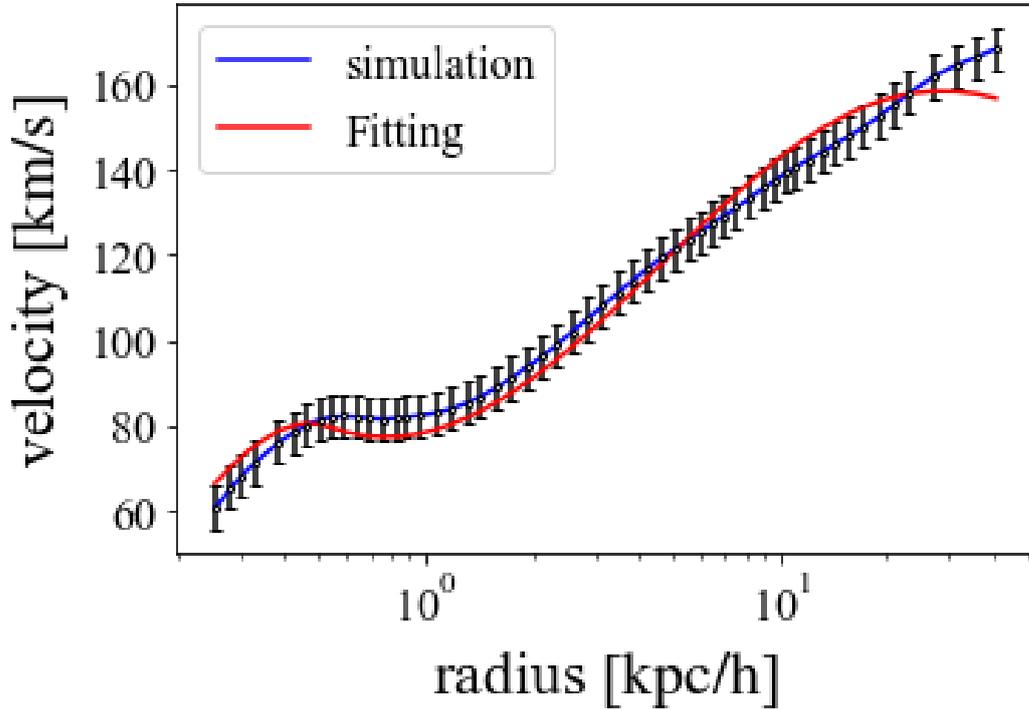


図 4.1: [May and Springel \(2021\)](#) の図 13 の青線で与えられている FDM 密度プロファイルを用いたフィッティングの様子。

定から分かっているので、ここでは  $M_h, c$  を 2 パラメータとした。境界半径  $r_t$  はソリトンコア半径  $r_c$  を用いて、 $r_t = p_1 r_c$  とし、 $p_1$  をパラメータとした。典型的には、境界半径はソリトンコア半径より大きく、 $p_1 \simeq 1 - 3$  程度であることが知られている。境界の幅を決める  $dr$  も同様にソリトンコア半径  $r_c$  を用いて、 $dr = p_2 r_c$  とし、 $p_2$  をパラメータとした。この  $p_2$  は、1 未満の値を取る。

以上のように、5 パラメータ ( $r_c, \log_{10} M_h, c, p_1, p_2$ ) によって、我々は FDM ハロープロファイルを決めた。この FDM ハローモデルにおいて回転曲線を計算し、シミュレーションデータから求めた回転曲線と比較することで、 $\chi^2$  検定を行なった。図 4.1 はフィッティングの様子を表している。青線は、FDM 密度プロファイルから読み込んだデータ点を外挿して回転曲線を計算した結果である。黒い点は、読み込んだデータ点に対応し、各点には回転曲線に 5 km/s の誤差をつけた。赤線は、フィッティングした結果となっている。この場合、 $\chi^2 \simeq 40$  は、データ点 (55) とパラメータ数 (5) から計算した自由度 50 よりも小さいため、十分なフィッティングができています。我々は誤差付きでパラメータを決定したが、データ点の数が非常に多いため、誤差を過小評価した結果となった。より正確に議論をするためには、実際の観測の分解能に合わせたデータ点の取り方をすべきである。しかしここでは、またモデル構築のためにベストフィット値のみに注目し、以下で議論を進めることにする。

我々は、[Schive et al. \(2014b\)](#) の図 3 と [May and Springel \(2021\)](#) の図 13 で与えられている FDM ハロー密度プロファイルを用いてフィッティングを行なった。フィッティングから得られたソリトンコアとハロー質量は、表 4.1 および表 4.2 にまとめた。ただし、ソリトンコア質量は、フィッティングパラメータ  $r_s$  から、式 3.46 を用いて求めた。

表 4.1: [May and Springel \(2021\)](#) ( $z = 3.0, m = 7.0 \times 10^{-23}$  eV)

線種	$M_c [M_\odot/h]$	$M_h [M_\odot/h]$
青	$2.2 \times 10^8$	$2.0 \times 10^{11}$
橙	$1.8 \times 10^8$	$3.7 \times 10^{10}$
緑	$1.2 \times 10^8$	$3.7 \times 10^9$
赤	$6.2 \times 10^7$	$4.4 \times 10^8$

表 4.2: [Schive et al. \(2014b\)](#) ( $z = 0.1, m = 8.1 \times 10^{-23}$  eV)

線種	$M_c [M_\odot/h]$	$M_h [M_\odot/h]$
赤	$2.0 \times 10^8$	$6.8 \times 10^{10}$
黒	$1.2 \times 10^8$	$5.6 \times 10^9$
緑	$8.0 \times 10^7$	$7.0 \times 10^9$
青	$5.5 \times 10^7$	$1.1 \times 10^9$
紅	$4.4 \times 10^7$	$1.8 \times 10^9$

## 4.4 結果

我々は、静水圧平衡モデルと緩和時間モデルを用いた時のコア・ハロー質量関係を [May and Springel \(2021\)](#); [Schive et al. \(2014b\)](#) から得たコア・ハロー質量と比較した。理論モデルは、以下のように決めた。まず各シミュレーションの設定に合うように、赤方偏移  $z$  および FDM 質量  $m$  を決める。ハロー質量  $M_h$  に対して、c-M 関係 ([Ishiyama et al. 2021](#)) を用いて質量集中度の中央値  $c$  を決めた。また、中央値からのズレは、赤方偏移やハロー質量に依存せず、0.11 dex を  $1\sigma$  とした ([Bullock et al. 2001](#))。これらから、NFW(-like) プロファイルが一意に決定される。次に、各モデルにおけるコア半径  $r_c$  を、式 4.2 および式 4.4 を数値的に解くことによって求めた。ただし、緩和時間モデルにおいてハロー年齢は知ることができなかつたため、赤方偏移  $z$  までの宇宙年齢とした。境界半径  $r_t$  は、式 4.5 で示したように定数  $p_1$  倍の関係があるものとした。ここで、各モデルにおいて  $p_1$  を固定して様々なハローを再現することが、我々の目標である。 $p_1$  の値を決め、境界半径内での内包質量が一致するようにソリトンコアの形状を決める。一般に密度連続性を満たさないが、これは  $\tanh$  関数で滑らかに繋ぐことができるので、ここでは密度連続性は考慮しなかつた。これにより、ソリトンコアが一意に決まり、コア・ハロー質量関係が得られる。

図 4.2 は、[May and Springel \(2021\)](#) と静水圧平衡モデルを比較した図である。静水圧平衡モデルでは、 $p_1 = 2.25$  と固定した。c-M 関係の  $1\sigma$  以内の分散でシミュレーションデータを再現できていることが分かる。図 4.3 は、[Schive et al. \(2014b\)](#) と静水圧平衡モデルを比較した図である。ここでも、 $p_1 = 2.25$  とした。その結果、c-M 関係の  $3\sigma$  程度の分散でシミュレーションデータを再現できていることが分かる。図 4.4 および図 4.5 は、緩和時間モデルと比較した図である。緩和時間モデルでは、 $p_1 = 0.31$  と固定した。これらとともに、c-M 関係の  $2\sigma$  以内の分散でシミュレーションデータを再現できていることが分かる。

また、データ点に注目すると、これらのシミュレーションデータのコア・ハロー質量関係が異なることも見て取れる。さらに静水圧平衡モデルでは、 $p_1 = 2.25 \simeq 3$  から、静水圧平衡モデルを用いたコア半径の定義は、従来のコア半径（ソリトンコアの中心密度から半分の高さになった半径）

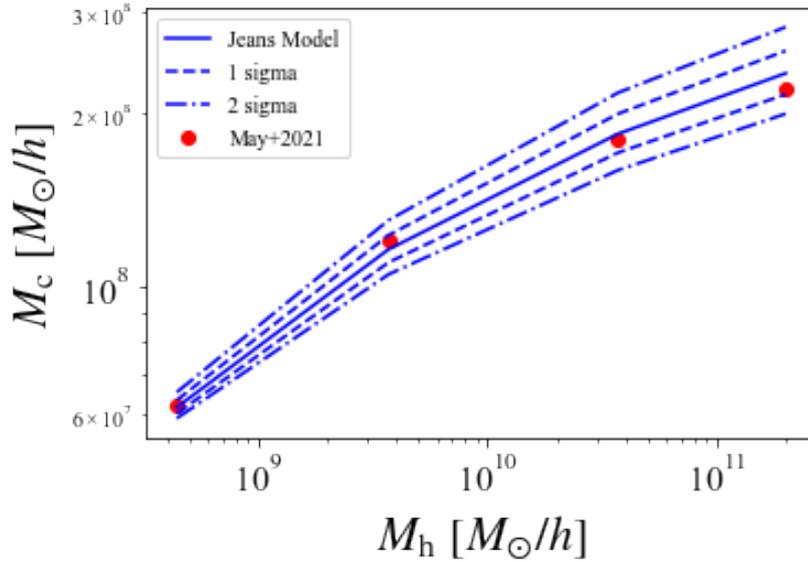


図 4.2: May and Springel (2021) と静水圧平衡モデルを比較した図。静水圧平衡モデルでは、 $p_1 = 2.25$  とした。赤点は回転曲線のフィッティングから得られたシミュレーションデータである。青線は理論線で、実線は  $c$ - $M$  関係の中央値を用いたものになっている。また  $c$ - $M$  関係を  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  ずらした時の理論線もひいている。

と同程度になることが分かる。一方、緩和時間モデルから定義したコア半径に関しては、 $p_1 = 0.31$  から従来のコア半径に比べて、非常に大きな半径となっていることも分かる。

これらの結果から、FDM ハローのコア・ハローの分散は NFW プロファイルの質量集中度の分散関係に落とし込めることが分かった。静水圧平衡モデルでは  $3\sigma$  以内、緩和時間モデルの場合  $2\sigma$  以内でこれらのシミュレーションデータを再現することができた。しかし、以下の理由からどちらがより妥当な理論モデルであるか決定できない。前節で述べたように、May and Springel (2021) で与えられている密度プロファイルは、FDM シミュレーションで得られた同じ質量帯の多数のハロープロファイルの平均をとって得られたものである。一方、Schive et al. (2014b) で与えられたプロファイルは、個々のハローのサンプルプロファイルであり、中央値から外れている可能性がある。図 4.2 を見ると、静水圧平衡モデルの場合、前者のシミュレーションを非常によく再現できることが分かる。以上の理由から、一見すると緩和時間モデルの方が、様々なシミュレーションデータを小さい  $c$ - $M$  関係の分散から再現できるものの、静水圧平衡モデルが不適切と結論づけることはできない。

## 4.5 まとめと考察

今回の解析から、FDM シミュレーションで与えられているコア・ハロー質量関係は、与えられたハロー質量に対して静水圧平衡条件、または緩和時間条件を用いてコア半径を求め、それぞれのコア半径の  $2.25$  倍、 $0.31$  倍の境界半径で質量連続性を課すことで再現できることが分かった。また、

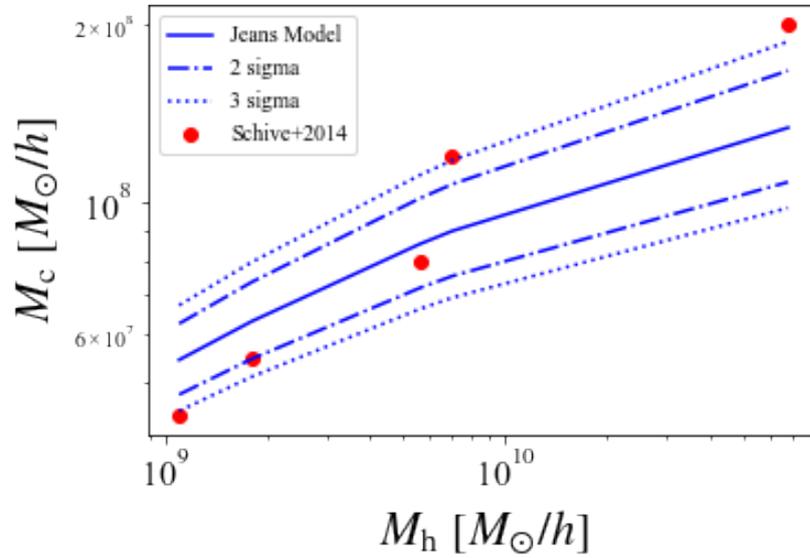


図 4.3: Schive et al. (2014b) と静水圧平衡モデルを比較した図。静水圧平衡モデルでは、 $p_1 = 2.25$  とした。理論線として、 $c$ - $M$  関係を  $2\sigma$ ,  $3\sigma$  ずらしたものも示している。

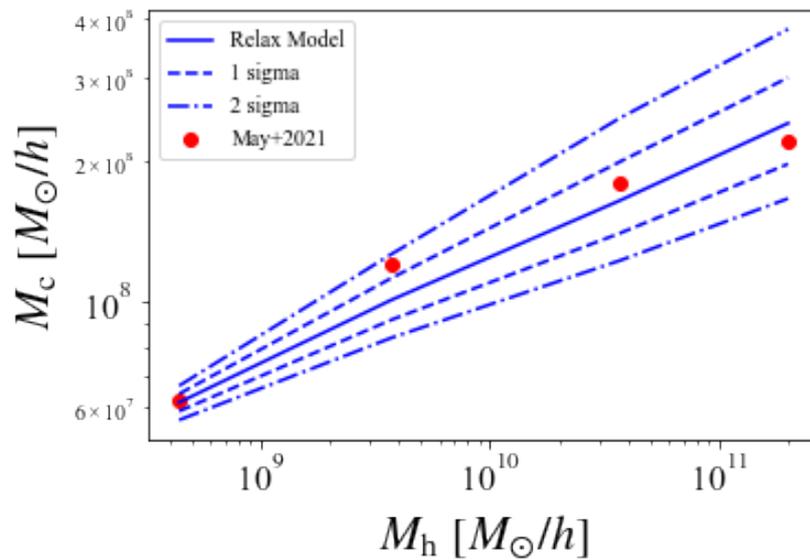


図 4.4: May and Springel (2021) と緩和時間モデルを比較した図。緩和時間モデルでは、 $p_1 = 0.31$  とした。

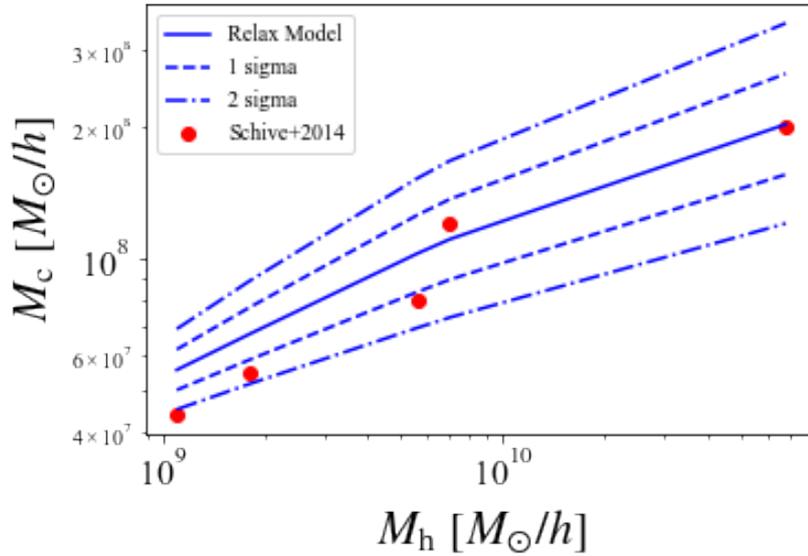


図 4.5: Schive et al. (2014b) と緩和時間モデルを比較した図。緩和時間モデルでは、 $p_1 = 0.31$  とした。

コア・ハロー質量の分散は NFW プロファイルの  $c$ - $M$  関係の分散に落とし込めることが分かった。

我々は、FDM ハローが球対称で平衡状態になっていると仮定してモデル構築に努めたが、我々の理論モデルに関して議論すべき点がいくつか残されている。まず注意すべき点として、FDM シミュレーションでは SP 方程式の時間発展を計算し、宇宙のある時間での構造を取り出して見ている一方で、我々は平衡状態を仮定してモデル構築を行なっているため、これらの描像が異なるという点である。従って、ここでは静水圧平衡条件や緩和時間条件を課してシミュレーションに合うようにフィッティングしたものの、このモデルでは動的発展の様子を直接知ることはできない。しかしこのように描像の違いがあっても、あらゆる赤方偏移に存在する FDM ハロープロファイルを表すことができるような理論モデルは構築は可能であると考えている。そのための手法として、理論モデルの赤方偏移依存性を調べる方法が考えられる。我々の理論モデルに含まれる FDM ハロープロファイルの赤方偏移依存性は、NFW プロファイルの質量集中度が持つ赤方偏移依存性のみである。FDM シミュレーション (Jowett Chan et al. 2021; Schive et al. 2014a) からコア・ハロー質量関係の赤方偏移依存性が得られている (式 4.6 および式 4.7) ことを利用する。つまり、横軸に  $\sqrt{\zeta(z)/\zeta(0)}M_h/\gamma$ 、縦軸に  $a^{1/2}M_c$  を取り、各理論モデルを異なる赤方偏移で計算した上で、シミュレーションで得られた関係と比較することで、どちらの理論モデルがより動的発展をおった FDM シミュレーション結果を再現できているかを決定することができると期待される。特に Jowett Chan et al. (2021) では、コア・ハロー質量関係の分散の範囲を指摘しているため、分散の由来が質量集中度の分散に落とし込めるのかも再度確認することができる。ただし注意として、質量集中度の赤方偏移依存性およびハロー質量依存性は CDM シミュレーションから得られたものを利用しているため、この描像では上手くいかない可能性もある。その場合は、質量連続性の仮定についても見直す必要がある。なぜなら、我々は簡易的な描像として、FDM ハローのソリトンコアは CDM ハローの中心付近 (境界半径以内) の密度分布が変化して生成するものと考えているからである。実際のシミュレーションでは、この描像は明らかになっていないため、

我々の理論モデルで上手くいかない場合は、再度質量集中度や質量連続性の仮定も踏まえて議論し直す必要がある。

次に、球対称の仮定についても議論する。我々は NFW プロファイルもソリトンコアも球対称であるものとして考えた。May and Springel (2021) では、多数のハローの分散を軽減するために質量が同程度のハローを平均化し、密度プロファイルを与えているために、我々のモデルで評価するのが妥当と言える。しかし、より一般に FDM ハローの密度プロファイルモデルを構築しようとした時、非等方性を考慮する必要がある。実際、CDM ハロー (NFW プロファイル) では 3 軸非等方となっている。非等方的な NFW プロファイルが与えられた時に、いかにして境界半径を定義するかは今後の研究課題である。また、ソリトンコアも定常的に球対称ではなく、収縮・膨張や変形・引き戻しを繰り返し、また中心付近でランダムに動くことが分かっている (Li et al. 2021) この効果が回転曲線の比較にどの程度効いてくるのかも踏まえて、今後非等方な FDM ハローモデルを発展させていく必要がある。

# 第5章 粒状構造と小スケール物質パワースペクトル

FDM シミュレーション結果から、FDM ハロー内にはドブロイ波長程度の大きさの粒状構造が無数に存在していることが分かっている。この粒状構造は、ドブロイ波長程度の密度揺らぎを生み、小スケール物質パワースペクトルの振幅が大きくなると予想される。従って、FDM ハローの小スケール物質パワースペクトルをモデリングし、実際の観測結果と比較することで、FDM 質量に制限がかけられる。本研究では、まず粒状構造を考慮した FDM ハローモデルを構築し、小スケール物質パワースペクトルを計算した。次に、強重力レンズ系から得られた小スケール物質パワースペクトルの上限値と比較することで、FDM 質量制限について議論した。

本章は、以下のような構成となっている。まず 5.1 節では、強重力レンズ効果を用いた小構造体の探索についてレビューする。次に 5.2 節では、我々が構築した FDM ハローモデルとその小スケール物質パワースペクトル、さらにパラメータ依存性について述べる。さらに 5.3 節では、強重力レンズ系の観測結果と我々が構築した理論モデルの比較について述べる。最後に 5.4 節で、まとめと今後の展望について述べる。本章では、自然単位系  $c = \hbar = 1$  を用いる。

## 5.1 強重力レンズ効果を用いた小構造体の探索

ダークマターはバリオンと違い光学的観測が難しいため、主に重力レンズ効果を用いてその分布を探索される。ここで重力レンズ効果とは、遠方銀河の光が地球に届くまでに視線方向に存在する重力場の影響により曲げられる現象である。曲がった背景天体像を解析することによってダークマターなどによる重力場の様子を知ることができる。また、宇宙に存在する小構造体の探索も光学的観測が難しい。我々が欲しいダークマターの素粒子的性質は宇宙の小スケールに現れるため、小構造体に関する情報を観測的に得ることが必須となる。そこで考えられたのが、強重力レンズ系を用いた手法である。

近年、強重力レンズ系を解析することで、銀河より小さいスケールの小構造体の量を知る方法が開発された。これはレンズ天体に滑らかな密度分布以外に小構造体が存在すると、レンズ天体のポテンシャルに摂動が加わり、背景天体像の表面輝度にズレが生じることを用いた手法である (Vegetti et al. 2012)。言い換えると、背景天体像の表面輝度のズレを解析することにより、レンズ天体に存在する小構造体の量を求めることができるというわけである。これらの解析から、レンズ天体の Einstein 半径近傍での小構造体の量を小スケール物質パワースペクトルの形で得られる。ここで Einstein 半径は、観測者から背景天体までの角径距離を  $D_s$ 、観測者からレンズ天体ま

での角径距離を  $D_d$ 、レンズ天体から背景天体までの角径距離を  $D_{ds}$  とし、Einstein 半径内に含まれるレンズ天体の質量を  $M$  とすると、

$$\theta_{\text{Ein}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_d D_s}} \quad (5.1)$$

で決まる。ただし、ここでは自然単位系から戻して表記した。

Hezaveh et al. (2016) は強重力レンズ効果を用いて Einstein 半径近傍における射影物質パワースペクトルを推定する枠組みを構築し、シミュレーションを用いた模擬観測によってその方法を検証した。その結果、現在の設備の ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array) 望遠鏡を用いて、赤方偏移  $z = 0.5$  に存在する 1 つのレンズ天体に対して 10 時間程度の観測をすることで、背景天体の構造や検出器のノイズに依らず、CDM サブハローが引き起こす小スケール物質パワースペクトルを  $3\sigma$  の検出精度で測定できることが分かった。また Diaz Rivero et al. (2018) では、天の川銀河の小スケール収束場パワースペクトルに注目し、 $0.1 \text{ kpc}^{-1} < k < 10 \text{ kpc}^{-1}$  という従来より比較的大きな波数領域のパワースペクトルからも、CDM と他のダークマターモデルを区別できる可能性を示唆した。これらは模擬観測データを用いた研究である。そこで、Bayer et al. (2018) は初めて実際の強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 にこの手法を適応させ、小スケール物質パワースペクトルの上限値を得た。ここで SDSS J0252+0039 は、ハッブル宇宙望遠鏡の広視野カメラ 3 (WFC3) を用いた SLACS (Sloan Lens ACS Survey) サーベイにより観測された (Auger et al. 2009)、赤方偏移  $z = 0.280, 0.982$  の銀河-銀河強重力レンズ系である。得られた小スケール物質パワースペクトルの上限値は、0.5 kpc の波長で  $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 1$ 、1 kpc の波長で  $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 0.1$ 、3 kpc の波長で  $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 0.01$  (99%信頼度) である。ここで、 $\Delta_{\delta\kappa}^2$  は無次元収束場パワースペクトルであり、その具体的な表式は 5.3.1 節で与えている。ただし、この制限は保守的な制限と言える。実際、滑らかなレンズポテンシャルの場合からの表面輝度のズレは、レンズ天体に含まれる小構造体の寄与のみならず、視線方向に存在する球状星団や恒星 stream や edge-on disk などの詳細なダークマター・バリオン分布などにも依存するのだが、ここではそれを区別せず上限値を与えている。

さらに Bayer et al. (2018) は、この上限値と CDM サブハローが生成する小スケール物質パワースペクトルを比較した結果、後者が制限値に比べて十分小さく、CDM モデルは無矛盾であることを示した。我々は、この方法は FDM モデルの制限に適用できることに気が付き、本研究の着想に至った。FDM ハローはドブROI波長程度の大きさの粒状構造で埋められているため、それに対応した波数より小さい波数領域で小スケール物質パワースペクトルの振幅が大きくなる。従って、小スケール物質パワースペクトルを用いることで粒状構造に関する制限、ひいては FDM 質量の制限がかけられることが予測される。このような着想をもとに、次節以降では理論モデルの構築とそれを用いた観測結果の比較、さらに FDM 質量制限について議論していく。

## 5.2 FDM ハローの小スケール物質パワースペクトル

第3章で述べたように、FDM ハローの性質はFDM シミュレーション (e.g. Schive et al. 2014b) により明らかにされてきた。FDM シミュレーションの結果、FDM ハローはドブロイ波長程度の大きさの粒状構造で満たされていることが分かった。これらの粒状構造により、ドブロイ波長のスケールで大きな物質揺らぎを生成される。この揺らぎを評価するために、FDM ハローの小スケール物質パワースペクトルに関する理論モデルを構築した。

我々のモデルでは、FDM ハローは多数の粒状構造から構成されていると仮定する。この粒状構造は、アンサンブル平均密度が与えられた特定のダークマタープロファイル (e.g. NFW プロファイル, Navarro et al. 1997) になるようにランダムに分布させる。バリオン分布はFDM 分布に依存せず、特定のバリオンプロファイル (e.g. Hernquist プロファイル, Hernquist 1990) に従うと仮定する。

本節は以下のような構成となっている。まず、5.2.1 節では、粒状構造を考慮したFDM ハロープロファイルについて述べる。5.2.2 節では、これを用いてFDM only の場合の3次元パワースペクトルを求める。続く5.2.3 節では、その射影密度場を考え小スケール物質パワースペクトルの定式化を行う。次に5.2.4 節では、バリオンプロファイルを含めた場合の定式化を行う。最後に5.2.5 節では、具体的にハロー・バリオンプロファイルがそれぞれNFW プロファイルおよびHernquist プロファイルに従う場合の結果を示し、パワースペクトルのパラメータ依存性を議論する。

### 5.2.1 粒状構造を考慮したFDM ハロープロファイル

ハロー内のFDM の分布は、粒状構造の分布によって決定される。中心が $\mathbf{r}'$ にある粒状構造の質量 $M_c$ は、ハローの平均局所密度 $\rho_h(\mathbf{r}')$ から、

$$M_c(\mathbf{r}') = \rho_h(\mathbf{r}')V_c \quad (5.2)$$

と決定されると仮定する。ここで、

$$V_c = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\lambda_c}{2}\right)^3 \quad (5.3)$$

は各粒状構造の体積で、半径はドブロイ波長 $\lambda_c = 2\pi\hbar/mv$ の半分で与えられると仮定する。ただし、 $m$ はFDM 質量、 $v$ はその速度分散である。我々は、 $v$ はハロー内では一定の値で近似できると仮定する。つまり $V_c$ は我々の定式化では一定であると考え、計算を進める。

中心が $\mathbf{r}'$ にある粒状構造の内部の密度プロファイル $\rho_c(\mathbf{r})$ は、正規化された質量プロファイル関数 $u(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を用いて、

$$\rho_c(\mathbf{r} ; \mathbf{r}') = M_c(\mathbf{r}')u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.4)$$

と記述できる。ここで、規格化条件は、

$$\int_V d^3r u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int_{V_\epsilon(\mathbf{r}')} d^3r u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1 \quad (5.5)$$

である。ここで、 $V$  はハローの全体積、 $V_\epsilon(\mathbf{r}')$  は点  $\mathbf{r}'$  を中心とし、ハローの大きさに比べて十分に小さいが、各粒状構造より大きいような 3次元球である。後述するように、質量プロファイル関数は、その裾 (tail) がドブロイ波長を超えるようなものを想定している。この仮定により、FDM の質量密度は隣接する粒状構造の間で重なり合うことになる。

この粒状構造は、数密度のアンサンブル平均は固定されている条件の下で、小さなスケールでランダムに分布していると仮定する。ここで、これらの粒状構造の質量は場所に依存すると仮定している (式 5.2) ので、ランダムに分布する粒状構造のアンサンブル平均密度は、NFW 密度分布のようなハロー密度分布を与えることができる。FDM ハローの密度分布  $\rho_f(\mathbf{r})$  は、このランダムに分布する粒状構造の重ね合わせで表現することができるので、FDM ハロープロファイルは、

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \rho_c(\mathbf{r}; \mathbf{r}') n(\mathbf{r}') = \int_V d^3r' \rho_h(\mathbf{r}') V_c n(\mathbf{r}') u(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.6)$$

と与えられる。ここで、 $n(\mathbf{r})$  は粒状構造の中心点の数密度を表す。各粒状構造がインデックス  $j$  で表され、その中心を  $\mathbf{r}_j$  とすると、数密度  $n(\mathbf{r})$  はディラックのデルタ関数を用いて、

$$n(\mathbf{r}') = \sum_j \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_j). \quad (5.7)$$

と書き直すことができる。ここで  $V_\epsilon$  球は十分小さいものを仮定しているため、我々は  $\rho_f(\mathbf{r})$  が  $V_\epsilon$  球内で定数と考えて以下の計算を進める。言い換えると、我々は  $V_\epsilon$  として  $\rho_f(\mathbf{r})$  が一定と考えられるような領域を考える。粒状構造の数密度のアンサンブル平均  $\langle n(\mathbf{r}) \rangle$  は、 $1/V_c$  とする。これにより、FDM 密度プロファイルのアンサンブル平均  $\langle \rho_f(\mathbf{r}) \rangle$  は、与えられたハロープロファイルに還元される。つまり、

$$\langle \rho_f(\mathbf{r}) \rangle = \rho_h(\mathbf{r}). \quad (5.8)$$

を満たす。ここではあらわにソリトンコアを考えず FDM ハローを構成した。これは、我々のモデルは強重力レンズ系の観測と比較するためのものであり、考える系の Einstein 半径はソリトンコアの半径よりも一般に大きいためである。我々の理論モデルの妥当性に関する詳しい議論は、5.2.5 節で述べる。

## 5.2.2 3次元パワースペクトル (FDM-only)

本節では、5.2.1で述べたFDMハローモデルを用いて、 $V_\epsilon$ 球内の密度揺らぎと3次元小スケール物質パワースペクトルを計算する。まず、質量プロファイル関数の正規化条件(式5.5)を用いて、 $\rho_f(\mathbf{r})$ を

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_h(\mathbf{r}) V_c \int_{V_\epsilon} d^3r' u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}') \quad (5.9)$$

と書き換えておく。これを用いると、密度揺らぎ $\Delta(\mathbf{r})$ は

$$\Delta(\mathbf{r}) \equiv \frac{\rho(\mathbf{r}) - \rho_h(\mathbf{r})}{\rho_h(\mathbf{r})} = V_c \int_{V_\epsilon} d^3r' u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}') - 1 \quad (5.10)$$

と計算できる。密度揺らぎのフーリエ変換 $\Delta_{\mathbf{K}}$ は、

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{K}} &\equiv \int_{V_\epsilon} d^3r \Delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \\ &= V_c \int_{V_\epsilon} d^3r' n(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'} \int_{V_\epsilon} d^3r'' u(\mathbf{r}'') e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}''} \\ &= V_c \tilde{u}_{\mathbf{K}} \int_{V_\epsilon} d^3r' n(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ここで、 $\mathbf{K}$ は3次元の波数である。今、 $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ の密度揺らぎに興味ないので、式5.10の定数項は無視して計算した。右辺第2式では $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}''$ の変数変換を行なった。また、 $\tilde{u}_{\mathbf{K}}$ は質量プロファイル関数のフーリエ変換した関数である。

3次元の小スケール物質パワースペクトルの定義は、

$$\langle \Delta_{\mathbf{K}} \Delta_{\mathbf{K}'} \rangle \equiv V_c \delta_{\mathbf{K}+\mathbf{K}',\mathbf{0}}^{(3)} P(K) \quad (5.12)$$

である。左辺に式5.11を代入すると、

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\mathbf{K}} \Delta_{\mathbf{K}'} \rangle &= V_c^2 \tilde{u}_{\mathbf{K}} \tilde{u}_{\mathbf{K}'} \int_{V_\epsilon} d^3r \int_{V_\epsilon} d^3r' e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}'} \langle n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \rangle \\ &= V_c \tilde{u}_{\mathbf{K}} \tilde{u}_{\mathbf{K}'} \int_{V_\epsilon} d^3r e^{-i(\mathbf{K}+\mathbf{K}')\cdot\mathbf{r}} \\ &= V_c V_c \delta_{\mathbf{K}+\mathbf{K}',\mathbf{0}}^{(3)} |\tilde{u}_{\mathbf{K}}|^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

と変形できる。ここで、第2式では $\langle n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / V_c$ とし、異なる位置で数密度に相関がないものと仮定した。また、最後の式変形には、質量プロファイル関数が実数であることから、 $\tilde{u}_{-\mathbf{K}} = \tilde{u}_{\mathbf{K}}^*$ となることを用いた。さらにここでは、質量プロファイル関数が球対称関数であ

るものを考えるので、 $\tilde{u}_K = \tilde{u}_K$  と表せる。これらより、3次元の小スケール物質パワースペクトルは、

$$P(K) = V_c |\tilde{u}_K|^2 \quad (5.14)$$

と得られる。

### 5.2.3 射影密度場の2次元パワースペクトル (FDM-only)

5.2.1節で示したFDMハロープロファイルを用いて、視線方向( $z$ 軸)に積分した2次元射影密度場 $\Sigma_f(\mathbf{x})$ は、

$$\Sigma_f(\mathbf{x}) \equiv \int_Z dz \rho_f(\mathbf{r}) = \int_Z dz \int_{V_\epsilon(\mathbf{r})} d^3r' \rho_h(\mathbf{r}') V_c n(\mathbf{r}') u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.15)$$

と定義できる。ここで、 $\mathbf{x}$ は射影密度場におけるハローの中心を原点と置いた時の座標で、 $Z$ は視線方向の積分範囲を表す。第2式は、規格化条件(式5.5)を用いた。射影密度場のアンサンブル平均 $\langle \Sigma_f(\mathbf{x}) \rangle$ は、

$$\langle \Sigma_f(\mathbf{x}) \rangle = \int_Z dz \langle \rho_f(\mathbf{r}) \rangle = \int_Z dz \rho_h(\mathbf{r}) \equiv \Sigma_h(\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

と計算できる。

射影密度場における小スケール物質パワースペクトルを計算するために、射影密度場の座標 $\mathbf{x}$ 周りの十分小さな円 $S_\epsilon$ を考える。3次元の場合と同様に、 $\Sigma_h(\mathbf{x})$ は $S_\epsilon$ 円内では定数であると仮定し計算を進める。式5.15は $S_\epsilon$ と式5.6を用いて、

$$\Sigma_f(\mathbf{x}) = \int_Z dz \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r' \rho_h(\mathbf{r}') V_c n(\mathbf{r}') u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.17)$$

のように書き換えられる。ここで、積分範囲 $S_\epsilon \times Z$ は、視線方向の円筒である。

射影密度場の局所的領域における密度揺らぎ $\delta(\mathbf{x})$ は、

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\Sigma_f(\mathbf{x}) - \Sigma_h(\mathbf{x})}{\Sigma_h(\mathbf{x})} = \frac{1}{\Sigma_h(\mathbf{x})} \int_Z dz \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r' \rho_h(\mathbf{r}') V_c n(\mathbf{r}') u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 1 \quad (5.18)$$

と表せる。密度揺らぎのフーリエ変換は、

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}_{\mathbf{k}} &\equiv \int_{S_\epsilon} d^2x \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{\Sigma_h(\mathbf{x})} \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r' \rho_h(\mathbf{r}') V_c n(\mathbf{r}') \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r u(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} \Big|_{K_z=0} \\
&= \frac{V_c}{\Sigma_h(\mathbf{x})} \tilde{u}_{\mathbf{k}} \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r' \rho_h(\mathbf{r}') n(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'} \Big|_{k_z=0}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

となる。ここで、 $\mathbf{k}$  は 2次元波数ベクトルを表し、 $\mathbf{K}$  は  $K_x = k_x, K_y = k_y, K_z = 0$  という関係を満たした 3次元波数としている。3次元の場合と同様に、揺らぎの波数が  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  となるモードには興味がないので、式 5.18 の定数項は無視した。また、積分範囲  $Z$  は質量プロファイル関数  $u(\mathbf{r})$  の及ぶ範囲に比べて十分長いものとし、 $\tilde{u}_{\mathbf{k}}$  は  $\tilde{u}_{\mathbf{K}}$  と、

$$\tilde{u}_{\mathbf{k}} \equiv \tilde{u}_{\mathbf{K}} \Big|_{K_z=0} \tag{5.20}$$

の関係で結びついている。

射影密度場の小スケール物質パワースペクトルの定義は、

$$\langle \tilde{\delta}_{\mathbf{k}} \tilde{\delta}_{\mathbf{k}'} \rangle \equiv S_\epsilon \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',\mathbf{0}}^{(2)} P(k) \tag{5.21}$$

である。式 5.21 の左辺に、式 5.19 を代入すると、

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\delta}_{\mathbf{k}} \tilde{\delta}_{\mathbf{k}'} \rangle &= \left( \frac{V_c}{\Sigma_h(\mathbf{x})} \right)^2 \tilde{u}_{\mathbf{k}} \tilde{u}_{\mathbf{k}'} \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r' \langle n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \rangle \\
&\quad \times \rho_h(\mathbf{r}) \rho_h(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{r}'} \Big|_{K_z=0, K'_z=0} \\
&= \frac{V_c}{\Sigma_h^2(\mathbf{x})} \tilde{u}_{\mathbf{k}} \tilde{u}_{\mathbf{k}'} \int_{S_\epsilon \times Z} d^3r \rho_h^2(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{K}+\mathbf{K}')\cdot\mathbf{r}} \Big|_{K_z=0, K'_z=0} \\
&= \frac{V_c}{\Sigma_h^2(\mathbf{x})} \tilde{u}_{\mathbf{k}} \tilde{u}_{\mathbf{k}'} \int_Z dz \rho_h^2(\mathbf{r}) \int_{S_\epsilon} d^2x e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
&= S_\epsilon \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',\mathbf{0}}^{(2)} \frac{V_c}{\Sigma_h^2(\mathbf{x})} |\tilde{u}_{\mathbf{k}}|^2 \int_Z dz \rho_h^2(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{5.22}$$

と計算できる。2番目の等式では、3次元の計算の時と同様に、異なる点の数密度は無相関である式  $\langle n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / V_c$  を用いた。式 5.21 と式 5.22 から、FDM ハローの小スケール物質パワースペクトルが得られ、

$$P_f(k) = \frac{V_c}{r_h(\mathbf{x})} |\tilde{u}_{\mathbf{k}}|^2 \tag{5.23}$$

となる。ここで、 $r_h(\mathbf{x})$  は長さの次元を持った有効ハロー長で、

$$r_h(\mathbf{x}) \equiv \frac{\Sigma_h^2(\mathbf{x})}{\int_Z dz \rho_h^2(\mathbf{r})} = \frac{(\int_Z dz \rho_h(\mathbf{r}))^2}{\int_Z dz \rho_h^2(\mathbf{r})} \quad (5.24)$$

で与えられる。また、今 FDM-only の場合を考えているため、 $P(k)$  に  $f$  という印を付けておいた。球対称なハローおよび、球対称な質量プロファイル関数を考えると、式 5.23 および式 5.24 はより簡単に表せて、

$$P_f(k) = \frac{V_c}{r_h(x)} |\tilde{u}_k|^2, \quad (5.25)$$

$$r_h(x) = \frac{\Sigma_h^2(x)}{\int_Z dz \rho_h^2(r)} = \frac{(\int_Z dz \rho_h(r))^2}{\int_Z dz \rho_h^2(r)}. \quad (5.26)$$

となる。実際の FDM シミュレーションで見られるハローは一般に非球対称である (e.g. Schive et al. 2014b) が、我々は簡単のため球対称を考えた。この仮定に関する妥当性は 5.2.5 節で議論する。

有効ハロー長  $r_h(x)$  は、視線方向の密度分散の情報を含んだ長さとなっている。式 5.26 を書き換えると、

$$\begin{aligned} r_h(x) &= Z \cdot \frac{(\frac{1}{Z} \int_Z dz \rho_h(r))^2}{\frac{1}{Z} \int_Z dz \rho_h^2(r)} \\ &= Z \cdot \frac{\bar{\rho}_h^2(x)}{\bar{\rho}_h^2(x) + s^2(x)} \end{aligned} \quad (5.27)$$

となる。ここで、 $\bar{\rho}_h(x)$  は視線方向に平均したハロー密度、 $s^2(x)$  は密度分散であり、

$$\bar{\rho}_h(x) \equiv \frac{1}{Z} \int_Z dz \rho_h(r), \quad (5.28)$$

$$s^2(x) \equiv \frac{1}{Z} \int_Z dz \rho_h^2(r) - \left( \frac{1}{Z} \int_Z dz \rho_h(r) \right)^2. \quad (5.29)$$

で表される。図 5.1 はハロープロファイルとして NFW プロファイルを仮定した時の、 $r_h(x)$  の様子を表している。ハローの中心部分では、半径の増加とともに  $r_h(x)$  は単調増加しているが、外側では単調減少していることが分かる。この振る舞いは式 5.27 を見ると分かる。半径が小さい領域では、視線方向の密度の分散が大きいため、 $s(x)$  が  $r_h(x)$  の増減を決定している。外側では、視線方向に沿ったハローの大きさ  $Z$  が  $r_h(x)$  の形状を決めている。

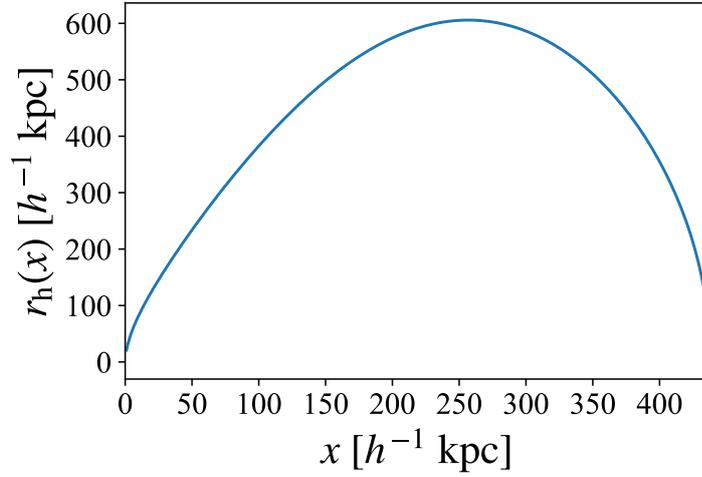


図 5.1: 射影密度場の中心からの距離  $x$  に対する有効ハロー長  $r_h(x)$  のプロット。ハロープロファイルとして NFW プロファイルを使った。ハローの全質量を  $M_h = 10^{13} h^{-1} M_\odot$  とし、[Ishiyama et al. \(2021\)](#) で知られている質量集中度とハロー質量の関係式を用いて NFW プロファイルを構成した。視線方向の積分は、ハローのビリアル半径までとし、その長さは  $438 h^{-1} \text{kpc}$  である。

#### 5.2.4 射影密度場の 2 次元パワースペクトル (バリオン含む)

5.2.3 節では、FDM-only の場合の射影密度場の小スケール物質パワースペクトルを示した。しかし、実際の系ではバリオンが含まれていることが多く、これらを考慮する必要がある。我々は、バリオン密度は FDM 分布とは独立に滑らかな関数  $\rho_b(r)$  を用いて表されるものと仮定する。実際の観測ではバリオン分布は光学的に知ることができるので、もし FDM の分布に合わせてバリオンが分布するとしたら、バリオンも粒状に存在することになる。しかし、現時点ではそのような傾向は明らかになっていないので、FDM 分布とは独立に滑らかな関数で与えられるものと仮定することは妥当である。FDM とバリオンを合わせた全密度  $\rho(r)$  は、

$$\rho(r) = \rho_f(r) + \rho_b(r) \quad (5.30)$$

で与えられる。全射影密度  $\Sigma(x)$  は、

$$\Sigma(x) = \Sigma_f(x) + \Sigma_b(x), \quad (5.31)$$

となる。ここで、 $\Sigma_b(x)$  の定義は

$$\Sigma_b(x) \equiv \int_Z dz \rho_b(r). \quad (5.32)$$

である。我々の仮定から、バリオンはFDM分布のようなランダム性を含まないため、バリオンに関する関数のアンサンブル平均をとっても、関数形は変化しない。従って、5.2.3節と全く同じ計算ができ、バリオンを含んだ場合の小スケール物質パワースペクトルは、

$$P(k) = \left( \frac{\Sigma_h(x)}{\Sigma_h(x) + \Sigma_b(x)} \right)^2 P_f(k). \quad (5.33)$$

と得られる。式 5.33 から、バリオンを含んだ場合は FDM-only の場合に比べてパワースペクトルは小さくなるのが分かる。これは、滑らかなバリオン分布の存在によって FDM の密度揺らぎを相対的に小さくするからである。

### 5.2.5 具体的な計算とパラメータ依存性

ここでは具体的なプロファイルを選んで、式 5.33 を計算した結果を示す。ハロープロファイルとして NFW プロファイル、バリオンプロファイルとして Hernquist プロファイルを採用した。NFW プロファイルを決めるためには、一般にはハロー質量と質量集中度の 2 パラメータ必要であるが、質量集中度はハロー質量と対応があることが知られている (e.g. Ishiyama et al. 2021)。この関係式を用いることで、NFW プロファイルを決めるのに必要なパラメータはハロー質量  $M_h$  のみとした。NFW プロファイルを与えるために、我々は Python モジュール COLOSSUS (Diemer 2018) を利用した。Hernquist プロファイルも、一般に銀河質量と特性半径の 2 パラメータ必要になる。しかし、50,000 個の early-type 銀河の観測から経験的な関係式が得られている (Hyde and Bernardi 2009)。従って、銀河質量  $M_s$  の 1 パラメータのみで Hernquist プロファイルを決められる。ただし我々のモデルでは、銀河質量  $M_s$  の代わりに、銀河・ハロー質量比  $M_s/M_h$  をパラメータと採用した。この銀河・ハロー質量比は、ハロー質量が  $10^{11} M_\odot$  より大きな FDM ハローでは、CDM ハローの場合と同程度の値を持つと考えられており (Cristofari and Ostriker 2019)、その値は  $10^{-3} - 10^{-1}$  程度である (Wechsler and Tinker 2018)。

5.2.1 節で述べたように、我々のモデルではソリトンコアを無視してモデル構築を行った。従って、FDM ハローの中心付近に対しては我々のモデルを適用することはできない。3.2.2 節で述べたように、FDM シミュレーション結果からソリトンコアと NFW プロファイルの境界半径  $r_t$  は、ソリトンコアの半径  $r_c$  を用いて 3 倍程度となることが知られている (Schive et al. (2014b))。また、ソリトンコア半径  $r_c$  は FDM 質量とハロー質量に対するスケールも調べられている (Schive et al. 2014a)。我々が注目するのは、強重力レンズ系の Einstein 半径近傍における密度揺らぎであるので、非常に小さい FDM 質量を考えない限り、典型的には Einstein 半径はこの境界半径より大きい (図 5.2 と図 5.3 の脚注も参照)。従って、5.3 節で行う我々のモデルを用いた強重力レンズ系の観測との比較は妥当な議論と言える。

質量プロファイル関数  $u(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  として、分散がドブロイ波長の半分の長さを持つような球対称ガウス関数を仮定する。球対称かつガウス関数でかけるという仮定は、Dalal et al. (2021) と無矛盾である。ここで Dalal et al. (2021) は、Widrow and Kaiser (1993) で提案された手法を用いて FDM ハロー構造を求めており、球対称ガウス関数で表されるランダムに分布した粒状構造の重ね

合わせでよく表せることを示した。この質量プロファイル関数のフーリエ変換した結果は、

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_k = \exp\left(-\frac{\lambda_c^2 k^2}{8}\right) \quad (5.34)$$

である。

ドブロイ波長  $\lambda_c = 2\pi\hbar/mv$  を計算するために、速度分散  $v$  として

$$v = \sqrt{\frac{3GM_{\text{tot}}}{2R_{\text{vir}}}} \quad (5.35)$$

とし、定数と仮定した。ここで、 $M_{\text{tot}}$  はハロー質量  $M_h$  と銀河質量  $M_s$  の和で、全質量を表す。 $R_{\text{vir}}$  はハローのビリアル半径である。従って、ドブロイ波長  $\lambda_c$  を計算するために追加で必要となるパラメータは FDM 質量  $m$  だけである。最後に、射影密度場のどの位置に注目するかを決定する位置  $x$  もパワースペクトルを計算するのに必要なパラメータである。

ここまでをまとめると、FDM ハローにおける小スケール物質パワースペクトルを求めるためには、ハロー質量  $M_h$ 、銀河・ハロー質量比  $M_s/M_h$ 、FDM 質量  $m$ 、位置  $x$  の 4 パラメータが必要となる。質量プロファイル関数 (式 5.34) を式 5.33 に代入することで、

$$P(k) = \left(\frac{\Sigma_{\text{NFW}}(x)}{\Sigma_{\text{NFW}}(x) + \Sigma_{\text{Hern}}(x)}\right)^2 \frac{4\pi\lambda_c^3}{3r_{\text{NFW}}(x)} \exp\left(-\frac{\lambda_c^2 k^2}{4}\right) \quad (5.36)$$

が得られる。以下では、特にハロー質量  $M_h$  と FDM 質量  $m$  に対するパワースペクトルの依存性を見る。

図 5.2 は、ハロー質量に対する依存性を示している。この図から、ハロー質量が大きくなるとより大きな波数でパワースペクトルが落ちることが分かる。また、ハロー質量を大きくすると、波数が小さな領域でパワースペクトルの振幅が小さくなることが分かる。前者の振る舞いは以下のようにして理解できる。式 5.36 から、パワースペクトルは  $k \simeq 1/\lambda_c$  で落ちる。 $M_{\text{tot}} \propto M_h$ 、 $R_{\text{vir}} \propto M_h^{1/3}$  と評価できるので、式 5.35 から  $v \propto M_h^{1/3}$  となる。結果としてドブロイ波長は  $\lambda_c \propto M_h^{-1/3}$  とスケールすることが分かり、パワースペクトルが落ちる波数は FDM 質量  $m$  を固定した条件下でも変化することが分かる。また後者については、 $r_{\text{NFW}}(x) \propto R_{\text{vir}}$  と評価できるので、平らな領域では  $P(k) \propto \lambda_c^3/r_h(x) \propto M_h^{-4/3}$  となる。また波数が小さい領域でパワースペクトルが一定の値を取る理由は、実空間における遠い距離での密度は無相関 (ランダム) であるためである。これについては、パワースペクトルが相関関数のフーリエ変換で与えられることと、ステップ関数のフーリエ変換の様子を考えると理解できる。

この結果は定性的に以下のようにも理解することができる。実空間における質量分散  $\sigma_\delta^2$  は、

$$\sigma_\delta^2 \simeq \int d^2k P(k) \simeq \mathcal{O}\left(\frac{\lambda_c}{r_h}\right) \simeq \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad (5.37)$$

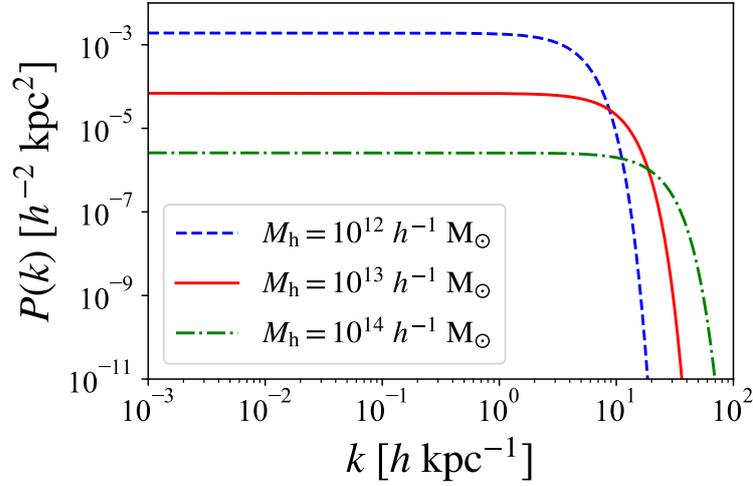


図 5.2: 小スケール物質パワースペクトルのハロー質量依存性を示した図。銀河・ハロー質量比  $M_s/M_h$  と FDM 質量  $m$  はそれぞれ、 $M_s/M_h = 0.01$ ,  $m = 10^{-22} \text{eV}$  に固定した。位置  $x$  は各ハローのビリアル半径の  $1/100$  とした。この半径はおよそ 5.3 節で注目する Einstein 半径程度である。また、それぞれの場合において位置  $x$  は、ソリトンコアと NFW プロファイルの境界半径 (Schive et al. 2014a) よりも大きい。

と計算できる。ここで、 $N \simeq r_h/\lambda_c$  は視線方向に存在する粒状構造の個数である。式 5.37 から、視線方向の密度揺らぎは  $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$  と評価できる。これは、個々の粒状構造が生成する密度揺らぎを  $\mathcal{O}(1)$  とした時に、 $N$  個の粒状構造によって揺らぎが平均化されたときの描像と一致する。ハロー質量が大きくなるとビリアル半径も大きくなるため、視線方向に存在する粒状構造の個数が多くなる。その結果揺らぎが平均化され、パワースペクトルの振幅が小さくなると理解できる。

図 5.3 はパワースペクトルの FDM 質量依存性を示したものである。この図から FDM 質量を大きくすると、より大きな波数でパワースペクトルが落ち、波数が小さい領域では振幅が小さくなることが分かる。FDM 質量とドブロイ波長は  $\lambda_c \propto m^{-1}$  の関係で結びついているので、パワースペクトルの振幅は  $P(k) \propto m^{-3}$ 、落ちるスケールは  $k \propto m$  となる。定性的には、以下のように理解できる。FDM 質量を大きくするにつれてドブロイ波長が小さくなり、視線方向に存在する粒状構造の個数が多くなる。その結果パワースペクトルの振幅が小さくなると考えられる。以上の結果から分かるように、小スケール物質パワースペクトルは FDM 質量に敏感であることが分かった。従って、FDM モデルを研究するにあたって小スケール物質パワースペクトルを用いる手法は非常に有用であると考えられる。

また、Hezaveh et al. (2016) の図 1 では、CDM サブハローによる小スケール物質パワースペクトルの振幅は、 $10^{-6} h^{-2} \text{kpc}^2$  程度となることが示されている。従って、典型的な FDM 質量に対して FDM ハローの小スケール物質パワースペクトルは、CDM ハローの場合と同等かそれ以上であることが分かる (Chan et al. (2020) も参照)。これにより、小スケール物質パワースペクトルを用いることで、我々が興味ある FDM 質量付近に対して制限がかけられることを示唆している。これに関しては、5.3 節で述べる。

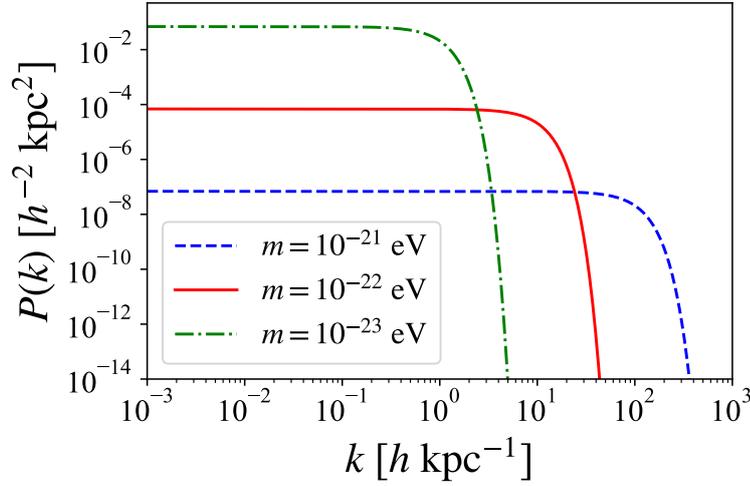


図 5.3: 小スケール物質パワースペクトルの FDM 質量依存性を示した図。他の 3 パラメータに関しては、ハロー質量は  $M_h = 10^{13} h^{-1} M_\odot$ 、銀河・ハロー質量比は  $M_s/M_h = 0.01$ 、位置  $x$  はビリアル半径の  $1/100$  とし、 $x = 4.4 h^{-1} \text{ kpc}$  とし、これら全て固定しプロットした。またソリトンコアの境界半径は、FDM 質量  $m = 10^{-21}, 10^{-22}, 10^{-23} \text{ eV}$  に対し、 $3r_c = 0.014, 0.14, 1.4 h^{-1} \text{ kpc}$  と計算できる (Schive et al. 2014a)。位置  $x$  はこれらの値より大きいことが分かる。

### 5.3 強重力レンズ系から得られたパワースペクトルとの比較

5.2.5 節で述べた定式化に基づいて、本節では実際の観測から得られた小スケール物質パワースペクトルとの比較を行い、FDM 質量に制限を与える。まず初めに、ハッブル宇宙望遠鏡で観測された強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 (Auger et al. 2009) から得られた小スケール物質パワースペクトルの制限 (Bayer et al. 2018) を使い、FDM 質量制限を議論する。次に、ALMA 望遠鏡を用いた将来の観測から期待される制限 (Hezaveh et al. 2016) を使って、同様に質量制限を議論する。本節ではまず 5.3.1 節で無次元収束場パワースペクトルを導入する。そして現在の観測データを用いた質量制限に関して 5.3.2 節で、将来の制限について 5.3.3 節で述べる。

#### 5.3.1 無次元収束場パワースペクトル

我々が以下で観測データと比較する際、無次元収束場パワースペクトルを持ちて議論するため、ここで導入する。背景天体とレンズ天体の角径距離がそれぞれ  $D_s, D_d$  とし、レンズ天体から背景天体を見た時の角径距離が  $D_{ds}$  となっている強重力レンズ系を考える。この時、臨界面密度  $\Sigma_{\text{cr}}$  は、

$$\Sigma_{\text{cr}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \quad (5.38)$$

で与えられる。ここでは自然単位系から戻して表記した。この臨界面密度と式 5.31 で与えられる射影密度場から、収束場  $\kappa(\boldsymbol{x})$  を

$$\kappa(\boldsymbol{x}) = \frac{\Sigma(\boldsymbol{x})}{\Sigma_{\text{cr}}} \quad (5.39)$$

と求められる。収束場パワースペクトルは、

$$\langle \tilde{\kappa}_{\boldsymbol{k}} \tilde{\kappa}_{\boldsymbol{k}'} \rangle \equiv S_{\epsilon} \delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}', \mathbf{0}}^{(2)} P_{\delta\kappa}(k), \quad (5.40)$$

で定義される。ここで、 $\tilde{\kappa}$  は収束場の 2 次元フーリエ変換である。さらに、無次元収束場パワースペクトルは、

$$\Delta_{\delta\kappa}^2(k) = 2\pi k^2 P_{\delta\kappa}(k) \quad (5.41)$$

で定義される。これらの関係式から、無次元収束場パワースペクトルと、5.2.4 節で議論した小スケール物質パワースペクトルの関係式は、

$$\Delta_{\delta\kappa}^2(k) = 2\pi k^2 \left( \frac{\Sigma(x)}{\Sigma_{\text{cr}}} \right)^2 P(k) \quad (5.42)$$

となることが分かる。我々はこの関係式を用いて、観測で得られた無次元収束場パワースペクトルと理論モデルの比較を行う。

### 5.3.2 現在の観測結果から得られる FDM 質量制限

Auger et al. (2009) の表 3,4 から、SDSS J0252+0039 に関する情報を得ることができる。レンズ銀河と背景銀河の赤方偏移はそれぞれ、 $z_{\text{lens}} = 0.280$  と  $z_{\text{src}} = 0.982$  である。ここから、臨界面密度は式 5.38 から計算することができ、 $\Sigma_{\text{cr}} = 4.0 \times 10^9 h M_{\odot} \text{ kpc}^{-1}$  と求まる。我々の理論モデルを用いて無次元収束場パワースペクトルを計算し FDM 質量制限を行うためには、NFW プロファイルと Hernquist プロファイル、および位置  $x$  を決める必要がある。Hernquist プロファイルに関して、銀河質量は  $M_s^{\text{Salp}} = 2.0 \times 10^{11} h^{-1} M_{\odot}$ 、スケール半径は  $a = 2.34 h^{-1} \text{ kpc}$  (Auger et al. 2009) を用いた。ここで、 $M_s^{\text{Salp}}$  は Salpeter 推定法を用いて得られた銀河質量を表す。またスケール半径  $a$  は  $I$  バンド (806 nm 付近) による特性半径  $r_e$  の観測から、 $a = r_e/1.8153$  の関係式を用いて求めた。

NFW プロファイルは以下のように決めた。強重力レンズ系の観測から Einstein 半径は  $r_{\text{Ein}} = 3.1 h^{-1} \text{ kpc}$ 、またその半径内のバリオン量の割合が、 $f_{\text{Ein}}^{\text{Salp}} = 0.71$  と分かっている。また、既にバリオン分布は分かっているので、Einstein 半径内でのバリオン量の割合が一致するように NFW プロファイル (ハロー質量) を決定することができる。その結果、ハロー質量は  $M_h = 6.3 \times 10^{12} h^{-1} M_{\odot}$  と求められた。最後に、位置  $x$  は Einstein 半径に設定し、 $x = 3.1 h^{-1} \text{ kpc}$  とした。

図 5.4 に結果を示した。橙色の領域は、Bayer et al. (2018) によって得られた小スケール物質パ

ワースペクトルの  $2\sigma$  の禁止領域を表している。この禁止領域は、0.5 kpc の波長で  $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 0.67$ 、1 kpc の波長で  $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 0.067$ 、3 kpc の波長で  $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 0.0067$  となっている。この図から、FDM 質量に関して何の制限も得られないことが分かる。この理由としては、5.1 節で述べたように、Bayer et al. (2018) による制限は保守的であることが挙げられる。

### 5.3.3 将来の観測結果から得られる FDM 質量制限

図 5.4 の黒色の領域は、将来の ALMA 望遠鏡による  $z = 0.5$  に存在するレンズ天体の観測で、 $2\sigma$  の検出精度でシグナルが受からなかった（検出されなかった）場合の小スケール物質パワースペクトルの禁止領域 (Hezaveh et al. 2016) を表している。これは、Hezaveh et al. (2016) による模擬観測の結果得られた誤差棒を用いて推定したものである。レンズ天体の赤方偏移が厳密には異なるが、ここでは補正効果は無視して比較を行っている。その結果、将来の ALMA 望遠鏡による SDSS J0252+0039-like な強重力レンズ系の観測で、もしシグナルが受からなかった場合、FDM 質量として  $m \lesssim 1.8 \times 10^{-22}$  eV ( $2\sigma$  信頼度) は、除外されることが分かった。この禁止領域から FDM 質量に関して下限値も得られることも分かる。またこの図から次のようなことも言える。もし FDM が正しいダークマターモデルで、その質量が  $m = 3.0 \times 10^{-23}$  eV (青線) であった場合、シグナルは  $S/N \simeq 200$  でシグナルが見つかることも予測される。逆に  $S/N \simeq 200$  で見つかった場合、CDM ハローの小スケール物質パワースペクトルより非常に大きな値となるため、CDM より FDM が正しいダークマターモデルであることが示唆される。

また図 5.4 で、黒色と橙色の波数領域は異なるが、これは以下の理由によるものである。一般に強重力レンズ系の観測から小スケール物質パワースペクトルを推定する時に探索可能な波数領域は、最小波数がアークの大きさ ( $\simeq$  Einstein 半径)、最大波数が観測機器の分解能である。しかしここでは黒色および橙色の領域を示すにあたって、先行研究で与えられた波数のみを用いてプロットしている。そのため、実際はより広範囲の波数を調べられるはずであるが、このプロットでは一部の領域だけとなっている。また黒色の領域に関しては、上述したようにレンズ天体として  $z = 0.5$  に存在するものから推定した領域なので、 $z = 0.280$  に補正すると分解能が上がることを期待される。その結果、黒色領域の右端がより小さい波数領域に伸びると考える。さらに  $S/N$  比も上がるため、制限の上限値が下がることも期待される。

最後に、将来の SDSS J0252+0039-like な強重力レンズ系の観測による無次元収束場パワースペクトルの値と、シグナルが受からなかった場合に除外される FDM 質量領域を議論する。図 5.5 は、揺らぎの波長が 3 kpc における無次元収束場パワースペクトルと FDM 質量制限を示した図になっている。この結果から、将来の観測・解析から典型的な FDM 質量周りに制限がかけられることが分かる。ここでは、特に 3 kpc の波長に注目したが、他の波長帯でも同様に議論できる。図 5.4 に見られる FDM 質量依存性から、大きい波長帯におけるパワースペクトルが得られると、FDM 質量として小さい値に関する制限が付けられることが分かる。一方で、小さい波長帯に関するパワースペクトルの制限が得られると、より大きな質量に関して制限がかけられる。

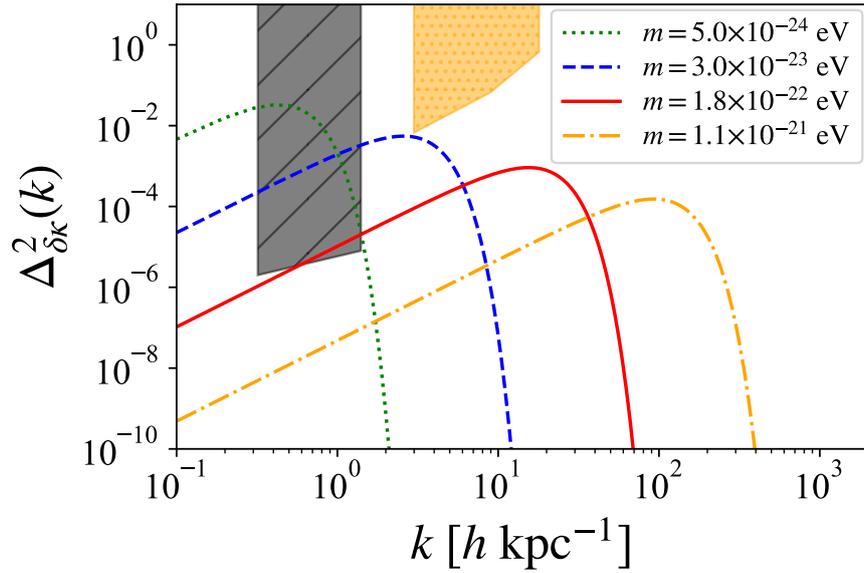


図 5.4: 理論モデルと現在および将来の観測から得られる無次元収束場パワースペクトルの比較。橙色の領域は、強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 の観測から得られた  $2\sigma$  の禁止領域である (Bayer et al. 2018)。ただし Bayer et al. (2018) では、3 点の波数のみで上限値が得られているため、このプロットの際にはそれらを結び橙色の領域とした。黒色の領域は、ALMA 望遠鏡を用いて  $z = 0.5$  に存在する 1 つのレンズ天体を 10 時間程度観測し、 $2\sigma$  の検出精度でシグナルが受からなかった場合に禁止される領域である (Hezaveh et al. 2016)。これは Hezaveh et al. (2016) の模擬観測による誤差棒の大きさからプロットしたものである。レンズ天体の赤方偏移が厳密には異なるが、ここでは補正効果は無視して比較を行っている。理論線は強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 から得られたパラメータを用いてプロットしたものである。ハロー質量を  $M_h = 6.3 \times 10^{12} h^{-1} M_\odot$  として NFW プロファイル、銀河質量を  $M_s^{\text{Salp}} = 2.0 \times 10^{11} h^{-1} M_\odot$ 、スケール半径を  $a = 2.34 h^{-1} \text{ kpc}$  として Hernquist プロファイルを与え、位置は Einstein 半径  $x = 3.1 h^{-1} \text{ kpc}$  とした。FDM 質量を  $m = 5 \times 10^{-24} - 1.1 \times 10^{-21} \text{ eV}$  の範囲で動かして、プロットした。

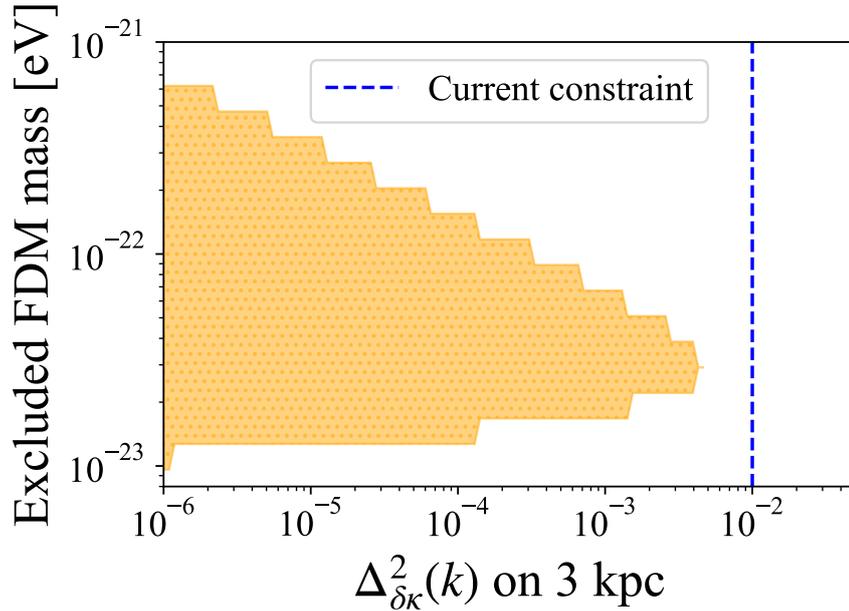


図 5.5: 揺らぎの波長 3 kpc の無次元収束場パワースペクトルに対する FDM 質量の除外領域をプロットした図。ここでは SDSS J0252+0039-like の強重力レンズ系を考え、パラメータは図 5.4 と同じものを使用した。

## 5.4 まとめと議論

本研究では、まず FDM ハローの小スケール物質パワースペクトルの理論モデルを構築した。ここで FDM ハローは、ドブロイ波長の大きさの粒状構造で構成されており、FDM の分布はその重ね合わせで記述されるものとした。強重力レンズ系の観測と直接比較するために、視線方向に射影した密度場における小スケール物質パワースペクトルを計算した。この小スケール物質パワースペクトルは FDM 質量に対して敏感であり、FDM モデルを調べる際に非常に有用な手法であることが分かった。次に、我々の理論モデルと銀河-銀河の強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 から得られている小スケール物質パワースペクトルの比較を行い、FDM 質量制限を議論した。Bayer et al. (2018) で得られた制限は保守的な制限であり、FDM 質量に対して何ら制限を与えられなかった。しかし ALMA 望遠鏡を用いた将来の観測から、 $10^{-22}$  eV 程度付近の興味深い FDM 質量帯に対して制限がかけられることが分かった。

本研究で構築した理論モデルの妥当性を将来的に確かめる必要がある。これには FDM シミュレーション結果を用意し、3次元の小スケール物質パワースペクトルを用いて照らし合わせるのが良いと考えられる。また、FDM モデルをより詳しく議論するためには、より多くの系で小スケール物質パワースペクトルの解析をする必要がある。これらを今後の研究として残してまとめとする。

## 第6章 総括

### まとめ

本修士論文では、CDM モデルを仮定した標準宇宙モデルと小スケール問題およびその解決策、FDM に関する 2 つの研究成果について述べた。1 つ目は「ソリトンコアにより銀河の回転曲線の多様性問題が解決できるか」に注目し、FDM ハローの大域的密度プロファイルに関する理論モデルの構築を行った。ここでは力学的考察に基づいて、FDM シミュレーションで得られたコア・ハロー質量関係と一致するようなモデル構築を行った。その結果、ハロー質量を与えた時に、静水圧平衡条件および緩和時間条件を用いてコア半径を決定し、境界半径はそれぞれの条件から得られたコア半径の 2.25 倍、0.31 倍とすれば良いことが分かった。また、FDM シミュレーションで確認されているコア・ハロー質量関係の分散は、NFW プロファイルの質量集中度の内部分散に落とし込めることが分かった。2 つ目は「粒状構造が生む小スケール物質パワースペクトル」に注目し、強重力レンズ系の解析から得られた制限と比較した。まず、FDM ハロープロファイルはドブロイ波長程度の大きさの粒状構造の重ね合わせで表せるものとし、粒状構造を考慮した FDM ハロープロファイルモデルの構築を行った。この理論モデルを用いて FDM ハローの小スケール物質パワースペクトルを計算したところ、FDM 質量依存性が大きいことが明らかになり、FDM モデルを議論するのに非常に有用な手法であることが分かった。また、ハッブル望遠鏡によって観測された強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 の解析から得られた小スケール物質パワースペクトルと比較したところ、FDM 質量に制限が設けられなかった。一方で、ALMA 望遠鏡を用いた将来の観測からは質量  $m \simeq 10^{-22}$  eV 付近に厳しい制限がかけられることが分かった。

### 今後のダークマター研究の展望

2014 年に初めて FDM モデルを仮定した宇宙論的シミュレーションが開発されたこと (Schive et al. 2014b) により、構造形成の様子が明らかになり、それを元に様々な観測対象から FDM 質量の制限が与えられてきた。しかし、バリオン物理などの不定性があるものの、全ての観測結果に無矛盾な FDM 質量帯は存在しない (3.3 節)。これは、WDM や SIDM などの他のダークマターモデルについても同様である。そこで観測的宇宙論におけるダークマターの研究は、今後以下の 3 つの研究が盛んになると考えている。1 つ目は、ダークマターとして複数の成分を考えるような研究である。既に WDM と CDM の 2 成分によるシミュレーションは行われており、Lyman- $\alpha$  forest の観測と比較されている (Macciò et al. 2013)。また、FDM と CDM の 2 成分によるシミュレーションも近年開発された (Schwabe et al. 2020)。特に後者に関しては、超弦理論から同時に多数の粒子が生成されると考えられているため、well-motivated な分野と言える (A.3.2 節)。従来の制

限の多くは、ダークマターとして1つの成分に限ったものが多く、今後このように複数の成分を考慮した研究が盛んになると考えている。2つ目は、バリオン物理のさらなる理解である。本研究では、小スケール問題の解決策としてダークマターモデルの変更を主に考えてきたが、星形成や超新星爆発といったバリオン物理によっても解決される可能性があることが示唆されている (2.3.1 節)。これまでにバリオン物理を考慮したシミュレーションも多数開発されており、例えば CDM モデルでは Hopkins et al. (2018); Tollet et al. (2016)、FDM モデルでは Veltmaat et al. (2020) などが挙げられる。後者は box サイズが 2.5 Mpc 程度で宇宙論的シミュレーションではないため、FDM モデルにおけるバリオン物理の効果の理解が限定的となっている。従って今後、FDM などの non-CDM モデルにおいてもバリオン物理の効果を理解すべく、シミュレーションの開発がより盛んに行われると考えている。3つ目として、膨大な観測データの解析が主流になる可能性を指摘する。数十年前に比べ観測技術が向上し、現在ではより精度の高い観測データを手に入れることに成功している。この試みはさらに続くと期待され、直近では 2023 年度に始動する PFS サーベイもそのうちの一つに数えられる。このように、精密観測で得られた新たな観測データを解析することで、ダークマターの性質をより正確に捉え、ダークマターを解明しようとする試みが加速すると考えている。

## 本修士論文の意義

我々は小スケール問題の解決策として FDM モデルに注目してきたが、そもそも小スケール問題はバリオン物理によって解決される場合や、宇宙に FDM は存在しない場合も考えられる。しかし、FDM ハローに関する理論モデルを構築し観測結果と比較した我々の研究は、将来のダークマター研究に重要な役割を与えると考えている。実際、ソリトンコアの NFW-like プロファイルの境界付近で働く物理を理解すれば、回転曲線の観測の精度としてどの程度必要になるのかを予想することができる。また、小スケール物質パワースペクトルのさらなる解析が FDM モデルの重要な手がかりになることも分かった。このように我々の研究結果から、求める観測精度や観測対象を決定することができる。また、もし FDM が正しいダークマターモデルでなかった場合にも、バリオン物理の重要性の再認識、ALP の存在の有無などの素粒子標準模型を超えた物理の制限に繋がることを期待される。以上のように、我々の研究成果は今後宇宙のさらなる理解の手助けとなるのみならず、素粒子理論の理解にも繋がる可能性があり、重要な研究成果であると言える。

## 謝辞

吉田直紀研究室に配属されてから2年間、非常にたくさんの方にお世話になりました。まず、寛大なご支援をしてくださった指導教官の吉田直紀教授に心より感謝申し上げます。学部4年生の頃に機械学習を用いた重力レンズマップのノイズ除去に関するテーマを与えて下さったものの、修士入学してから他の分野をやりたいとお伝えして相談に乗ってくださったことには感謝しかありません。今FDMの研究を行っているのも、吉田教授のおかげです。また、ソリトンコアと多様性問題に関する研究ミーティングでは、普段から貴重なご意見・アドバイスして頂きました。さらに、本修士論文の執筆や審査会発表練習においても、考察するポイント・修正点など、自分では気が付かないような箇所をご教授頂きました。感謝申し上げます。

粒状構造と小スケール物質パワースペクトルに関するテーマは、大栗助教に大変お世話になりました。大栗助教には、毎週ミーティングを開いてくださり、研究の取り組み方から論文の書き方、投稿の仕方まで、全て教わりました。また、小スケール物質パワースペクトルの理論モデルの計算の際には、バリオン分布をどのように与えるのかといった議論等、鋭い洞察力に感銘を受けました。修士2年時に論文を投稿でき、自信がつけることが出来たのは大栗助教のご支援があったからこそです。感謝申し上げます。

ワルシャワ大学所属の鎌田歩樹さんには、普段のミーティングから大変お世話になりました。FDMに関する基礎理論から、研究テーマの選定、またミーティングへの取り組み方や研究方針の決定まで、非常にお世話になりました。時には僕に足りない点を厳しく伝えて下さり、自分が1人の研究者であることを強く実感すると共に、物理への姿勢というものを学ばせて頂きました。感謝申し上げます。

鎌田耕平助教、Tilman助教、檜山助教には日頃から大変お世話になりました。鎌田耕平助教は、論文の計算が合わない時に4-5時間にわたりつきっきりで考えてくださりました。また研究室の忘年会では研究の悩み相談に乗って下さいました。大変感謝しております。Tilman助教には、プログラムがうまくいかない時の解決や、MCMC法・機械学習の解説など、非常に有用なアドバイスや講義をして下さいました。感謝しております。檜山助教には研究室で普段からお声をかけてくださり、心地よく研究室に通うことができました。また審査会直前は、理解が不十分な点を納得いくまで議論して下さり、非常に勉強になりました。感謝申し上げます。

修士論文審査会においては、カブリIPMU所属の松本教授、宇宙線研究所所属の川崎教授には大変お世話になりました。松本教授のご質問を通して、これまで理解が不十分であったソリトンコアおよび粒状構造のイメージが掴むことができました。川崎教授には、粒状構造の制限に関して鋭い洞察を与えてくださり、大変勉強になりました。感謝申し上げます。

また、吉田研のメンバー、ゼミを一緒に行なってくれた他研究室の同期、学部時代からの友達には感謝しかありません。最後に、これまで生活を支えてくださった家族に感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] Alam, S. M. K., Bullock, J. S., and Weinberg, D. H. 2002 “Dark Matter Properties and Halo Central Densities,” *ApJ* **572**, No. 1, 34-40, DOI: [10.1086/340190](https://doi.org/10.1086/340190).
- [2] Anderhalden, D., Schneider, A., Macciò, A. V., Diemand, J., and Bertone, G. 2013 “Hints on the nature of dark matter from the properties of Milky Way satellites,” *J. Cosmology Astropart. Phys.* **2013**, No. 3, 014, DOI: [10.1088/1475-7516/2013/03/014](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/03/014).
- [3] Armengaud, E., Palanque-Delabrouille, N., Yèche, C., Marsh, D. J. E., and Baur, J. 2017 “Constraining the mass of light bosonic dark matter using SDSS Lyman- $\alpha$  forest,” *MNRAS* **471**, No. 4, 4606-4614, DOI: [10.1093/mnras/stx1870](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1870).
- [4] Arvanitaki, A., Dimopoulos, S., Dubovsky, S., Kaloper, N., and March-Russell, J. 2010 “String axiverse,” *Phys. Rev. D* **81**, No. 12, 123530, DOI: [10.1103/PhysRevD.81.123530](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.123530).
- [5] Auger, M. W., Treu, T., Bolton, A. S., Gavazzi, R., Koopmans, L. V. E., Marshall, P. J., Bundy, K., and Moustakas, L. A. 2009 “The Sloan Lens ACS Survey. IX. Colors, Lensing, and Stellar Masses of Early-Type Galaxies,” *ApJ* **705**, No. 2, 1099-1115, DOI: [10.1088/0004-637X/705/2/1099](https://doi.org/10.1088/0004-637X/705/2/1099).
- [6] Baldry, I. K., Driver, S. P., Loveday, J. et al. 2012 “Galaxy And Mass Assembly (GAMA): the galaxy stellar mass function at  $z \leq 0.06$ ,” *MNRAS* **421**, No. 1, 621-634, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20340.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20340.x).
- [7] Banik, N., Bovy, J., Bertone, G., Erkal, D., and de Boer, T. J. L. 2021 “Novel constraints on the particle nature of dark matter from stellar streams,” *J. Cosmology Astropart. Phys.* **2021**, No. 10, 043, DOI: [10.1088/1475-7516/2021/10/043](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/10/043).
- [8] Bar, N., Blas, D., Blum, K., and Sibiryakov, S. 2018 “Galactic rotation curves versus ultralight dark matter: Implications of the soliton-host halo relation,” *Phys. Rev. D* **98**, No. 8, 083027, DOI: [10.1103/PhysRevD.98.083027](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.083027).
- [9] Bayer, D., Chatterjee, S., Koopmans, L. V. E., Vegetti, S., McKean, J. P., Treu, T., and Fassnacht, C. D. 2018 “Observational constraints on the sub-galactic matter-power spectrum from galaxy-galaxy strong gravitational lensing,” *arXiv e-prints*, arXiv:1803.05952.
- [10] Behroozi, P. S., Wechsler, R. H., and Conroy, C. 2013 “The Average Star Formation Histories of Galaxies in Dark Matter Halos from  $z = 0-8$ ,” *ApJ* **770**, No. 1, 57, DOI: [10.1088/0004-637X/770/1/57](https://doi.org/10.1088/0004-637X/770/1/57).

- 
- [11] Benito, M., Criado, J. C., Hütsi, G., Raidal, M., and Veermäe, H. 2020 “Implications of Milky Way substructures for the nature of dark matter,” *Phys. Rev. D* **101**, No. 10, 103023, DOI: [10.1103/PhysRevD.101.103023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.103023).
- [12] Bertone, G., Hooper, D., and Silk, J. 2005 “Particle dark matter: evidence, candidates and constraints,” *Phys. Rep.* **405**, No. 5-6, 279-390, DOI: [10.1016/j.physrep.2004.08.031](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031).
- [13] Binggeli, B., Sandage, A., and Tammann, G. A. 1985 “Studies of the Virgo cluster. II. A catalog of 2096 galaxies in the Virgo cluster area.,” *AJ* **90**, 1681-1758, DOI: [10.1086/113874](https://doi.org/10.1086/113874).
- [14] Binney, J. and Tremaine, S. 1987 *Galactic dynamics*.
- [15] Bode, P., Ostriker, J. P., and Turok, N. 2001 “Halo Formation in Warm Dark Matter Models,” *ApJ* **556**, No. 1, 93-107, DOI: [10.1086/321541](https://doi.org/10.1086/321541).
- [16] Bonometto, S. A. and Valdarnini, R. 1985 “Microwave background anisotropies, large-scale peculiar velocity fields, and clustering evolution in a warm-hot dark matter cosmological model,” *ApJ* **299**, L71-L75, DOI: [10.1086/184583](https://doi.org/10.1086/184583).
- [17] Boylan-Kolchin, M., Bullock, J. S., and Kaplinghat, M. 2011 “Too big to fail? The puzzling darkness of massive Milky Way subhaloes,” *MNRAS* **415**, No. 1, L40-L44, DOI: [10.1111/j.1745-3933.2011.01074.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2011.01074.x).
- [18] ——— 2012 “The Milky Way’s bright satellites as an apparent failure of  $\Lambda$ CDM,” *MNRAS* **422**, No. 2, 1203-1218, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20695.x).
- [19] Brook, C. B., Di Cintio, A., Knebe, A., Gottlöber, S., Hoffman, Y., Yepes, G., and Garrison-Kimmel, S. 2014 “The Stellar-to-halo Mass Relation for Local Group Galaxies,” *ApJ* **784**, No. 1, L14, DOI: [10.1088/2041-8205/784/1/L14](https://doi.org/10.1088/2041-8205/784/1/L14).
- [20] Bryan, G. L. and Norman, M. L. 1998 “Statistical Properties of X-Ray Clusters: Analytic and Numerical Comparisons,” *ApJ* **495**, No. 1, 80-99, DOI: [10.1086/305262](https://doi.org/10.1086/305262).
- [21] Bullock, J. S., Kolatt, T. S., Sigad, Y., Somerville, R. S., Kravtsov, A. V., Klypin, A. A., Primack, J. R., and Dekel, A. 2001 “Profiles of dark haloes: evolution, scatter and environment,” *MNRAS* **321**, No. 3, 559-575, DOI: [10.1046/j.1365-8711.2001.04068.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04068.x).
- [22] Bullock, J. S. and Boylan-Kolchin, M. 2017 “Small-Scale Challenges to the  $\Lambda$ CDM Paradigm,” *ARA&A* **55**, No. 1, 343-387, DOI: [10.1146/annurev-astro-091916-055313](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-091916-055313).
- [23] Carlson, E. D., Machacek, M. E., and Hall, L. J. 1992 “Self-interacting Dark Matter,” *ApJ* **398**, 43, DOI: [10.1086/171833](https://doi.org/10.1086/171833).
- [24] Chabanier, S., Millea, M., and Palanque-Delabrouille, N. 2019 “Matter power spectrum: from Ly  $\alpha$  forest to CMB scales,” *MNRAS* **489**, No. 2, 2247-2253, DOI: [10.1093/mnras/stz2310](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2310).

- 
- [25] Chan, J. H. H., Schive, H.-Y., Wong, S.-K., Chiueh, T., and Broadhurst, T. 2020 “Multiple Images and Flux Ratio Anomaly of Fuzzy Gravitational Lenses,” *Phys. Rev. Lett.* **125**, No. 11, 111102, DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.111102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.111102).
- [26] Chen, S.-R., Schive, H.-Y., and Chiueh, T. 2017 “Jeans analysis for dwarf spheroidal galaxies in wave dark matter,” *MNRAS* **468**, No. 2, 1338-1348, DOI: [10.1093/mnras/stx449](https://doi.org/10.1093/mnras/stx449).
- [27] Cristofari, P. and Ostriker, J. P. 2019 “Abundance matching for low-mass galaxies in the CDM and FDM models,” *MNRAS* **482**, No. 4, 4364-4371, DOI: [10.1093/mnras/sty2966](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2966).
- [28] Dalal, N., Bovy, J., Hui, L., and Li, X. 2021 “Don’t cross the streams: caustics from fuzzy dark matter,” *J. Cosmology Astropart. Phys.* **2021**, No. 3, 076, DOI: [10.1088/1475-7516/2021/03/076](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/03/076).
- [29] Davies, E. Y. and Mocz, P. 2020 “Fuzzy dark matter soliton cores around supermassive black holes,” *MNRAS* **492**, No. 4, 5721-5729, DOI: [10.1093/mnras/staa202](https://doi.org/10.1093/mnras/staa202).
- [30] de Blok, W. J. G. 2010 “The Core-Cusp Problem,” *Advances in Astronomy* **2010**, 789293, DOI: [10.1155/2010/789293](https://doi.org/10.1155/2010/789293).
- [31] de Blok, W. J. G. and Bosma, A. 2002 “High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies,” *A&A* **385**, 816-846, DOI: [10.1051/0004-6361:20020080](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020080).
- [32] de Blok, W. J. G., McGaugh, S. S., and Rubin, V. C. 2001 “High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. II. Mass Models,” *AJ* **122**, No. 5, 2396-2427, DOI: [10.1086/323450](https://doi.org/10.1086/323450).
- [33] Di Cintio, A., Brook, C. B., Dutton, A. A., Macciò, A. V., Stinson, G. S., and Knebe, A. 2014 “A mass-dependent density profile for dark matter haloes including the influence of galaxy formation,” *MNRAS* **441**, No. 4, 2986-2995, DOI: [10.1093/mnras/stu729](https://doi.org/10.1093/mnras/stu729).
- [34] Diaz Rivero, A., Cyr-Racine, F.-Y., and Dvorkin, C. 2018 “Power spectrum of dark matter substructure in strong gravitational lenses,” *Phys. Rev. D* **97**, No. 2, 023001, DOI: [10.1103/PhysRevD.97.023001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.023001).
- [35] Diemand, J., Kuhlen, M., Madau, P., Zemp, M., Moore, B., Potter, D., and Stadel, J. 2008 “Clumps and streams in the local dark matter distribution,” *Nature* **454**, No. 7205, 735-738, DOI: [10.1038/nature07153](https://doi.org/10.1038/nature07153).
- [36] Diemer, B. 2018 “COLOSSUS: A Python Toolkit for Cosmology, Large-scale Structure, and Dark Matter Halos,” *ApJS* **239**, No. 2, 35, DOI: [10.3847/1538-4365/aee8c](https://doi.org/10.3847/1538-4365/aee8c).
- [37] Dodelson, S. 2003 *Modern cosmology*.
- [38] Drlica-Wagner, A., Bechtol, K., Rykoff, E. S. et al. 2015 “Eight Ultra-faint Galaxy Candidates Discovered in Year Two of the Dark Energy Survey,” *ApJ* **813**, No. 2, 109, DOI: [10.1088/0004-637X/813/2/109](https://doi.org/10.1088/0004-637X/813/2/109).

- 
- [39] Dutton, A. A., Macciò, A. V., Frings, J., Wang, L., Stinson, G. S., Penzo, C., and Kang, X. 2016 “NIHAO V: too big does not fail - reconciling the conflict between  $\Lambda$ CDM predictions and the circular velocities of nearby field galaxies,” *MNRAS* **457**, No. 1, L74-L78, DOI: [10.1093/mnras/slv193](https://doi.org/10.1093/mnras/slv193).
- [40] Elbert, O. D., Bullock, J. S., Garrison-Kimmel, S., Rocha, M., Oñorbe, J., and Peter, A. H. G. 2015 “Core formation in dwarf haloes with self-interacting dark matter: no fine-tuning necessary,” *MNRAS* **453**, No. 1, 29-37, DOI: [10.1093/mnras/stv1470](https://doi.org/10.1093/mnras/stv1470).
- [41] Fattahi, A., Navarro, J. F., Sawala, T. et al. 2016 “The APOSTLE project: Local Group kinematic mass constraints and simulation candidate selection,” *MNRAS* **457**, No. 1, 844-856, DOI: [10.1093/mnras/stv2970](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2970).
- [42] Ferreira, E. G. M. 2020 “Ultra-Light Dark Matter,” *arXiv e-prints*, arXiv:2005.03254.
- [43] Flores, R. A. and Primack, J. R. 1994 “Observational and Theoretical Constraints on Singular Dark Matter Halos,” *ApJ* **427**, L1, DOI: [10.1086/187350](https://doi.org/10.1086/187350).
- [44] Fry, A. B., Governato, F., Pontzen, A. et al. 2015 “All about baryons: revisiting SIDM predictions at small halo masses,” *MNRAS* **452**, No. 2, 1468-1479, DOI: [10.1093/mnras/stv1330](https://doi.org/10.1093/mnras/stv1330).
- [45] González-Morales, A. X., Marsh, D. J. E., Peñarrubia, J., and Ureña-López, L. A. 2017 “Unbiased constraints on ultralight axion mass from dwarf spheroidal galaxies,” *MNRAS* **472**, No. 2, 1346-1360, DOI: [10.1093/mnras/stx1941](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1941).
- [46] Governato, F., Zolotov, A., Pontzen, A. et al. 2012 “Cuspy no more: how outflows affect the central dark matter and baryon distribution in  $\Lambda$  cold dark matter galaxies,” *MNRAS* **422**, No. 2, 1231-1240, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.20696.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20696.x).
- [47] Hargis, J. R., Willman, B., and Peter, A. H. G. 2014 “Too Many, Too Few, or Just Right? The Predicted Number and Distribution of Milky Way Dwarf Galaxies,” *ApJ* **795**, No. 1, L13, DOI: [10.1088/2041-8205/795/1/L13](https://doi.org/10.1088/2041-8205/795/1/L13).
- [48] Hayashi, K., Ferreira, E. G. M., and Chan, H. Y. J. 2021 “Narrowing the Mass Range of Fuzzy Dark Matter with Ultrafaint Dwarfs,” *ApJ* **912**, No. 1, L3, DOI: [10.3847/2041-8213/abf501](https://doi.org/10.3847/2041-8213/abf501).
- [49] Hernquist, L. 1990 “An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges,” *ApJ* **356**, 359, DOI: [10.1086/168845](https://doi.org/10.1086/168845).
- [50] Hezaveh, Y., Dalal, N., Holder, G., Kisner, T., Kuhlen, M., and Perreault Levasseur, L. 2016 “Measuring the power spectrum of dark matter substructure using strong gravitational lensing,” *J. Cosmology Astropart. Phys.* **2016**, No. 11, 048, DOI: [10.1088/1475-7516/2016/11/048](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/11/048).

- 
- [51] Hložek, R., Marsh, D. J. E., and Grin, D. 2018 “Using the full power of the cosmic microwave background to probe axion dark matter,” *MNRAS* **476**, No. 3, 3063-3085, DOI: [10.1093/mnras/sty271](https://doi.org/10.1093/mnras/sty271).
- [52] Hložek, R., Grin, D., Marsh, D. J. E., and Ferreira, P. G. 2015 “A search for ultralight axions using precision cosmological data,” *Phys. Rev. D* **91**, No. 10, 103512, DOI: [10.1103/PhysRevD.91.103512](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.103512).
- [53] Hopkins, P. F., Wetzel, A., Kereš, D. et al. 2018 “FIRE-2 simulations: physics versus numerics in galaxy formation,” *MNRAS* **480**, No. 1, 800-863, DOI: [10.1093/mnras/sty1690](https://doi.org/10.1093/mnras/sty1690).
- [54] Hu, W., Barkana, R., and Gruzinov, A. 2000 “Fuzzy Cold Dark Matter: The Wave Properties of Ultralight Particles,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, No. 6, 1158-1161, DOI: [10.1103/PhysRevLett.85.1158](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.1158).
- [55] Hui, L., Ostriker, J. P., Tremaine, S., and Witten, E. 2017 “Ultralight scalars as cosmological dark matter,” *Phys. Rev. D* **95**, No. 4, 043541, DOI: [10.1103/PhysRevD.95.043541](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.043541).
- [56] Hui, L., Joyce, A., Landry, M. J., and Li, X. 2021 “Vortices and waves in light dark matter,” *J. Cosmology Astropart. Phys.* **2021**, No. 1, 011, DOI: [10.1088/1475-7516/2021/01/011](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/01/011).
- [57] Hyde, J. B. and Bernardi, M. 2009 “Curvature in the scaling relations of early-type galaxies,” *MNRAS* **394**, No. 4, 1978-1990, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2009.14445.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14445.x).
- [58] Iršič, V., Viel, M., Haehnelt, M. G., Bolton, J. S., and Becker, G. D. 2017 “First Constraints on Fuzzy Dark Matter from Lyman- $\alpha$  Forest Data and Hydrodynamical Simulations,” *Phys. Rev. Lett.* **119**, No. 3, 031302, DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.031302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.031302).
- [59] Ishiyama, T., Prada, F., Klypin, A. A. et al. 2021 “The Uchuu simulations: Data Release 1 and dark matter halo concentrations,” *MNRAS* **506**, No. 3, 4210-4231, DOI: [10.1093/mnras/stab1755](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1755).
- [60] Jones, D., Palatnick, S., Chen, R., Beane, A., and Lidz, A. 2021 “Fuzzy Dark Matter and the 21 cm Power Spectrum,” *ApJ* **913**, No. 1, 7, DOI: [10.3847/1538-4357/abf0a9](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abf0a9).
- [61] Jowett Chan, H. Y., Ferreira, E. G. M., May, S., Hayashi, K., and Chiba, M. 2021 “The Diversity of Core Halo Structure in the Fuzzy Dark Matter Model,” *arXiv e-prints*, arXiv:2110.11882.
- [62] Kamada, A., Kaplinghat, M., Pace, A. B., and Yu, H.-B. 2017 “Self-Interacting Dark Matter Can Explain Diverse Galactic Rotation Curves,” *Phys. Rev. Lett.* **119**, No. 11, 111102, DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.111102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.111102).
- [63] Kaplinghat, M., Tulin, S., and Yu, H.-B. 2016 “Dark Matter Halos as Particle Colliders: Unified Solution to Small-Scale Structure Puzzles from Dwarfs to Clusters,” *Phys. Rev. Lett.* **116**, No. 4, 041302, DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.041302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.041302).

- 
- [64] Kim, S. Y., Peter, A. H. G., and Hargis, J. R. 2018 “Missing Satellites Problem: Completeness Corrections to the Number of Satellite Galaxies in the Milky Way are Consistent with Cold Dark Matter Predictions,” *Phys. Rev. Lett.* **121**, No. 21, 211302, DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.211302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.211302).
- [65] Lelli, F., McGaugh, S. S., and Schombert, J. M. 2016 “SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves,” *AJ* **152**, No. 6, 157, DOI: [10.3847/0004-6256/152/6/157](https://doi.org/10.3847/0004-6256/152/6/157).
- [66] Li, X., Hui, L., and Yavetz, T. D. 2021 “Oscillations and random walk of the soliton core in a fuzzy dark matter halo,” *Phys. Rev. D* **103**, No. 2, 023508, DOI: [10.1103/PhysRevD.103.023508](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.023508).
- [67] Lidz, A. and Hui, L. 2018 “Implications of a prereionization 21-cm absorption signal for fuzzy dark matter,” *Phys. Rev. D* **98**, No. 2, 023011, DOI: [10.1103/PhysRevD.98.023011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.023011).
- [68] Lovell, M. R., Frenk, C. S., Eke, V. R., Jenkins, A., Gao, L., and Theuns, T. 2014 “The properties of warm dark matter haloes,” *MNRAS* **439**, No. 1, 300-317, DOI: [10.1093/mnras/stt2431](https://doi.org/10.1093/mnras/stt2431).
- [69] Macciò, A. V., Ruchayskiy, O., Boyarsky, A., and Muñoz-Cuartas, J. C. 2013 “The inner structure of haloes in cold+warm dark matter models,” *MNRAS* **428**, No. 1, 882-890, DOI: [10.1093/mnras/sts078](https://doi.org/10.1093/mnras/sts078).
- [70] Maleki, A., Baghran, S., and Rahvar, S. 2020 “Constraint on the mass of fuzzy dark matter from the rotation curve of the Milky Way,” *Phys. Rev. D* **101**, No. 10, 103504, DOI: [10.1103/PhysRevD.101.103504](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.103504).
- [71] Marchesini, D., D’Onghia, E., Chincarini, G., Firmani, C., Conconi, P., Molinari, E., and Zacchei, A. 2002 “H $\alpha$  Rotation Curves: The Soft Core Question,” *ApJ* **575**, No. 2, 801-813, DOI: [10.1086/341475](https://doi.org/10.1086/341475).
- [72] Marsh, D. J. E. 2016 “Axion cosmology,” *Phys. Rep.* **643**, 1-79, DOI: [10.1016/j.physrep.2016.06.005](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.06.005).
- [73] Mateo, M. L. 1998 “Dwarf Galaxies of the Local Group,” *ARA&A* **36**, 435-506, DOI: [10.1146/annurev.astro.36.1.435](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.36.1.435).
- [74] May, S. and Springel, V. 2021 “Structure formation in large-volume cosmological simulations of fuzzy dark matter: impact of the non-linear dynamics,” *MNRAS* **506**, No. 2, 2603-2618, DOI: [10.1093/mnras/stab1764](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1764).
- [75] Mina, M., Mota, D. F., and Winther, H. A. 2020 “Solitons in the dark: non-linear structure formation with fuzzy dark matter,” *arXiv e-prints*, arXiv:2007.04119.

- [76] Mocz, P., Vogelsberger, M., Robles, V. H., Zavala, J., Boylan-Kolchin, M., Fialkov, A., and Hernquist, L. 2017 “Galaxy formation with BECDM - I. Turbulence and relaxation of idealized haloes,” *MNRAS* **471**, No. 4, 4559-4570, DOI: [10.1093/mnras/stx1887](https://doi.org/10.1093/mnras/stx1887).
- [77] Moore, B. 1994 “Evidence against dissipation-less dark matter from observations of galaxy haloes,” *Nature* **370**, No. 6491, 629-631, DOI: [10.1038/370629a0](https://doi.org/10.1038/370629a0).
- [78] Moore, B., Ghigna, S., Governato, F., Lake, G., Quinn, T., Stadel, J., and Tozzi, P. 1999 “Dark Matter Substructure within Galactic Halos,” *ApJ* **524**, No. 1, L19-L22, DOI: [10.1086/312287](https://doi.org/10.1086/312287).
- [79] Moroz, I. M., Penrose, R., and Tod, P. 1998 “Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations,” *Classical and Quantum Gravity* **15**, No. 9, 2733-2742, DOI: [10.1088/0264-9381/15/9/019](https://doi.org/10.1088/0264-9381/15/9/019).
- [80] Moster, B. P., Naab, T., and White, S. D. M. 2013 “Galactic star formation and accretion histories from matching galaxies to dark matter haloes,” *MNRAS* **428**, No. 4, 3121-3138, DOI: [10.1093/mnras/sts261](https://doi.org/10.1093/mnras/sts261).
- [81] Navarro, J. F., Frenk, C. S., and White, S. D. M. 1997 “A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering,” *ApJ* **490**, No. 2, 493-508, DOI: [10.1086/304888](https://doi.org/10.1086/304888).
- [82] Nori, M. and Baldi, M. 2021 “Scaling relations of fuzzy dark matter haloes - I. Individual systems in their cosmological environment,” *MNRAS* **501**, No. 1, 1539-1556, DOI: [10.1093/mnras/staa3772](https://doi.org/10.1093/mnras/staa3772).
- [83] Nori, M., Murgia, R., Iršič, V., Baldi, M., and Viel, M. 2019 “Lyman  $\alpha$  forest and non-linear structure characterization in Fuzzy Dark Matter cosmologies,” *MNRAS* **482**, No. 3, 3227-3243, DOI: [10.1093/mnras/sty2888](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2888).
- [84] Oh, S.-H., Hunter, D. A., Brinks, E. et al. 2015 “High-resolution Mass Models of Dwarf Galaxies from LITTLE THINGS,” *AJ* **149**, No. 6, 180, DOI: [10.1088/0004-6256/149/6/180](https://doi.org/10.1088/0004-6256/149/6/180).
- [85] Oman, K. A., Navarro, J. F., Fattahi, A. et al. 2015 “The unexpected diversity of dwarf galaxy rotation curves,” *MNRAS* **452**, No. 4, 3650-3665, DOI: [10.1093/mnras/stv1504](https://doi.org/10.1093/mnras/stv1504).
- [86] Peccei, R. D. and Quinn, H. R. 1977 “CP conservation in the presence of pseudoparticles,” *Phys. Rev. Lett.* **38**, No. 25, 1440-1443, DOI: [10.1103/PhysRevLett.38.1440](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1440).
- [87] Peter, A. H. G., Rocha, M., Bullock, J. S., and Kaplinghat, M. 2013 “Cosmological simulations with self-interacting dark matter - II. Halo shapes versus observations,” *MNRAS* **430**, No. 1, 105-120, DOI: [10.1093/mnras/sts535](https://doi.org/10.1093/mnras/sts535).
- [88] Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y. et al. 2020 “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *A&A* **641**, A6, DOI: [10.1051/0004-6361/201833910](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910).

- 
- [89] Polisensky, E. and Ricotti, M. 2011 “Constraints on the dark matter particle mass from the number of Milky Way satellites,” *Phys. Rev. D* **83**, No. 4, 043506, DOI: [10.1103/PhysRevD.83.043506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.043506).
- [90] Profumo, S. 2017 *An Introduction to Particle Dark Matter*, DOI: [10.1142/Q0001](https://doi.org/10.1142/Q0001).
- [91] Rocha, M., Peter, A. H. G., Bullock, J. S., Kaplinghat, M., Garrison-Kimmel, S., Oñorbe, J., and Moustakas, L. A. 2013 “Cosmological simulations with self-interacting dark matter - I. Constant-density cores and substructure,” *MNRAS* **430**, No. 1, 81-104, DOI: [10.1093/mnras/sts514](https://doi.org/10.1093/mnras/sts514).
- [92] Rogers, K. K. and Peiris, H. V. 2021 “Strong Bound on Canonical Ultralight Axion Dark Matter from the Lyman-Alpha Forest,” *Phys. Rev. Lett.* **126**, No. 7, 071302, DOI: [10.1103/PhysRevLett.126.071302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.071302).
- [93] Schaye, J., Crain, R. A., Bower, R. G. et al. 2015 “The EAGLE project: simulating the evolution and assembly of galaxies and their environments,” *MNRAS* **446**, No. 1, 521-554, DOI: [10.1093/mnras/stu2058](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2058).
- [94] Schive, H.-Y., Liao, M.-H., Woo, T.-P., Wong, S.-K., Chiueh, T., Broadhurst, T., and Hwang, W. Y. P. 2014a “Understanding the Core-Halo Relation of Quantum Wave Dark Matter from 3D Simulations,” *Phys. Rev. Lett.* **113**, No. 26, 261302, DOI: [10.1103/PhysRevLett.113.261302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.261302).
- [95] Schive, H.-Y., Chiueh, T., and Broadhurst, T. 2014b “Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave,” *Nature Physics* **10**, No. 7, 496-499, DOI: [10.1038/nphys2996](https://doi.org/10.1038/nphys2996).
- [96] Schneider, A. 2018 “Constraining noncold dark matter models with the global 21-cm signal,” *Phys. Rev. D* **98**, No. 6, 063021, DOI: [10.1103/PhysRevD.98.063021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.063021).
- [97] Schneider, A., Smith, R. E., Macciò, A. V., and Moore, B. 2012 “Non-linear evolution of cosmological structures in warm dark matter models,” *MNRAS* **424**, No. 1, 684-698, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.21252.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21252.x).
- [98] Schutz, K. 2020 “Subhalo mass function and ultralight bosonic dark matter,” *Phys. Rev. D* **101**, No. 12, 123026, DOI: [10.1103/PhysRevD.101.123026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.123026).
- [99] Schwabe, B., Niemeyer, J. C., and Engels, J. F. 2016 “Simulations of solitonic core mergers in ultralight axion dark matter cosmologies,” *Phys. Rev. D* **94**, No. 4, 043513, DOI: [10.1103/PhysRevD.94.043513](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.043513).
- [100] Schwabe, B., Gosenca, M., Behrens, C., Niemeyer, J. C., and Easther, R. 2020 “Simulating mixed fuzzy and cold dark matter,” *Phys. Rev. D* **102**, No. 8, 083518, DOI: [10.1103/PhysRevD.102.083518](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.083518).

- [101] Spergel, D. N. and Steinhardt, P. J. 2000 “Observational Evidence for Self-Interacting Cold Dark Matter,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, No. 17, 3760-3763, DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.3760](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.3760).
- [102] Springel, V., Wang, J., Vogelsberger, M. et al. 2008 “The Aquarius Project: the subhaloes of galactic haloes,” *MNRAS* **391**, No. 4, 1685-1711, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2008.14066.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14066.x).
- [103] Swaters, R. A., Madore, B. F., van den Bosch, F. C., and Balcells, M. 2003 “The Central Mass Distribution in Dwarf and Low Surface Brightness Galaxies,” *ApJ* **583**, No. 2, 732-751, DOI: [10.1086/345426](https://doi.org/10.1086/345426).
- [104] Tegmark, M., Blanton, M. R., Strauss, M. A. et al. 2004 “The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey,” *ApJ* **606**, No. 2, 702-740, DOI: [10.1086/382125](https://doi.org/10.1086/382125).
- [105] Toguz, F., Kawata, D., Seabroke, G., and Read, J. I. 2021 “Constraining Ultra Light Dark Matter with the Galactic Nuclear Star Cluster,” *arXiv e-prints*, arXiv:2106.02526.
- [106] Tollet, E., Macciò, A. V., Dutton, A. A. et al. 2016 “NIHAO - IV: core creation and destruction in dark matter density profiles across cosmic time,” *MNRAS* **456**, No. 4, 3542-3552, DOI: [10.1093/mnras/stv2856](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2856).
- [107] Vegetti, S., Lagattuta, D. J., McKean, J. P., Auger, M. W., Fassnacht, C. D., and Koopmans, L. V. E. 2012 “Gravitational detection of a low-mass dark satellite galaxy at cosmological distance,” *Nature* **481**, No. 7381, 341-343, DOI: [10.1038/nature10669](https://doi.org/10.1038/nature10669).
- [108] Veltmaat, J., Schwabe, B., and Niemeyer, J. C. 2020 “Baryon-driven growth of solitonic cores in fuzzy dark matter halos,” *Phys. Rev. D* **101**, No. 8, 083518, DOI: [10.1103/PhysRevD.101.083518](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.083518).
- [109] Vogelsberger, M., Zavala, J., and Loeb, A. 2012 “Subhaloes in self-interacting galactic dark matter haloes,” *MNRAS* **423**, No. 4, 3740-3752, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.21182.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21182.x).
- [110] Wallstrom, T. C. 1994 “Inequivalence between the Schrödinger equation and the Madelung hydrodynamic equations,” *Phys. Rev. A* **49**, No. 3, 1613-1617, DOI: [10.1103/PhysRevA.49.1613](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.49.1613).
- [111] Wang, L., Dutton, A. A., Stinson, G. S., Macciò, A. V., Penzo, C., Kang, X., Keller, B. W., and Wadsley, J. 2015 “NIHAO project - I. Reproducing the inefficiency of galaxy formation across cosmic time with a large sample of cosmological hydrodynamical simulations,” *MNRAS* **454**, No. 1, 83-94, DOI: [10.1093/mnras/stv1937](https://doi.org/10.1093/mnras/stv1937).
- [112] Wechsler, R. H. and Tinker, J. L. 2018 “The Connection Between Galaxies and Their Dark Matter Halos,” *ARA&A* **56**, 435-487, DOI: [10.1146/annurev-astro-081817-051756](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081817-051756).

- 
- [113] Widrow, L. M. and Kaiser, N. 1993 “Using the Schroedinger Equation to Simulate Collisionless Matter,” *ApJ* **416**, L71, DOI: [10.1086/187073](https://doi.org/10.1086/187073).
- [114] Wolf, J., Martinez, G. D., Bullock, J. S., Kaplinghat, M., Geha, M., Muñoz, R. R., Simon, J. D., and Avedo, F. F. 2010 “Accurate masses for dispersion-supported galaxies,” *MNRAS* **406**, No. 2, 1220-1237, DOI: [10.1111/j.1365-2966.2010.16753.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16753.x).
- [115] Zolotov, A., Brooks, A. M., Willman, B. et al. 2012 “Baryons Matter: Why Luminous Satellite Galaxies have Reduced Central Masses,” *ApJ* **761**, No. 1, 71, DOI: [10.1088/0004-637X/761/1/71](https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/1/71).
- [116] Zwicky, F. 1933 “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” *Helvetica Physica Acta* **6**, 110-127.

# 付録 A 宇宙論的ダークマターの分類と具体的な素粒子モデル

素粒子標準模型には、ニュートリノを除いてダークマターの候補となる粒子は存在しない。ただし、付録 B で見るように、全てのダークマターがニュートリノのみで構成されることは観測から棄却されている。従って、素粒子標準模型に含まれていない未知の粒子がダークマターであることが期待される。これらの粒子は、宇宙初期の高温状態で生成されたが、現在に至るまでに標準模型の粒子との相互作用は重力相互作用のみとなり、残存粒子として存在するものと考えられる。現在の粒子数密度  $n_0$  は、脱結合時 ( $\simeq$  粒子数凍結時) の粒子数密度  $n_D$  を用いて、

$$n_0 = a_D^3 n_D = \frac{g_{*s0} T_0^3}{g_{*s}(T_D) T_D^3} n_D \quad (\text{A.1})$$

と書ける。ここで、 $a_D$  は脱結合時のスケール因子、 $T_D$  はその時の宇宙の温度を表す。また、 $g_{*s}$  はエントロピー有効自由度を表し、第 2 式はエントロピー保存則から導かれる。脱結合の時期は、質量や相互作用などの粒子の性質に依存する。ある粒子がダークマターの候補となるためには、非相対論的な物質であり、かつ現在の宇宙のエネルギー密度を満たさなければならない。候補粒子を  $\chi$  で表し、その粒子の質量を  $m$  とすると、密度パラメータ  $\Omega_{\chi 0}$  は、

$$\Omega_{\chi 0} = \frac{n_0 m}{\rho_{\text{cr},0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \frac{g_{*s0} T_0^3}{g_{*s}(T_D) T_D^3} m n_D \quad (\text{A.2})$$

となる。この式から、脱結合時の温度と数密度が現在のダークマターの量を決めることが分かる。ここで、粒子が宇宙初期に熱的平衡状態から脱結合した場合、数密度は脱結合の温度により一意に決まる。このような粒子を熱的残存粒子と呼ぶ。さらに、熱的残存粒子は脱結合時に相対論的か非相対論的であるかによって、熱い残存粒子と冷たい残存粒子に分けられる。ただしダークマターの候補となるためには、熱い残存粒子の場合も現在までに非相対論的になっている必要がある。一方で、粒子の生成過程には、非熱平衡過程により生成されるものもあり、これらを非熱的残存粒子と呼ぶ。本付録では、熱い残存粒子の場合を A.1 節で、冷たい残存粒子の場合を A.2 節、非熱的残存粒子の場合を A.3 節で見えていく。また、本付録では自然単位系  $c = \hbar = k_B = 1$  を用いて記述する。

## A.1 熱い残存粒子

熱的平衡状態から脱結合して生成された熱的残存粒子の中で、熱い残存粒子とは脱結合時に相対論的であるような粒子を指す。つまり、 $m \ll T_D$  を満たすような粒子である。例えば、素粒子標準模型のニュートリノは、熱い残存粒子である。ニュートリノは標準模型の粒子と弱い相互作用をし、脱結合する時期が  $T_D \simeq 1.5$  MeV 程度である。一方、ニュートリノ振動が観測されたことから有限の質量を持つことが分かり、その質量は  $m < 0.1$  eV である。従って、熱い残存粒子である条件を満たす。

ここではダークマターがフェルミオンである場合を考える。この時、脱結合時の数密度は、

$$n_D = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T_D^3 \quad (\text{A.3})$$

と計算できる。ここで、 $g$  は有効自由度である。また、ボソンの場合は、上の式を  $4/3$  倍すれば良い。これを用いると現在の密度パラメータ (式 A.2) は、

$$\begin{aligned} \Omega_{\chi 0} &= \frac{2\zeta(3)G}{\pi} \frac{g_{*s0} T_0^3}{H_0^2} \frac{g}{g_{*s}(T_D)} m \\ &= 5.711 \times 10^{-2} h^{-2} \frac{g}{g_{*s}(T_D)} \frac{m}{1 \text{ eV}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となる。例えばニュートリノの場合は、1世代あたりの自由度が  $g = 2$  で、 $g_{*s}(T_D) = 10.75$  であるので、これらを代入すると、

$$\Omega_{\nu 0} h^2 = \frac{\Sigma m_\nu}{94.12 \text{ eV}} \quad (\text{A.5})$$

と得られる。付録 B で見るように、全てのダークマターが熱い残存粒子で構成されると構造形成の様子が観測的事実を満たさないので、現在のダークマター量  $\Omega_{\text{dm}0} h^2 \simeq 0.11$  より十分小さい必要がある。従って、安定な熱い残存粒子の質量に

$$m \ll 1.9 \frac{g_{*s}(T_D)}{g} \text{ eV} \quad (\text{A.6})$$

という上限がかかることになる。

## A.2 冷たい残存粒子

冷たい残存粒子は、脱結合時に非相対論的である粒子のこと指す。つまり、 $m \gg T_D$  を満たすような粒子である。脱結合時の粒子数密度は、

$$n_D = g \left( \frac{m T_D}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{T_D} \right) \quad (\text{A.7})$$

と計算できる。この場合、式 A.1 に代入しても  $T_D$  が残るので、脱結合の温度を実際に見積もる必要がある。そのためには、反応過程を考えガモフの条件から脱結合の数密度を推定し直す必要がある。これらの粒子は反粒子との対消滅反応により粒子数を減らし、それらの数密度を共に  $n$  とする時、対消滅反応率  $\Gamma$  は、

$$\Gamma = n \langle \sigma_a v \rangle \quad (\text{A.8})$$

で与えられる。ここで  $\sigma_a$  は対消滅断面積を表す。脱結合が起きるのはガモフの条件  $\Gamma = H$  を満たす時であり、その時の数密度は、

$$n_D = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45}} \frac{1}{m_{\text{pl}}} \frac{\sqrt{g_*(T_D)} T_D^2}{\langle \sigma_a v \rangle} \quad (\text{A.9})$$

で与えられる。ここで、 $m_{\text{pl}} = 1/\sqrt{G}$  はプランク質量を表す。式 A.7 と式 A.9 の右辺を等号で結び数値計算を行うと、脱結合の温度  $T_D$  を求めることができる。さらに式 A.9 を式 A.2 に代入すると、密度パラメータの表式が得られ、

$$\Omega_{\chi^0} = \frac{16\pi^{5/2}}{9\sqrt{5}} \frac{1}{m_{\text{pl}}^3} \frac{g_{*s0} T_0^3}{H_0^2} \frac{\sqrt{g_*(T_D)}}{g_{*s}(T_D) \langle \sigma_a v \rangle} \frac{m}{T_D} \quad (\text{A.10})$$

となる。

ここからは、粒子が弱い相互作用のみをする重い粒子を考える。これを俗に WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) と呼ぶ。WIMP がスピン 1/2 のフェルミオンである場合を考える。この場合、WIMP の質量  $m$  が弱い相互作用を媒介する粒子である W ボソンの質量  $m_W \simeq 100 \text{ GeV}$  より大きいかどうかで、反応率が変わる。

まず、 $m \ll m_W$  の場合を考えると反応率は、

$$\langle \sigma_a v \rangle \simeq G_F^2 m^2 \quad (\text{A.11})$$

となる。ここで、 $G_F$  はフェルミ定数である。式 A.7 と式 A.9 を用いると、 $T_D$  の満たす式はおおよそ

$$\frac{m}{T_D} \simeq 18 + 3 \ln \left( \frac{m}{1 \text{ GeV}} \right) \quad (\text{A.12})$$

となる。質量として  $m \simeq 10 \text{ GeV}$  を考えると、 $T_D \simeq 400 \text{ MeV}$  程度となる。この時、 $g_*(T_D) = g_{*s}(T_D) \simeq 60$  である。これらを式 A.10 に代入することで、現在の粒子の密度パラメータは粒子と反粒子を合わせて、

$$\Omega_{\chi\bar{\chi}0} h^2 \simeq \left( \frac{m}{2 \text{ GeV}} \right)^{-2} \quad (\text{A.13})$$

となる。現在のダークマター量を上回らないという条件から、WIMP の質量の下限が求まり、

$$m \gtrsim 2(\Omega_{\text{dm}0} h^2)^{-1/2} \text{ GeV} \quad (\text{A.14})$$

$$\simeq 6 \text{ GeV} \quad (\text{A.15})$$

となる。第 1 式の不等式はリー・ワインバーグ限界と呼ばれる。この式から WIMP として、 $m \simeq 10 \text{ GeV}$  程度の質量を持つものはダークマターの候補となり得ることが分かる。

次に、質量が  $m \gg m_W$  のさらに重い WIMP を考える。この時反応率は、

$$\langle \sigma_{\text{a}v} \rangle \simeq \frac{G_F^2 m_W^4}{m^2} \quad (\text{A.16})$$

上記と同様に計算すると、

$$\frac{m}{T_D} \simeq 29 - \ln \left( \frac{m}{1 \text{ TeV}} \right) \quad (\text{A.17})$$

となり、質量  $m \simeq 1 \text{ TeV}$  を考えると、 $T_D \simeq 40 \text{ GeV}$  程度となる。この時、 $g_*(T_D) = g_{*s}(T_D) \simeq 100$  である。従って、密度パラメータは、

$$\Omega_{\chi\bar{\chi}0} h^2 \simeq \left( \frac{m}{3 \text{ TeV}} \right)^2 \quad (\text{A.18})$$

となる。現在のダークマター量を上回らないという条件を課すと、

$$m \lesssim 3(\Omega_{\text{dm}0} h^2)^{1/2} \text{ TeV} \quad (\text{A.19})$$

$$\simeq 1 \text{ TeV} \quad (\text{A.20})$$

となり、WIMP 質量の上限値が得られる。この場合の WIMP の質量は、 $100 \text{ GeV}$  から  $1 \text{ TeV}$  程度が適当であることが分かる。

以上より、質量が  $10 \text{ GeV}$  から  $1 \text{ TeV}$  程度の範囲にある WIMP はダークマターの候補となる

と考えられる。また、いずれの場合も反応率の係数が多少変化しても再結合温度  $T_D$  はほとんど変わらない。従って対数補正を無視する近似で、式 A.12 ないし式 A.17 を式 A.10 に代入すると、WIMP の散乱断面積と現在のダークマター量の関係が得られ、

$$\langle \sigma_a v \rangle \simeq \frac{3 \times 10^{-26}}{\Omega_{\chi\bar{\chi}0} h^2} \text{ cm}^3/\text{s} \quad (\text{A.21})$$

となる。この式から、対消滅の断面積が増えれば現在の残存量が減ることが分かる。これは反応率が上がると脱結合が遅くなり、より多くの粒子が消滅するからである。例として、WIMP の脱結合時の速度を  $v \simeq 0.3$  とすると、散乱断面積は  $\sigma_a \simeq 10^{-36} \text{ cm}^2$  となる。これはちょうど弱い相互作用程度の値であり、様々な実験施設で WIMP ダークマターの直接検出を試みられている。

WIMP の具体的な候補としては、超対称性粒子の中の最も軽い粒子が候補となる。超対称性理論には様々なバリエーションがあるが、ニュートリノの超対称性パートナーである neutralino が有力候補の一つとして挙げられている。

### A.3 非熱的残存粒子

非熱的残存粒子は、非熱平衡過程から生成された粒子のことを指す。これらは、生成機構によって残存量が変わり、上のような一般的な議論ができない。代表的には、axion や axion-like particle (ALP) が挙げられる。ここでは、それぞれについて概要をまとめる。

#### A.3.1 Axion

量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) は、強い相互作用に関する様々な実験結果を説明してきた理論である。しかし、QCD には強い CP 問題と呼ばれる問題が存在する。それは、QCD 理論では CP 対称性が保たれる必要はないが、実際の実験結果では CP 対称性が極めて保たれているという問題である。

QCD ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \theta \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_a^{\mu\nu} \quad (\text{A.22})$$

で与えられる。第 2 項は  $\theta$  項と呼ばれ、全微分項に対応するため運動方程式を変えないが、CP 対称性を破る項となっている。QCD 理論における  $\theta$  依存性は、クォーク質量行列  $\mathcal{M}$  のパラメータとの和  $\bar{\theta} = \theta + \arg(\det \mathcal{M})$  の形で現れる。強い CP 問題を最も厳密に調べることができるのは、

中性子の電気双極子モーメントである。この大きさは理論的に計算することができ、

$$d_n \simeq 5 \times 10^{-16} \bar{\theta} e \text{ cm} \quad (\text{A.23})$$

となる。ここで、 $e$  は電子電荷である。現在得られている実験結果では CP 対称性がほとんど破れておらず、 $d_n < \text{few} \times 10^{-26} \bar{\theta} e \text{ cm}$  という制限が得られている。従って、 $\bar{\theta} \lesssim 10^{-10}$  というように、値が非常に小さく fine-tuning されている必要がある。これを強い CP 問題と呼ぶ。

この強い CP 問題を解決する方法として、1977 年に Peccei-Quinn (PQ) 理論が提唱された (Peccei and Quinn 1977)。PQ 理論では、 $\bar{\theta}$  を動変数と考え、自身の古典的ポテンシャルによって自然に  $\bar{\theta} \simeq 0$  になると考える。これは、ラグランジアンに理論の大域的  $U_{\text{PQ}}(1)$  対称性を課すことで実現される。この  $U_{\text{PQ}}(1)$  対称性は崩壊定数  $f_a$  で自発的に破れ、南部-Goldstone (NG) ボソンが出現する。 $U_{\text{PQ}}(1)$  対称性が自発的に破れた時に現れる NG ボソンのことを、axion  $a$  と呼ぶ。崩壊定数  $f_a$  は、axion の相互作用の強さを決めている。この時、有効ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a + \bar{\theta} \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_a^{\mu\nu} + \frac{a}{f_a} \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_a^{\mu\nu} \quad (\text{A.24})$$

となる。axion 場を  $a \rightarrow a - f_a \bar{\theta}$  と再定義すると、 $a = 0$  がポテンシャルの最小値となることが確認できる。これにより、動的に  $\bar{\theta} \rightarrow 0$  となり、強い CP 問題を解決できる。

QCD の非摂動効果によって axion は質量を獲得することができる。この時、質量  $m_a$  と崩壊定数  $f_a$  は独立ではなく、

$$m_a \simeq \frac{m_\pi f_\pi}{f_a} \simeq 6 \times 10^{-10} \left( \frac{10^{16} \text{ GeV}}{f_a} \right) \text{ eV} \quad (\text{A.25})$$

の関係を持つ。ここで  $m_\pi, f_\pi$  はそれぞれパイオンの質量および崩壊定数である。星の中で生成された axion によるエネルギー損失や、宇宙の臨界密度と無矛盾であるために、axion の質量  $m_a$  と崩壊定数  $f_a$  は、

$$10^9 \text{ GeV} \lesssim f_a \lesssim 10^{12} \text{ GeV} \quad (\text{A.26})$$

$$10^{-6} \text{ eV} \lesssim m_a \lesssim 10^{-3} \text{ eV} \quad (\text{A.27})$$

を満たしている必要がある。

### A.3.2 Axion-like particle

A.3.1 節で強い CP 問題を解決するために出現した axion は特に QCD axion と呼ばれる。QCD axion の場合は、質量と崩壊定数の間に関係式 (式 A.25) が存在した。これをより一般に拡張して、質量と崩壊定数を独立にしたような axion も考えることができる。これを axion-like particle (ALP) と呼ぶ (Marsh 2016)。ALP の代表例として挙げられるのは、String axion と呼ばれる、超弦理論が予測する粒子である。超弦理論では余剰次元 (e.g. 10 次元) を考え、それがコンパクト

化されて我々の4次元時空になると考えられる。このコンパクト化の際に現れる反対称テンソル場のKaluza-KleinゼロモードがString axionに対応する。この場合、出現する粒子の個数は、数十から数百にまで及ぶとされ、この多数あるString axionのうちの1つがQCD axionに対応すると考え、超弦理論の枠組みを構成されることが多い。

これらの多数のString axionは、異なる崩壊定数は $f_a$ と質量 $m_a$ を持つが、崩壊定数は全ての粒子で大統一理論のスケール(GUTスケール)になる。つまり、

$$10^{16} \text{ GeV} \lesssim f_a \lesssim 10^{18} \text{ GeV} \quad (\text{A.28})$$

の範囲の値を取ると考えられる。一方、質量 $m_a$ はlogスケールで一様に、非常に小さいものから大きいものまで存在する。

String axionの4次元有効作用は、

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} f_a^2 \partial_\mu a \partial^\mu a - \mu^4 (1 - \cos a) \right\} \quad (\text{A.29})$$

で与えられる(Arvanitaki et al. 2010; Hui et al. 2017)。ここで、パラメータは $f_a$ と $\mu$ の2つで、質量 $m_a$ は

$$m_a = \frac{\mu^2}{f_a} \quad (\text{A.30})$$

で与えられる。このポテンシャルは周期 $2\pi$ を持ち、場がシフト対称性 $a \rightarrow a + 2\pi$ を持つことが分かる。ポテンシャルの最低次まで取ると自己相互作用のない場を表し、高次項は自己相互作用をもたらず。これらの寄与については、後ほど議論する。上述したように、どのALPでも崩壊定数 $f_a$ はGUTスケールである。一方、 $\mu$ は幅広い値を取り、それゆえ質量も幅広い範囲の値を持つ。ここでは具体的に議論しないが、FDMの典型的な質量 $10^{-22}$  eVも(非合理的な値ではなく)妥当な値として含まれる。

ここでは、FDMの具体的な候補粒子となる、質量が $m_a \simeq 10^{-22}$  eV程度のALPに注目して議論を進める。以下では、ダークマターの観測事実を満たすようにもう1つのパラメータ $f_a$ を決めると、超弦理論から予測される値(式A.28)に一致することを見る。これは、WIMP miracleを想起させる、素粒子理論からの要請と宇宙論からの要請の一致と言える。

膨張宇宙におけるFDMの振る舞いを見るために、運動方程式から始める。これは式A.29で与えられる作用を場 $a$ で変分により求め、

$$\ddot{a} + 3H\dot{a} + m_a^2 \sin a = 0 \quad (\text{A.31})$$

と与えられる。ここで $H \equiv \dot{R}/R$ はハッブル定数で、スケール因子は混乱を避けるため $R(t)$ で表すことにする。我々はALP場の初期値 $a_0$ は知ることができないので、ランダムな値を取るものとして考える。また、エネルギー運動量テンソルは作用を計量 $g_{\mu\nu}$ で変分することで求められ、エ

エネルギー密度と圧力は、

$$\rho_a = \frac{f_a^2}{2} \dot{a}^2 + \mu^4 (1 - \cos a) \quad (\text{A.32})$$

$$p_a = \frac{f_a^2}{2} \dot{a}^2 - \mu^4 (1 - \cos a) \quad (\text{A.33})$$

となる。初期宇宙でハッブル定数が十分大きい時、つまり  $H \gtrsim m$  の時、運動方程式の第2項（摩擦項）が支配的になるため、解は  $a = \text{const.}$  となる。この時、運動エネルギーはほぼ0であるため、状態方程式は  $\rho_a \simeq -p_a$  となり、ALP はダークエネルギーのように振る舞う。

その後、後期宇宙ではハッブル定数が小さくなることによって、第2項の摩擦項の影響を受けながら周期  $m_a$  で振動する描像となる。この時の振る舞いは、これから見るように物質として振る舞う。運動方程式の第2項を無視すると、 $a(t) \propto e^{imt}$  となる。摩擦項による減衰を見るためには振幅を時間変化させて、 $a(t) = A(t)e^{imt}$  とすれば良い。これを代入して整理すると、 $A(t)$  が満たすべき式は、

$$A(t) \propto R^{-3/2} \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{A}(t) \propto R^{-3} \quad (\text{A.35})$$

と得られる。この時、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの期待値は、

$$\left\langle \frac{f_a^2}{2} \dot{a}^2 \right\rangle = \frac{f_a^2}{2} (\dot{A}^2 + m_a^2 A^2) \simeq \frac{1}{2} \mu^4 A^2 \quad (\text{A.36})$$

$$\langle \mu^2 (1 - \cos a) \rangle = \frac{1}{2} \mu^4 A^2 \quad (\text{A.37})$$

となる。式 A.36 の右辺では、振幅  $A(t)$  の時間依存性を考えると第1項は宇宙膨張と共にすぐに減衰するため無視した。エネルギー密度と圧力（式 A.32, A.33）を計算すると、

$$\langle \rho_a \rangle = \mu^4 A^2 \propto R^{-3} \quad (\text{A.38})$$

$$\langle p_a \rangle = 0 \quad (\text{A.39})$$

従って、 $H \lesssim m$  となる時期では ALP は物質（ダークマター）として振る舞うことがわかる。

これらの振る舞いは、 $H \simeq m_a$  となる温度  $T_0$  で移り変わる。フリードマン方程式を用いて、

$$\frac{T_0^2}{m_{\text{pl}}^2} = m_a \quad (\text{A.40})$$

と書ける。この時期に宇宙全体の放射エネルギー密度はおおよそ  $T_0^4$ 、ダークマター密度は  $A(t) \simeq 1$

として  $\mu^4$  とおける。等密度時（放射優勢期と物質優勢期の過渡期）の温度  $T_1 \simeq 1$  eV で、これらの密度比も 1 程度になって欲しいので、

$$\frac{\mu^4 T_0}{T_0^4 T_1} \simeq 1 \quad (\text{A.41})$$

を満たす必要がある。従って質量  $m_a \simeq 10^{-22}$  eV の ALP に対し、崩壊定数は

$$f_a \simeq \frac{m_{\text{pl}}^{3/4} T_1^{1/2}}{m_a^{1/4}} \simeq 0.5 \times 10^{17} \text{ GeV} \quad (\text{A.42})$$

となっている必要がある。この値は、ちょうど超弦理論から期待される値（式 A.28）と一致している。またこれらの一致は、密度パラメータに注目することでも確認できる。実際、現在の ALP の密度パラメータは、

$$\Omega_{\text{ALP}} \simeq 0.1 \left( \frac{F}{10^{17} \text{ GeV}} \right)^2 \left( \frac{m_a}{10^{-22} \text{ eV}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.43})$$

となり、 $m_a \simeq 10^{-22}$  eV,  $f_a \simeq 10^{17}$  GeV で現在のダークマター量に一致することが分かる。また、移り変わりの温度  $T_0$  は、

$$T_0 \simeq (m_a m_{\text{pl}})^{1/2} \simeq 500 \text{ eV} \quad (\text{A.44})$$

となり、赤方偏移  $z \simeq 2 \times 10^6$  に対応する。これはビッグバン元素合成後であり、元素合成の際は ALP は無視できる量のダークエネルギーとして振る舞っていたことが分かる。以上より、 $m_a \simeq 10^{-22}$  eV,  $f_a \simeq 10^{17}$  GeV 程度の String axion (ALP) は超弦理論から存在が期待され、さらに現在のダークマター量も再現できることが分かった。従って、ALP は FDM の具体的な素粒子モデルと言える。

FDM モデルでは、その定義から重力相互作用のみを考え、自己相互作用を無視している。そこで本節の最後に、重力相互作用と自己相互作用の大きさについて議論する。運動方程式（式 A.31）の三角関数をマクローリン展開して、 $a^3$  項まで取り出すと、

$$0 = \partial_\mu \partial^\mu a + m_a^2 a - \frac{m_a^2}{6} a^3 + \mathcal{O}(a^5) \quad (\text{A.45})$$

となる。第 2 項は通常の質量項で、第 3 項は自己相互作用項である。無次元重力ポテンシャル  $\epsilon$  が働いている系で、重力相互作用の強さは、 $\epsilon m_a^2 a$  のオーダーとなる。自己相互作用項が重要になってくるのは、 $m_a^2 a^3 \gtrsim \epsilon m_a^2 a$ 、つまり  $a^2 \gtrsim \epsilon$  の時である。ALP が振動し始めて物質的な振る舞いをする時、 $a^2 \simeq 1$ ,  $\epsilon \simeq 10^{-5}$ （宇宙の初期密度揺らぎ）とできるため、自己相互作用が支配的であることが分かる。この効果は  $a$  が  $10^{-5/2}$  倍小さくなるまで続く。 $a \propto R^{-3/2}$  で落ちることを考えると、重力相互作用が支配的になるのはスケール因子  $R$  が  $10^{5/3}$  倍増えるまでである。この温度はおよそ、 $10^{-5/3} T_0 \simeq 11$  eV で、構造形成に重要な等密度時  $T_1 \simeq 1$  eV 以降には既に自己相互作用

が無視できることが分かる。

一方で、現在の宇宙でも非常に小さい構造に注目すると、自己相互作用の影響が支配的な系が存在する。平均密度が  $\rho$  で、大きさが  $L$  の系を考える。この時、無次元重力ポテンシャルは  $\epsilon \simeq G\rho L^2$ 、ダークマター密度は  $\rho \simeq f_a^2 m_a^2 a^2$  となる。自己相互作用が重要になる条件  $a^2 \gtrsim \epsilon$  に代入すると、

$$L \lesssim \frac{\sqrt{8\pi} m_{\text{pl}}}{f_a m_a} \quad (\text{A.46})$$

を得る。 $m_a \simeq 10^{-22}$  eV,  $f_a \simeq 10^{17}$  GeV を代入すると、 $L \simeq 1$  pc より小さいサイズの系では、自己相互作用が重要となることが分かる。これにより、宇宙の構造形成を考える際には自己相互作用を無視した FDM モデルを考えれば十分であることが分かる。

## A.4 分類のまとめ

本付録では、熱的残存粒子（熱い残存粒子・冷たい残存粒子）と非熱的残存粒子についてそれぞれの性質をまとめた。最後に、宇宙論の文脈で現れるダークマターとその対応関係についてまとめておく。CDM は、冷たい残存粒子のことを指し、その具体的な候補として WIMP が有力視されている。さらに WIMP の具体的な候補としては、超対称性粒子である neutralino が挙げられる。HDM は、熱い残存粒子のことを指し、ニュートリノ等が具体的な素粒子である。しかし、HDM モデルでは無衝突減衰の効果が大きすぎて現在の宇宙の大規模構造を再現できないため、熱い残存粒子が全てのダークマターを構成することは棄却されている。WDM は、CDM と HDM の中間的な粒子であり、具体的な素粒子モデルとして gravitino や sterile neutrino が挙げられる。FDM は、質量が  $10^{-22}$  eV 程度の自己相互作用しないダークマターモデルを指し、具体的な素粒子モデルは非熱的残存粒子である ALP が挙げられる。

ただし、文献によっては熱的残存粒子と非熱的残存粒子を区別せず、冷たい粒子を CDM と呼び、温かい粒子を WDM、熱い粒子を HDM と呼ぶこともある。この時、非熱的残存粒子である ALP(FDM) も CDM と解釈される。また、sterile neutrino は非熱平衡過程によっても生成することができ、この場合も WDM と解釈される。

## 付録 B 無衝突減衰

ダークマターが無衝突粒子からできているとすると、粒子の速度分散が大きい時、その自由運動によって構造形成が抑制される。これをダークマターの無衝突減衰または自由流減衰と呼ぶ。この減衰効果はダークマターの性質に依存するため、構造形成から直接ダークマターの性質を引き出すことが可能である。

ダークマターの時刻  $t$  での速度分散を  $v(t)$  とする。この時、時間間隔  $dt$  の間に走る共動距離は  $dx = v(t)dt/a(t)$  となる。従って粒子の自由運動のスケールは、共動距離にして、

$$L_{\text{fs}}(t) = \int_0^t \frac{v(t')}{a(t')} dt' = \int_0^{a(t)} \frac{v da}{a^2 H} \quad (\text{B.1})$$

粒子が相対論的運動をしている時期は光速で移動し、非相対論的になると運動量と速度はスケール因子に反比例して減少する。この移り変わりの時期を  $a_{\text{nr}}$  とすると、 $v(t)$  はおよそ

$$v(t) \simeq \begin{cases} c & a < a_{\text{nr}} \\ ca_{\text{nr}}/a(t) & a > a_{\text{nr}} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

と近似できる。ここでダークマターが非相対論的になる時期は、等密度時  $a_{\text{eq}}$  より昔でなければならぬ。なぜなら、非相対論的な期間が等密度時以降にも続くと、ダークマターは物質優勢期にも放射として振る舞い、構造形成に寄与できなくなってしまうためである。よって、 $a_{\text{nr}} < a_{\text{eq}}$  を満たす必要がある。

等密度時以前の無衝突減衰の効果は、物質優勢期以降の揺らぎの発展に影響を及ぼす。構造形成において抑制される揺らぎのスケールは、式 B.1 と放射優勢期のハッブルパラメータ  $H(a) \simeq H_0 \Omega_{\text{r}0}^{1/2} a^{-2}$  を用いて、

$$\begin{aligned} L_{\text{fs}} &= \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{r}0}}} \int_0^{a_{\text{nr}}} da + \frac{ca_{\text{nr}}}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{r}0}}} \int_{a_{\text{nr}}}^{a_{\text{eq}}} \frac{da}{a} \\ &= \frac{ca_{\text{nr}}}{H_0 \sqrt{\Omega_{\text{r}0}}} \left[ a + \ln \left( \frac{a_{\text{eq}}}{a_{\text{nr}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

と計算できる。この計算結果から揺らぎの抑制スケールを決める主要な因子は、非相対論的になる時期  $a_{\text{nr}}$  であることが分かる。 $a_{\text{nr}}$  が大きいほど相対論的な時期が長いため、抑制スケールが長くなる。

非相対論的になる時期  $a_{\text{nr}}$  は粒子の生成機構により異なる。ここではダークマターが熱的残存粒子である場合を考え、無衝突減衰のスケールを考える。ダークマターが非相対論的になる時期は、静止質量エネルギーと熱運動エネルギーが等しくなる時期で、

$$3k_{\text{B}}T_{\text{nr}} = mc^2 \quad (\text{B.4})$$

と評価できる。WIMP の場合、リー・ワインバーグ限界より  $T_{\text{nr}} \gtrsim 2 \text{ GeV}/k_{\text{B}} \simeq 2 \times 10^{13} \text{ K}$  となる。このとき無衝突減衰スケールは、 $L_{\text{fs}} \lesssim 1 \text{ pc}$  となり、構造形成においては無視できるほど小さいことが分かる。従って構造形成に影響を与えるのは、熱い（温かい）残存粒子であることが分かる。熱い残存粒子の場合、式 A.6 から質量は  $m \simeq 10 \text{ eV}/c^2$  であり、 $T_{\text{nr}}$  は電子・陽電子対消滅の温度  $1 \text{ MeV}/k_{\text{B}}$  より十分小さい。よって、非相対論的になる時期  $T_{\text{nr}}$  では既に光子数が凍結しているため、

$$a_{\text{nr}} = \frac{T_0}{T_{\text{nr}}} = \frac{3k_{\text{B}}T_0}{mc^2} \quad (\text{B.5})$$

となる。ここで、 $T_0$  は現在の宇宙の温度 ( $2.75 \text{ K}$ ) を表す。これを式 B.3 に代入すると、

$$\begin{aligned} L_{\text{fs}} &\simeq \frac{3k_{\text{B}}T_0}{H_0\sqrt{\Omega_{\text{r}0}}mc} \left[ 1 + \ln \left( \frac{mc^2}{3k_{\text{B}}T_0} \frac{\Omega_{\text{r}0}}{\Omega_{\text{m}0}} \right) \right] \\ &= 82.31 \left( \frac{mc^2}{10 \text{ eV}} \right)^{-1} \left\{ 1 + 0.3981 \left[ \ln \left( \frac{mc^2}{10 \text{ eV}} \right) - \ln \left( \frac{\Omega_{\text{m}0}h^2}{0.13} \right) \right] \right\} \text{ Mpc} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

この式から、質量が  $m \lesssim 10 \text{ eV}/c^2$  では無衝突減衰スケールが銀河団より大きいスケールまで及んでしまい現在の宇宙の観測結果とそぐわないことが分かる。熱い残存粒子の質量と密度パラメータの関係式 (式 A.4) を用いることで、この式を有効自由度  $g$  を用いて書き換えることができ (対数補正を無視する)、

$$L_{\text{fs}} \simeq 47 \frac{g}{g_{**}(T_{\text{D}})} (\Omega_{\chi_0} h^2)^{-1} \text{ Mpc} \quad (\text{B.7})$$

となる。ここで、 $\Omega_{\chi_0}$  は熱い残存粒子の密度パラメータ、 $T_{\text{D}}$  は脱結合時の温度である。例えば、ニュートリノは熱い残存粒子の条件を満たしており、 $g = 2$ ,  $g_{**}(T_{\text{D}}) = 10.75$  であるから、

$$L_{\text{fs}} \simeq 80 \left( \frac{\Omega_{\chi_0} h^2}{0.11} \right)^{-1} \text{ Mpc} \quad (\text{B.8})$$

となる。従ってニュートリノが全てのダークマターを占める場合、銀河団より大きなスケールの揺らぎまで減衰してしまうことになる。以上より、全てのダークマターがニュートリノ (熱い残存粒子) で構成となる可能性は棄却されている。