

修士論文

重力崩壊型超新星爆発の ニュートリノ加熱メカニズム

Neutrino-heating mechanism of core-collapse supernovae explosions

平成 27 年 1 月 5 日 提出

東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻

東京大学 宇宙理論研究室 吉田研究室

学籍番号:35-136089

原田 了

概要

重力崩壊型超新星爆発の中心メカニズムは、初期のシミュレーションから約 50 年間研究されてきたが、まだ確定的な答えは得られておらず、宇宙の重大な未解決問題の一つである。現在はニュートリノ加熱メカニズムによる爆発が最も有望視されているが、その妥当性を確かめるシミュレーションでは多くの近似や不定性が残っている。これに対し、できるだけ近似を排した計算を行うことが必要であるが、その準備のためニュートリノ加熱メカニズムのレビューを行う。

ニュートリノ加熱メカニズムの概要は以下の通りである。中心に鉄コアを作るような大質量の星は、鉄の光分解などによって重力崩壊を起こす。自己相似解からも確かめられるように、崩壊中のコアは亜音速で収縮する内部コアと超音速で落下する外部コアからなっている。重力崩壊に従って密度が高くなると、ニュートリノは散乱によって閉じ込められ、拡散のタイムスケールでゆっくり抜け出すようになる。原子核密度程度まで潰れると、内部コアは強い核力で跳ね返され、超音速で落下する外部コアとの間にバウンス衝撃波を作る。バウンス衝撃波は物質を核子に解離することなどにエネルギーを消費し、いずれ停滞する。バウンスした後の内部コアと衝撃波を通過してきた物質は中心に原始中性子星を作り、解放した重力エネルギーをニュートリノとして放出するが、このニュートリノは停滞した衝撃波背後の物質にごく一部(数%)吸収される。ニュートリノ吸収によって衝撃波はエネルギーを獲得し、また対流や定在衝撃波不安定性(SASI)などの流体不安定性がその加熱効率を上げることで、停滞した衝撃波はまた外部に伝搬しはじめる。この復活した衝撃波はやがて星の表面を突き抜け、超新星爆発を起こす。対流は加熱の結果生じるエントロピー勾配によって起こるが、SASIは移流音響サイクルというメカニズムによって起こると考えられている。

超新星爆発をシミュレーションするためには、三次元一般相対論的ニュートリノ輻射流体方程式を解かなければならない。これは現在の計算機性能では難しいので、次元を落とす他にも様々な近似がされている。一般相対論効果の近似として、計量に局所的な空間平坦性を仮定する共形平坦近似や、重力のモノポール成分だけを一般相対論的なものに置き換える近似などがされている。また、原子核程度の密度の物質については状態方程式にまだ不定性があり、しばしば液滴モデルに基づくものや相対論的平均場近似に基づくものなどが使われている。ニュートリノ輸送のためには Boltzmann 方程式を解かなければならないが、これにも多くの近似が考案されている。もっとも先端的なものとしては、Boltzmann 方程式のモーメントを考える可変 Eddington 因子法、分布関数を現象論的に二成分に分割する等方拡散源近似(IDSA)などが考えられている。しかし、採用する近似や入力物理によって結果が変わることがあり、計算量が多くとも Boltzmann 方程式を直接離散化して解き、近似をできるだけ排する必要があると考えられる。

ニュートリノ加熱メカニズムは重力崩壊する星の奥深くで起こるので、光学観測よりも相互作用しにくいニュートリノや重力波の観測の方がより一次的な情報を得られる可能性がある。実際、メカニズムの大枠は SN1987A のニュートリノ観測から確かめられている。ただし、ニュートリノ観測はニュートリノ振動によるフレーバー変換を考える必要があり、まだ不定性がある。重力波はメカニズムによって放射される波のパターンが変わると考えられるので、ニュートリノ加熱メカニズムを確かめる上で重要な観測となりうる。

今後は、既に開発されている特殊相対論的ニュートリノ輻射流体コードを基に一般相対論的なコードを構築し、上述のとおり直接シミュレーションを行うことを目標とする。

目次

第1章 序論	3
第2章 重力崩壊	6
2.1 星の安定性	6
2.2 重力崩壊の原因	7
2.3 重力崩壊の自己相似解	8
2.4 ニュートリノ閉じ込め	11
第3章 重力崩壊型超新星の爆発メカニズム	13
3.1 バウンス衝撃波および原始中性子星の形成	13
3.2 ニュートリノ加熱メカニズム	14
3.3 流体不安定性	19
3.3.1 対流不安定性	19
3.3.2 定在降着衝撃波不安定性	21
3.3.3 ニュートリノ加熱への影響	31
3.4 その他の爆発メカニズム	32
3.4.1 音響メカニズム	32
3.4.2 磁気流体力学メカニズム	32
第4章 基礎物理過程とシミュレーション手法	35
4.1 流体シミュレーション	36
4.1.1 一般相対論的流体	36
4.1.2 Newtonian 極限流体	38
4.2 状態方程式	39
4.2.1 Lattimer & Swesty の状態方程式	40
4.2.2 Shen の状態方程式	46
4.2.3 状態方程式の比較	49
4.3 ニュートリノ輸送シミュレーション	50
4.3.1 ニュートリノ反応	51
4.3.2 Y_e 処方	51
4.3.3 ニュートリノ滲み出し法	52
4.3.4 ニュートリノライトパルプ近似	54
4.3.5 モーメント法による Boltzmann 方程式の解法	55
4.3.6 等方拡散源近似 (IDSA)	61
4.3.7 直接解法 (S_N 法)	65
4.3.8 衝突項の取扱い	67

第 5 章 観測的兆候	75
5.1 ニュートリノ観測	75
5.2 重力波観測	80
第 6 章 まとめと展望	84
謝辞	87

第1章 序論

超新星爆発 (supernova) は宇宙の爆発現象であり、Baade and Zwicky (1934) が最初にその存在を指摘した。超新星の最大光度は $\sim 10^{41}$ erg/s で、光度曲線は数ヶ月続く。運動エネルギーは $\sim 10^{51}$ erg で、全エネルギー (運動 + 輻射 + ニュートリノ) は $\sim 10^{53}$ erg に達する。

観測的には、超新星はスペクトルや光度曲線に現れる特徴からいくつかの種類に分けられる。図 1.1 にはその分類をまとめた。まず、スペクトルに水素の吸収線が存在しない超新星は I 型と分類される。存在するものは II 型と呼ばれる。I 型の中でも、ケイ素の吸収線があるものは Ia 型と呼ばれる。ケイ素の吸収線がない I 型の中でも、ヘリウムの吸収線があるものは Ib 型と呼ばれ、ないものは Ic 型と分類される。II 型の中では吸収線が狭く爆発放出物質の速度が小さいものを II_n 型とよび (Filippenko 2000)、初期はスペクトルに水素吸収線があるため II 型に分類されても、後期段階ではむしろ Ib/c 型に近いスペクトルを示すものを II_b 型とよぶ。II 型はさらにスペクトルだけでなく光度曲線からも分類され、プラトー (光度が時間的に一定である状態) があるものが IIP 型、時間に対して等級が線型に落ちていくものを IIL 型と呼ぶ。

観測的な観点から超新星を分類すると以上ようになるが、物理的な分類としては爆発のメカニズムの観点から二つの型に分けられる。一つは熱核暴走型 (たとえば、レビューとして Howell (2011) がある) で、もう一つは重力崩壊型 (レビューとして Janka (2012) がある) である。

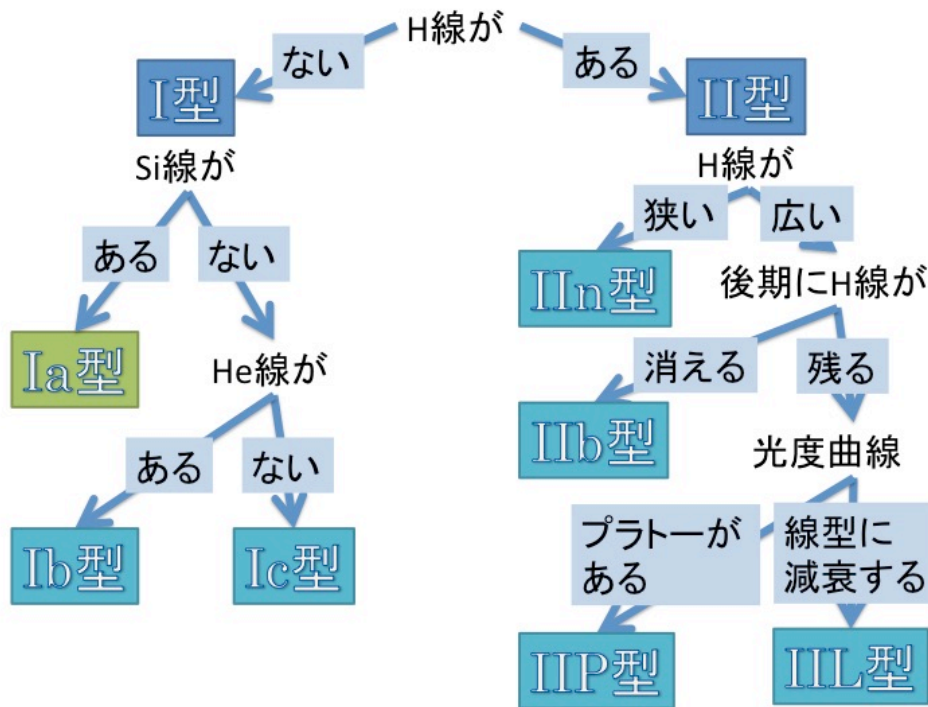


図 1.1: 超新星爆発の観測的な分類。スペクトルの吸収線の特徴や光度曲線の様態から分類されるが、その分類のフローチャートとして示した。また、爆発メカニズムの観点からは、黄緑色で示したものは熱核暴走型であり、水色で示したものは重力崩壊型である。

熱核暴走型超新星爆発は、観測的な分類では Ia 型に対応する。これは質量が増加することによって炭素-酸素 (CO) 白色矮星が圧縮され、炭素が暴走的に核融合し、そのエネルギーによって爆発する超新星である。白色矮星は水素外層をもたないため、スペクトルからは水素の吸収線が見つからずに Ia 型として観測されるのである。他に白色矮星の爆発である根拠として (Howell 2011, Trimble 1982)、古い銀河でも観測されること、核融合で解放されるエネルギーがちょうど白色矮星の束縛エネルギーと Ia 型超新星の爆発エネルギーの和に同程度であることなどがある。

核融合は点火する場所から周囲に広がっていくが、それが衝撃波を伴う場合は爆轟波、伴わない場合は爆燃波と呼ばれる。爆轟波は核燃焼によるエネルギーで衝撃波を保持するのである。もし熱核暴走型超新星が爆轟波によって起こるならば、中心が高密度の状態での核燃焼が起こるので、鉄を中心とした重元素が合成される (Arnett 1969)。しかしこの場合、作られる元素の量を観測結果と比較すると鉄が多すぎ、また中程度の質量の元素が少なすぎる。その一方で爆燃波によるならば、核燃焼が進行する前に星が少し膨張して密度が下がるので、中程度の質量の元素が合成される (Nomoto et al. 1984)。だがこの場合には、Gamezo et al. (2003) が示したように、星の中心部に核燃焼しないままの物質が残ってしまい、観測事実とそぐわない。現在のところは、燃焼の最初期は爆燃波が発生し、何らかの時点で爆轟波に変化する遅延爆轟 (delayed detonation) が起こるのではないかと考えられている (Gamezo et al. 2005)。このシナリオでは観測結果は説明されるが、爆燃波が爆轟波に変化するメカニズムがまだわかっていない。

質量が増加する原因としては、白色矮星が連星系を成していて、伴星から質量を獲得することが考えられている。これにも二種類のモデルが考えられており、それぞれ Single Degenerate (SD) モデル (Whelan and Iben 1973) と Double Degenerate (DD) モデル (Webbink 1984, Iben and Tutukov 1984) と呼ばれる。SD モデルは連星系をなす二つの星のうち縮退星である白色矮星は一つだけで、もう一つは主系列星や赤色巨星であるモデルである。この場合、白色矮星は伴星から外層物質を剥ぎ取ることによって質量を増やす。一方、DD モデルは連星の両方が白色矮星であるモデルで、両者が重力波放射などにより接近して合体する際に爆発する。SD モデルと DD モデルのどちらが実現しているのかは現在議論がなされているが、どちらのシナリオも一長一短である。例えば SD シナリオは発見数の問題がある。伴星から降着した水素は順次核融合して炭素、酸素を作り、CO 白色矮星の質量を増加させていく。しかしそのような場合には核融合のエネルギーは超軟 X 線として放出されるため、観測可能であるが、宇宙の超軟 X 線源は白色矮星の数を説明できるだけの数はない (Di Stefano 2010)。DD シナリオの場合は、そもそも爆発するかどうかという問題がある。二つの白色矮星に質量の違いがあれば、合体はまず質量が小さい方の白色矮星が破壊されて大きい方の周りに降着円盤をつくり、それがだんだん降り積もるといった過程を経て起こると考えられる。しかしその場合には、暴走的ではない核燃焼になってしまう (Saio and Nomoto 1985)。どちらの白色矮星の質量もほぼ同じであれば片方が破壊されてもう片方にゆっくり降り積もることはなく、シミュレーションでも実際に爆発が確認されている (Pakmor et al. 2010) が、そもそも質量がほぼ同じという状況がそう多く達成されるかは定かでない。SD/DD どちらのシナリオにせよ、全ての観測事実を説明することは難しく、最近ではむしろどちらのシナリオも起こるといった可能性も考えられてきている。

重力崩壊型超新星爆発は、Ia 型以外の他の型として観測され、 $8 M_{\odot}$ 以上の大質量星の進化の最終段階で起こる爆発であると考えられている。これは重力崩壊によって解放される束縛エネルギーが何らかのメカニズムで爆発のエネルギーに転化するもので、Colgate et al. (1961) や Colgate and White (1966) といった初期のシミュレーション以来約 50 年間研究されてきたが、まだその詳しい機構は完全にはわかっていない。現在のところもっとも有力な仮説はニュートリノ加熱メ

カニズムというものであり、その基本的なシナリオとしては以下のようなものが考えられている。何らかの過程によって星のコアが重力崩壊を起こすと、潰れるにつれて中心密度は増大していく。いずれは中心密度が原子核密度程度になり、核力によってそれ以上の崩壊が止められる。その一方で、周りの物質はほとんど自由落下によって超音速で中心に向かって降ってくるため、中心の止められた物質との間に衝撃波を形成する。この衝撃波はエネルギーを失いながら外側に進んでいき、やがて停滞する。その後、中心からのニュートリノによる加熱と流体不安定性によって衝撃波は復活し、衝撃波面が星の表面を突き抜けた時に爆発が起こる。Wilson (1985) はニュートリノ加熱によって爆発することをシミュレーションによって初めて主張した。彼らのシミュレーションには非物理的な過程が用いられていたこともあり、その妥当性自体には疑問が残るが、この主張以来ニュートリノ加熱メカニズムは有用なメカニズムであると期待され、多くの研究がなされてきた。球対称モデルでは爆発するシミュレーションは報告されなかったが、最近は多次元シミュレーションによって爆発する例が出始めている。しかしながら、様々な点で精度がどの程度良いかわからない近似がされていること、状態方程式など入力物理に不定性があること、短時間しかシミュレーションができず爆発エネルギーが確定しないこと、及び推定される爆発エネルギーが観測されているエネルギーよりも小さくなっていきそうなことなど、まだわからないことも多い。また、爆発の結果中心に中性子星ができると考えられているが、中性子星は高速回転するほか、超新星残骸に対して非常に大きな並進速度を持っており(パルサーキック)、その原因がまだわかっていない。このような未解決問題はまだまだ多く、さらに詳しく調べるためには様々な不定性を減らしてより強固な結果を構築していく必要がある。

重力崩壊型超新星爆発は、さらにいくつかの分類がある。爆発のエネルギーを親星の主系列星開始時 (zero-age main-sequence, ZAMS) の質量に対してプロットする (野本プロット、Nomoto et al. (2006)) と、二つの分枝が現れる。すなわち、ZAMS 質量が大きくなると運動エネルギーも 10^{52} - 10^{53} erg 程度に大きくなる極超新星 (hypernova) 分枝と、ZAMS 質量が大きくなってもエネルギーはむしろ小さくなる暗い超新星 (faint supernova) 分枝に分かれる。これらの特殊な超新星の起源はよくわかっていないが、極超新星については高速回転する星が重力崩壊して発生する超新星爆発である可能性が指摘されている。しかし、実際にその可能性が正しいかどうかを確かめるためには、ともかくまず通常の重力崩壊型超新星爆発のメカニズムを知る必要があるだろう。

以上のような状況に対して、著者はニュートリノ加熱メカニズムを理解するためにできる限り近似を排したシミュレーションを行うことを目指している。本論文はその準備として、ニュートリノ加熱メカニズムの概要と問題点をレビューするものである。まず第2章では重力崩壊の力学を議論し、続けて第3章でニュートリノ加熱メカニズムについて解説する。次の第4章ではここまで説明してきた物理シナリオを支える基礎物理過程、およびシミュレーションに用いられる手法を説明し、第5章ではニュートリノ加熱メカニズムから予想される観測シグナルについて議論する。最後に第6章ではまとめと、今後の研究計画について議論する。

第2章 重力崩壊

2.1 星の安定性

主系列星などの星は、自己重力を圧力勾配で支えている。このような星は収縮すると重力より先に圧力の方が強まるので、力の釣り合いを保ちながら準静的に重力収縮していく。しかしながら、何らかの原因で重力の方が強まるのが早くなると、圧力で支えきれずに重力崩壊を起こす。この境目を決めるパラメータについて考察する。

簡単のため、星は球対称だとする。自己重力を圧力勾配で支える静水圧平衡にあるので、自己重力

$$-\frac{Gm}{r^2}\rho \quad (2.1)$$

と、圧力勾配

$$-\frac{dP}{dr} \quad (2.2)$$

が釣り合う。ただし、 r は半径、 P は圧力、 ρ は密度、 G は万有引力定数、そして m は質量座標、すなわち半径 r 内に存在する内包質量 (enclosed mass) である。また、実効断熱指数 γ を

$$\gamma \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S \quad (2.3)$$

とする。ただし添字はエントロピー S を止めた偏微分であることを表す。いま、質量座標 m の質量殻が収縮することによって密度に摂動が加わり、

$$\rho \rightarrow \rho(1 + \epsilon) \quad (2.4)$$

になったとする。ただし、 ϵ は無次元の微小量である。この時、圧力は実効断熱指数 γ を用いて

$$P \rightarrow P(1 + \gamma\epsilon) \quad (2.5)$$

となる。質量座標は固定しているので、

$$dm = 4\pi\rho r^3 dr \quad (2.6)$$

の左辺は変わらない。従って、 ρ (式 (2.4)) の変化の最低次の項を打ち消すためには質量座標 m に対応する半径は

$$r \rightarrow r \left(1 - \frac{1}{3}\epsilon \right) \quad (2.7)$$

と変化しなければならない。これによって、自己重力 (2.1) は

$$-\frac{Gm}{r^2}\rho \rightarrow -\frac{Gm}{r^2}\rho \left\{ 1 + \left(1 + \frac{2}{3} \right) \epsilon \right\} \quad (2.8)$$

と変化し、圧力勾配 (2.2) は

$$-\frac{dP}{dr} \rightarrow -\frac{dP}{dr} \left\{ 1 + \left(\gamma + \frac{1}{3} \right) \epsilon \right\} \quad (2.9)$$

と変化する。もしこの摂動によって圧力勾配 < 自己重力となれば星はさらに潰れ、重力崩壊を起こす。この条件は実効断熱指数が

$$\gamma < \frac{4}{3} \quad (2.10)$$

となる時に満たされる。すなわち、断熱指数が小さいために、小さくなって重力が大きくなる効果が圧縮されて圧力が大きくなる効果よりも強くなり、重力崩壊が起こるのである。

2.2 重力崩壊の原因

2.1 節の議論から、実効断熱指数が $4/3$ より小さくなると重力崩壊が起こる。断熱指数が $4/3$ より小さくなる原因には、大きく分けて電子捕獲と鉄の光分解がある。

大質量星の中でも、比較的軽い星は酸素-ネオン-マグネシウム (O-Ne-Mg) コアを作り、それは電子の縮退圧によって支えられる。コアの収縮にともなって密度が上昇すると、電子の化学ポテンシャルが増大していく。化学ポテンシャルがある値を超えると、 $e^- + p \rightarrow \nu_e + n$ によって電子捕獲反応が起こるようになる。ただし e^- 、 p 、 ν_e 、 n はそれぞれ電子、陽子、電子ニュートリノ、中性子である。この反応によって電子の数密度が小さくなると縮退圧が低下し、星が重力崩壊を起こすのである。この現象は電子捕獲型重力崩壊と呼ばれる (e.g. Poelarends et al. 2008)。

その一方で、星の質量が十分大きい場合は中心に質量 $1 - 2 M_\odot$ 程度、ほぼ Chandrasekhar 質量の鉄コアを作る。零温度の電子の縮退圧だけではコアの自己重力を支えられないが、電子の温度が有限であること及び鉄原子核の熱圧力もそれに加わることで、自己重力を支えている。この鉄コア内部では核統計平衡 (強い相互作用と電磁相互作用によって各核種が一つの温度を共有した平衡分布に従う状態) が成り立っており、丁度鉄の量が最も多くなっている。しかしながら、収縮によってさらに温度が上がっていき、 $\mathcal{O}(\text{MeV})$ 程度になると十分高エネルギーのガンマ線があらわれ始め、鉄原子核を光分解し始める。すると、平衡状態が鉄を中心とした組成からヘリウムを中心とした組成に変化する。ここで、最も存在量の多い元素が鉄であるかヘリウムであるかを分ける密度 ρ -温度 T 平面上の境界線は

$$\log_{10} \left(\frac{\rho}{10^8 \text{ g/cm}^3} \right) = 11.62 + \log_{10} \left(\frac{T}{7.888 \times 10^9 \text{ K}} \right)^{3/2} - 39.17 \left(\frac{T}{7.888 \times 10^9 \text{ K}} \right)^{-1} \quad (2.11)$$

となる。この反応は結局



というものであり、吸熱反応なのでコアの圧力を減少させ、最終的に重力崩壊する (Burbidge et al. 1957)。この現象は鉄の光分解型重力崩壊と呼ばれる。ただし、この場合は電子捕獲が起こらないという意味ではなく、密度が上がると上述の機構と同様に電子捕獲が起こり、コアは重力的により不安定になる。コアがさらに圧縮されて $\rho \geq 10^{10} \text{ g/cm}^3$ となるとさらにヘリウムの光分解反応



も右に傾き、吸熱反応でより不安定化し、最終的にコアには自由核子が残される。

2.3 重力崩壊の自己相似解

重力崩壊のシミュレーションにおいては、崩壊中はエントロピーが変化せず、断熱的に起こることが知られている (Bethe et al. 1979)。このような場合には断熱指数 γ を用いて状態方程式が $P = \kappa \rho^\gamma$ と表せて、系の支配方程式で次元を持った物理量が κ と G の二つだけになる。このような場合には、Buckingham の Π 定理から解を自己相似解で表せることが知られている。自己相似解とは、系の振る舞いを記述するための独立変数が、一般的な場合の独立変数の組 (球対称な場合は (r, t)) ではなく、それらを組み合わせて作られたより少数の無次元独立変数の組であるような解である。重力崩壊型超新星爆発の文脈で重力崩壊の自己相似解を $6/5 \leq \gamma \leq 4/3$ の場合に求めたのは Yahil (1983) である。ここでは彼に従い、重力崩壊の自己相似解を議論する。

系を支配する唯一の独立変数は

$$X \equiv \kappa^{-1/2} G^{(\gamma-1)/2} r (-t)^{\gamma-2} \quad (2.14)$$

である。ただし、 t (負とする) は星全体が一点に潰れるまでの時間である。実際にはその前に核力で崩壊は止められるが (3.1 節)、ここではその効果は考えない。また、従属変数も無次元化することができ、密度 ρ 、速度 v 、内包質量 $m = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho$ 、全エネルギー $\mathcal{E} = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho (v^2/2 + p/(\gamma-1)\rho - Gm/r)$ に対してそれぞれを無次元化した量 $D(X)$ 、 $V(X)$ 、 $M(X)$ 、 $E(X)$ は

$$D(X) \equiv G(-t)^2 \rho \quad (2.15)$$

$$V(X) \equiv \kappa^{-1/2} G^{(\gamma-1)/2} (-t)^{\gamma-1} v \quad (2.16)$$

$$M(X) \equiv \kappa^{-3/2} G^{(3\gamma-1)/2} (-t)^{3\gamma-4} m \quad (2.17)$$

$$E(X) \equiv \kappa^{-5/2} G^{(5\gamma-3)/2} (-t)^{5\gamma-6} \mathcal{E} \quad (2.18)$$

ただし、

$$M(X) = 4\pi \int_0^X dx x^2 D(x) \quad (2.19)$$

$$E(X) = 4\pi \int_0^X dx x^2 D(x) \left(\frac{V(x)^2}{2} + \frac{D(x)^{\gamma-1}}{(\gamma-1)} - \frac{M(x)}{x} \right) \quad (2.20)$$

となる。いま、 $t \rightarrow 0^-$ の極限 (同時に $6/5 \leq \gamma \leq 4/3$ なので $X \rightarrow \infty$ の極限) を考える。その場合でも、 ρ 、 v 、 m 、 \mathcal{E} が全ての r で発散したり 0 になったりするわけではない。この条件から、無次元量 D 、 V 、 M 、 E は $X \gg 1$ の極限で

$$D(X) \propto (-t)^2 \propto X^{2/(\gamma-2)} \quad (2.21)$$

$$V(X) \propto (-t)^{\gamma-1} \propto X^{(\gamma-1)/(\gamma-2)} \quad (2.22)$$

$$M(X) \propto (-t)^{3\gamma-4} \propto X^{(3\gamma-4)/(\gamma-2)} \quad (2.23)$$

$$E(X) \propto (-t)^{5\gamma-6} \propto X^{(5\gamma-6)/(\gamma-2)} \quad (2.24)$$

と振る舞う。はじめに断熱指数を $6/5 \leq \gamma \leq 4/3$ の範囲に制限したのは、これらの漸近形が $X \rightarrow \infty$ で発散しない場合に着目するためである。特に $\gamma \simeq 4/3$ の場合、ほぼ $V(X) \propto X^{-1/2}$ すなわち $v \propto r^{-1/2}$ となり、自由落下と似たような振る舞いを示す。また、無次元化した連続の式と Euler

方程式は

$$[V + (2 - \gamma)X] \frac{D'}{D} + V' = -2 - 2 \frac{V}{X} \quad (2.25)$$

$$\gamma D^{\gamma-2} D' + [V + (2 - \gamma)X] V' = -\frac{M}{X^2} - (\gamma - 1)V \quad (2.26)$$

となる。ただし'は X に関する微分を表す。ここで

$$U = V + (2 - \gamma)X \quad (2.27)$$

という新しい変数を使うと、以上の方程式系は

$$U \frac{D'}{D} + U' = 4 - 3\gamma - \frac{2U}{X} \quad (2.28)$$

$$\gamma D^{\gamma-2} D' + UU' = -\frac{M}{X^2} + (\gamma - 1)(2 - \gamma)X + (3 - 2\gamma)U \quad (2.29)$$

となる。式(2.28)は積分して

$$4\pi X^2 DU = (4 - 3\gamma)M \quad (2.30)$$

を与える。ここで、 $X \rightarrow 0$ で D が定数として振る舞えば、(2.28)、(2.29)から

$$U = \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) X \quad (2.31)$$

となる。これは V に直すと

$$V = -\frac{2}{3}X \quad (2.32)$$

となり、 $X \ll 1$ では重力崩壊によって相同収縮することがわかる。さらに、無次元化音速 $A = \gamma^{1/2} D^{(\gamma-1)/2}$ は $X \rightarrow 0$ では $D \rightarrow \text{const.}$ となり0でない有限の値に近づくので、十分内側では物質は亜音速で運動する。その一方で、 $X \rightarrow \infty$ では式(2.21)により $A \propto X^{(1-\gamma)/(2-\gamma)}$ となり、 V も A もどちらも0に収束する。この場合に物質が超音速で運動するか亜音速で運動するかは、実際に解の振る舞いを見るのがわかりやすい。

解を求めるためには式(2.28)、(2.29)から U' を消去して D' を求める式にし、また式(2.19)より $M' = 4\pi X^2 D$ となるのでこれら二式を連立させて解けばよい。 U は式(2.30)で求める。この際、 D' の方程式には U が音速と等しくなる点が特異点として現れる。 $X \rightarrow 0$ の極限では $A \rightarrow \text{const.} \neq 0$ 、 $|U| \rightarrow 0$ であること、また $X \rightarrow \infty$ の極限では $A \rightarrow 0$ 、 $|U| \rightarrow \infty$ (Pf. $X \rightarrow \infty$ では $V \rightarrow 0$ 、これと(2.27)から)であることから、解としてはこの U の遷音速点を通るものを考えなくてはならない。従って、様々な初期値 D_0 から始めて、正則性条件 (U の遷音速点で D' の特異性が消えるという条件)を満たす D_0 を探し、そのような D_0 について十分大きな X まで計算を進めることで解を得る。図2.1には $\gamma = 1.3$ での $V(X)$ および $A(X)$ を載せる。この場合には、 $D_0 = 1.75$ であった。 $V(X)$ は赤実線で表し、 $A(X)$ は緑破線で表している。これを見ると、 $X \ll 1$ では X に比例(左方の黒い二点鎖線)し、 $X \gg 1$ では $X^{(1-\gamma)/(2-\gamma)} \simeq X^{-0.43}$ に比例(右方の黒い二点鎖線)していることがわかり、確かに式(2.22)、(2.32)が成立していることがわかる。また、この図から明らかのように、 $X \gg 1$ では V は超音速となっている。さらに、相同収縮からずれ始める点と V の遷音速点、及び V が最大値を取る点($X = 2.96$ 、黒い点線)は全て近傍に存在している。 V が最大値を取る点より内側は内部コア(inner core)、外側は外部コア(outer core)と呼ばれ、重力崩壊中の星のコアは亜音速で相同収縮する内部コアと超音速で落下する外部コアに分けられるといえる。

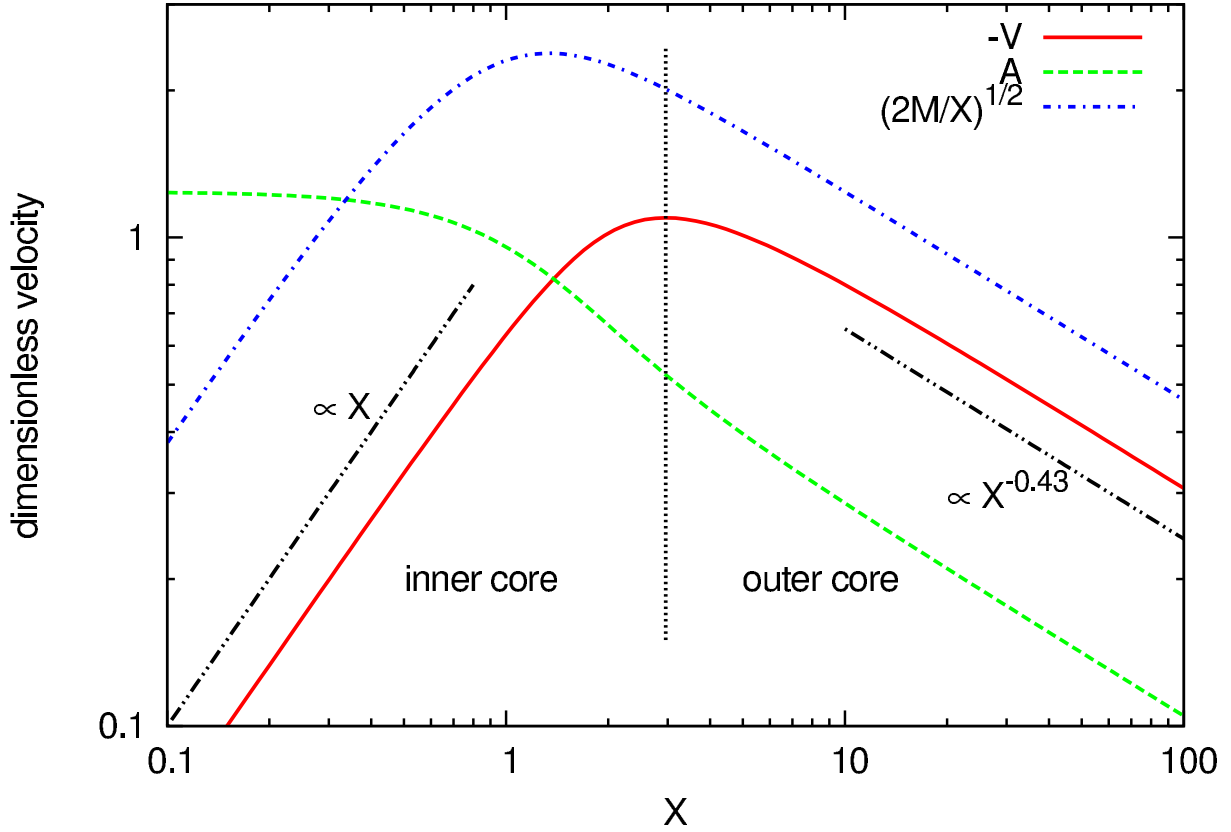


図 2.1: $\gamma = 1.30$ の場合の速度に関わる量の自己相似解。赤実線は物質の速度で、緑破線は音速、青一点鎖線は自由落下速度を表し、全て無次元化した量で示している。また、物質の速度と自由落下速度は内側に向くため負の量だが、プロットする上で符号を反転させた。黒二点鎖線は $X \ll 1$ の場合及び $X \gg 1$ の場合の漸近形が従う冪を表し、黒点線は物質の速さが最大になる位置を表す。黒点線より内側の領域は内部コアと呼び、外側は外部コアと呼ぶ。内部コアはほぼ亜音速かつ速度と半径が比例する相同収縮するのに対し、外部コアは超音速で落下する。Yahil (1983) にあるのと同様の図であるが、特に一点に潰れる前の自己相似解に着目し、また参考のため冪乗則に従う線をいくつか入れた。

また、無次元化自由落下速度 $\sqrt{2M/X}$ も図に青一点鎖線で示してある。ここから、超音速で落下する外部コアであってもその速度は自由落下よりは遅く、実際には圧力によるブレーキが無視できないことがわかる。

ここで、 $\gamma = 1.30$ の場合の内部コアの次元付き質量 M_{IC} を簡単に見積もる。自己相似解においては常に $X = 2.96$ が内部コアの端なので、無次元化質量は $M(X = 2.96) = 5.99$ を考えればよい。これを次元のある量に直すためには、時刻と κ も指定しなくてはならない。時刻は $r = 0$ の場合の式 (2.15) により、中心密度 ρ_c を定めることで $-t = (G\rho_c/D_0)^{-1/2}$ と指定できる。また、状態方程式が $P = \kappa\rho^\gamma$ で表せる簡単な例は、電子縮退圧である。相対論的な電子縮退圧を考えると、 $\gamma = 4/3$ 、 $\kappa \propto Y_e^{4/3}$ となる。ただし、 $Y_e \equiv n_e/n$ は電子存在比 (n_e は電子の個数密度で n は核子の個数密度) である。 γ の値は違うが、この時の κ を見積もりに用いる。いま、 $\rho_0 = 10^{12} \text{ g/cm}^3$ 、 $Y_e = 0.35$ の場合を考えると

$$M_{IC} = 0.48 M_\odot \left(\frac{Y_e}{0.35} \right)^2 \left(\frac{\rho_0}{10^{12} \text{ g/cm}^3} \right)^{\frac{3\gamma-4}{2}} \left(\frac{D_0}{1.75} \right)^{-\frac{3\gamma-4}{2}} \frac{M}{5.99} \quad (2.33)$$

程度となる。この質量は、式 (2.17) にあるように、時間に対して $(-t)^{4-3\gamma} = (-t)^{-0.1}$ の冪で増加

していく。

この自己相似解は実際の解を大まかに近似するに過ぎないが、重力崩壊中のコアが亜音速で相同収縮する内部コアと超音速でほぼ自由落下する外部コアに分けることができること、および内部コア質量が $\sim 0.7 M_\odot$ であることは詳細な数値計算でも確かめられている。

2.4 ニュートリノ閉じ込め

重力崩壊は再度断熱指数が $4/3$ より大きくなるまで続く。崩壊中のコアでは電子捕獲反応が進み、中性子過剰核が作られていくが、あまりに中性子過剰な原子核は不安定であり、中性子が原子核からこぼれてしまう。この現象は中性子ドリップと呼ばれる。こぼれた中性子は圧力を増加させ、その結果断熱指数が $4/3$ より大きくなって重力崩壊が止まる様子がシミュレーションで見つかった。しかし、この振る舞いは現在では否定されている。ニュートリノの存在によって、電子捕獲反応が抑制されるからである。ニュートリノは弱い相互作用しかしないので発生したらそれ以上反応せずコアから抜け出していくと考えがちだが、実際には重力崩壊によりコアは非常に高密度になるので、ニュートリノは反応するようになるのである。これをニュートリノ閉じ込め (Sato 1975) という。

重力崩壊中の星のコアにおいては、重要なニュートリノ反応は原子核とのコヒーレント散乱 $\nu + A \rightarrow \nu + A$ である。ただし ν はニュートリノを表し、質量数 A の原子核を単純に A と表した。以下では特に電子ニュートリノ ν_e に着目する。この反応の断面積 σ_A は原子番号を Z として

$$\sigma_A = \frac{\sigma_0}{16} \left(\frac{\epsilon_{\nu_e}}{m_e c^2} \right)^2 (2 \sin^2 \theta_W A + (1 - 2 \sin^2 \theta_W)(A - 2Z))^2 \quad (2.34)$$

$$\simeq \frac{\sigma_0}{4} \left(\frac{\epsilon_{\nu_e}}{m_e c^2} \right)^2 \sin^4 \theta_W A^2 \quad (2.35)$$

となる。ただし、

$$\sigma_0 \equiv \frac{4G_F(m_e c^2)^2}{\pi} (\hbar c)^2 = 1.75 \times 10^{-44} \text{ cm}^2 \quad (2.36)$$

は弱い相互作用の典型的な断面積で、 c は光速、 \hbar は換算 Planck 定数、 G_F は Fermi 結合定数、 m_e は電子の静止質量で θ_W は Weinberg 角、 ϵ_{ν_e} は電子ニュートリノのエネルギーである。(2.35) では $A \simeq 2Z$ として近似した。いま、この反応の平均自由行程 $\ell_{\text{mfp}} \equiv (\sigma_A n_A)^{-1}$ を考える。ただし $n_A = \rho / (m_u A)$ は原子核 A の数密度で、 m_u は原子質量単位である。電子ニュートリノは電子捕獲反応によって生成されるので、その際の原子核の反跳を無視すれば電子ニュートリノのエネルギーは電子の Fermi エネルギー程度と見積もれる。すなわち、

$$\epsilon_{\nu_e} \simeq \left(3\pi^2 \frac{\rho Y_e}{m_u} \right)^{1/3} \hbar c \quad (2.37)$$

ただし Y_e は電子存在比。ここから、平均自由行程は

$$\ell_{\text{mfp}} = \frac{1}{\sigma_A n_A} \simeq 5 \times 10^7 \text{ cm} \left(\frac{\rho}{10^{10} \text{ g/cm}^3} \right)^{-5/3} \left(\frac{Y_e}{26/56} \right)^{-2/3} \left(\frac{A}{56} \right)^{-1} \quad (2.38)$$

となる。コアの半径は数百 km 程度なので、 10^{10} g/cm^3 程度以上になると電子ニュートリノも散乱されるようになるのである。密度がさらに上昇すると平均自由行程はさらに短くなり、散乱を多数繰り返してコア内でランダムウォークにより拡散するようになる。この段階で、電子ニュー

トリノがコアから出て行くタイムスケールは

$$t_{\text{diff}} \equiv \frac{3R_{\text{core}}^2}{\ell_{\text{mfp}}c} = 30 \text{ ms} \left(\frac{\rho}{10^{11} \text{ g/cm}^3} \right) \left(\frac{Y_e}{26/56} \right)^2 \left(\frac{A}{56} \right) \quad (2.39)$$

となり、密度と共に長くなる。ただし、

$$R_{\text{core}} = \left(\frac{3M_{\text{core}}}{4\pi\rho} \right)^{1/3} \quad (2.40)$$

はコア半径で、コア質量 M_{core} は Chandrasekhar 質量

$$M_{\text{Ch}} \simeq 1.256 M_{\odot} \left(\frac{Y_e}{26/56} \right)^2 \quad (2.41)$$

で与えた。一方、重力崩壊にかかるタイムスケールは力学的タイムスケール

$$t_{\text{dyn}} \equiv \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \simeq 10 \text{ ms} \left(\frac{\rho}{10^{11} \text{ g/cm}^3} \right)^{-1/2} \quad (2.42)$$

となり、密度が大きくなると短くなる。これらにより、ある値（上記のスケールリングからは約 10^{11} g/cm^3 ）より大きな密度では電子ニュートリノは重力崩壊の間コアから抜け出すことができず、閉じ込められることになる。後述するように、ニュートリノ閉じ込めが起こることは SN1987A の観測によって確かめられた。

ニュートリノ閉じ込めが起こると、崩壊中はニュートリノの密度が上がっていく。すると一つの配位空間点上でニュートリノが運動量空間に占める体積が大きくなり、Pauli の排他律によって電子捕獲反応によるニュートリノ放出が阻害される。さらに、ニュートリノが大量に存在するために電子捕獲反応の逆反応も起こり、物質が β 平衡になることも電子捕獲反応が阻害される原因である。また、ニュートリノ閉じ込めはより閉じ込められる方向にフィードバックも及ぼす。これは、縮退したニュートリノの密度が上がると Fermi エネルギーが上がって散乱断面積 ($\propto \epsilon_{\nu_e}^2$) が大きくなり、また電子捕獲反応とそれに続く中性子ドリップが抑制されるため核子の質量数が大きいままで、散乱断面積 ($\propto A^2$) が小さくならないからである。

ニュートリノがランダムウォークして外に抜け出ていくという描像は、恒星から光子が抜け出ていく描像に似ている。それゆえ、恒星の光球と同様にニュートリノ球というものが定義できる。これはニュートリノが閉じ込められるだけの密度（電子ニュートリノの場合は 10^{11} g/cm^3 ）となる半径で定義されることもあるし、ニュートリノの光学的深さが $2/3$ となる半径で定義されることもある。ニュートリノ球は、まず外部コアにできる。本節の以上の議論は、野本 et al. (2009) を参考にしている。

第3章 重力崩壊型超新星の爆発メカニズム

本章では、重力崩壊した星のコアがどのように外向きの爆発を引き起こすかというメカニズムを議論する。以下の議論は、野本 et al. (2009) や Janka (2012) などにも参考にしている。

3.1 バウンス衝撃波および原始中性子星の形成

2.4 節で説明したように、ニュートリノ閉じ込めによって電子捕獲反応は抑制され、中性子ドリップによっては崩壊を止めることはできない。その結果、コアは中心が原子核程度の密度になるまで崩壊を続けることになる。原子核程度の密度になると強い斥力である核力が働き、断熱指数が $4/3$ を超えて再び自己重力を圧力で支えられるようになるのである。2.3 節で述べたように、内部コアは亜音速で収縮しているため、中心がそれ以上潰れなくなるとその情報が音波として伝わることができ、全体的に減速していくことになる。その一方で、外部コアは超音速で落下しているため音波で情報が伝わらず、減速する内部コアにぶつかって初めて減速する。このような状況下では、内部コアと外部コアの境界に衝撃波が生じる。この衝撃波のことをバウンス衝撃波と呼ぶ。

バウンス衝撃波ははじめニュートリノ球より内側に形成されるが、外側に伝搬し 10 ms 程度経つ頃に電子ニュートリノ球を突き抜ける。この時に電子ニュートリノ光度が急激に増大する。これには大きく二つの原因がある。一つは、衝撃波直後の非常に高温で β 平衡にある領域がニュートリノに対して不透明な領域から透明な領域に進出するために電子ニュートリノが放出されることであり、もう一つは衝撃波がニュートリノ球手前の物質を分解することで散乱断面積 ($\propto A^2$) が小さくなり、それまで内側にいて外に出られなかったニュートリノが飛び出すようになることである。この電子ニュートリノ光度の増大は電子捕獲反応による中性子化を伴うので、中性子化バーストと呼ばれる。これにより、バウンス後 10 ms 程度で電子ニュートリノ光度に急峻なピークが現れる。

バウンス衝撃波のエネルギー源は内部コアの重力エネルギーである。崩壊前の重力エネルギーからバウンス時の重力エネルギーを差し引くと

$$\Delta E \simeq \left(-\frac{GM_{\text{IC}}^2}{R_{\text{ini}}} \right) - \left(-\frac{GM_{\text{IC}}^2}{R_{\text{fin}}} \right) \simeq 1.3 \times 10^{53} \text{ erg} \quad (3.1)$$

程度となる。ただし、内部コア質量 $M_{\text{IC}} = 0.7 M_{\odot}$ 、内部コア初期半径 $R_{\text{ini}} = 10^8 \text{ cm}$ 、内部コアバウンス時半径 $R_{\text{fin}} = 10^6 \text{ cm}$ とした。これらのエネルギーのうち、バウンス衝撃波には約 $5 \times 10^{51} \text{ erg}$ のエネルギーが注入される。残りのエネルギーは原始中性子星の内部エネルギーとなる。原始中性子星とはバウンスした内部コアと衝撃波を通過してきた外部コア物質や外層が中心に降り積もってきた構造であり、その半径はニュートリノ球にほぼ等しい。内部コアはニュートリノ閉じ込めによって電子捕獲が抑制されるため、原始中性子星形成段階では中性子化は十分進んでいない。観測されている中性子星は陽子の割合が全体の約 10% と言われているが、形成直後の原始中性子星では約 30% である。ここから拡散タイムスケールでニュートリノがゆっくり抜けていくことで原始中性子星は内部エネルギーを外に放出し、また電子捕獲を進めて中性子星へと進化していく。

これを原始中性子星の冷却という。原始中性子星のサイズを R_{PNS} とすると、原始中性子星からニュートリノが抜けていくタイムスケールは

$$t_{\text{diff}} = \frac{3R_{\text{PNS}}^2}{\ell_{\text{mfp}}c} = 4\text{s} \left(\frac{R_{\text{PNS}}}{10\text{km}} \right)^2 \left(\frac{\rho}{10^{14}\text{g/cm}^3} \right) \left(\frac{\epsilon_\nu}{10\text{MeV}} \right)^2 \quad (3.2)$$

程度になる。ただし原始中性子星の大きさは中性子星と同程度とした。また、放出されるニュートリノの平均エネルギーは $\sim 10\text{MeV}$ 程度であることが知られている。実際に超新星からのニュートリノを観測した例は SN1987A のみであるが、カミオカンデ II (Hirata et al. 1987) で検出したニュートリノ信号の継続時間は約 12 秒、IMB 実験 (Bionta et al. 1987) で検出した継続時間は約 5 秒であり、この拡散時間と整合するので、ニュートリノ閉じ込めが実際に起こっていることが確かめられた。また、これらの観測からニュートリノが持ち出す全エネルギーは $\sim 10^{53}\text{erg}$ であると見積もられており、(3.1) の値と一致する。

3.2 ニュートリノ加熱メカニズム

3.1 節で述べたバウンス衝撃波がそのまま星の表面まで到達すれば、超新星爆発が起こると期待されていた。しかしながら、このようなバウンス衝撃波メカニズムだけでは超新星爆発は起こらない。衝撃波は伝搬しながらエネルギーを消費し、星の表面まで到達せずに止まることがシミュレーションで確かめられている。エネルギーを失う原因としては、鉄の分解とニュートリノによる損失がある。鉄コアの主要な成分である ^{56}Fe の核子 1 つあたりの結合エネルギーは 8.8MeV であるが、衝撃波で熱化した物質がこれ以上の熱エネルギーを持っていた場合、鉄は陽子と中性子に分解される。この鉄解離反応が起こるのに十分な運動エネルギーを獲得する半径を鉄の解離半径と呼び、 $GM_{\text{PNS}}m_{\text{u}}/R_{\text{diss}} = 8.8\text{MeV}$ で定義される。ただし M_{PNS} は原始中性子星質量で、これを $1.5M_{\odot}$ とすると $R_{\text{diss}} \simeq 240\text{km}$ となる。衝撃波がこれより内側にある限り、通過した物質は核子にまで分解されることになる。また、自由陽子・自由中性子の電子捕獲反応の断面積は鉄などの原子核のものに比べて非常に大きく、衝撃波を通過して乖離した核子はさらに電子捕獲でニュートリノを放出する。このように、衝撃波はエネルギーを物質の解離とニュートリノ放出によって失い、伝搬を止めてしまうのである。この止まった衝撃波を定在降着衝撃波 (standing accretion shock, SAS) と呼ぶ。このとき、衝撃波半径 R_s は 200km 程度で停滞する。

ところが、別の物理過程によって SAS にはエネルギーが注入されることがわかってきた。最も有力な過程はニュートリノ加熱である。原始中性子星内部では高エネルギーのニュートリノが閉じ込められている。このニュートリノが拡散によって原始中性子星からしみ出し、前節で見たように $\sim 10^{53}\text{erg}$ のエネルギーを持ち出す。ニュートリノは (重力を除けば) 弱い相互作用でのみ物質と反応するため、大多数は反応せずに星から抜け出していく。しかしその一部が衝撃波直後の物質に吸収されるとそこで物質を加熱し、衝撃波にエネルギーを与える。Wilson (1985) はニュートリノ加熱によって球対称シミュレーションで星が爆発したと主張した。このシミュレーションは人工的で非物理的な仮定も多く、そのままそれが正しいと受け取ることはできないが、ニュートリノ加熱メカニズムの有用性を示した点で重要である。

このメカニズムでは $\sim 10^{53}\text{erg}$ のニュートリノエネルギーのうち $\sim 1\%$ が物質を加熱するのに使われれば、観測される $\sim 10^{51}\text{erg}$ のエネルギーの爆発が起こる。この現象をシミュレーションで捉えるためには $\sim 1\%$ よりも誤差は小さく抑えなければならず、非常に高い精度を必要とする難しい問題である。そのため、今日に至るまで精度の高いニュートリノ輸送シミュレーションを

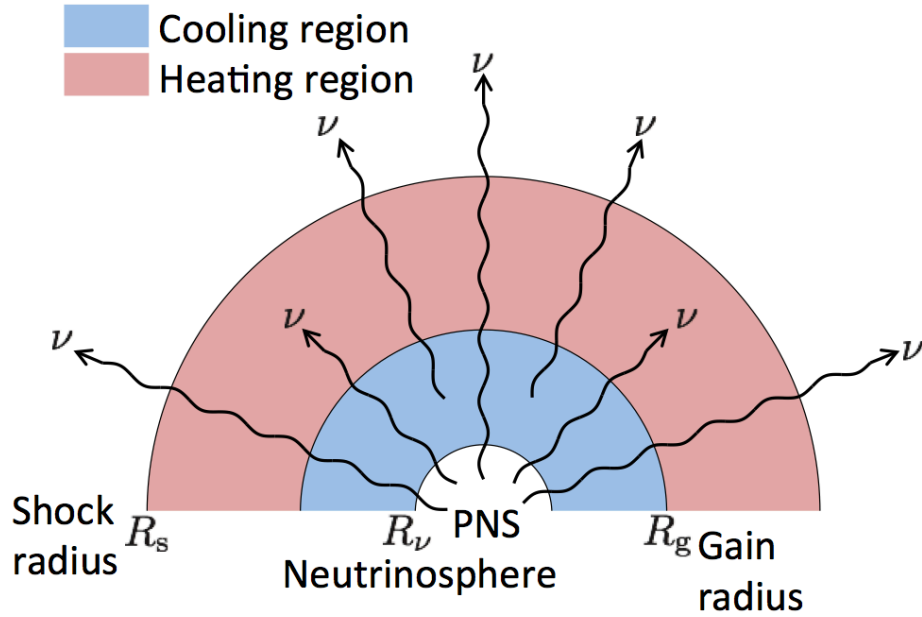


図 3.1: ゲイン半径の模式図。中心に白い半円で表した原始中性子星 (proto-neutron star, PNS) があり、その半径はニュートリノ球半径 R_ν にほぼ等しい。原始中性子星から波線で表したニュートリノが放出される。その大半は衝撃波半径 R_s の外側に抜けていくが、一部は衝撃波より内側の物質に吸収され、エネルギーを与える。衝撃波より内側の物質は中心ほど高温のためむしろニュートリノ黒体輻射で冷却されるが (図中水色で示した冷却領域)、外にいくにつれ低温になっていくためニュートリノ吸収で加熱されるようになる (図中赤色で示した加熱領域)。冷却・加熱領域の境目となるのがゲイン半径 R_g である。

行うために非常に多くの研究がなされている。

ニュートリノ加熱メカニズムで重要な概念として、ゲイン半径 R_g というものがある。原始中性子星のすぐ外側の物質はまだ高温なため、ニュートリノを吸収することによる加熱よりもニュートリノを放出することによる冷却の方が優っている。しかし、より外側にいくにつれて温度は下がり、ニュートリノ吸収による加熱が優るようになる。この、冷却優勢領域と加熱優勢領域の境目をゲイン半径と呼ぶ。図 3.1 にはゲイン半径の模式図を載せる。物理的な描像としては以下のようなになる。すなわち、外部から物質が落下し、半径 R_s の衝撃波を通過してゆっくりと中心に移流する。ゲイン領域 (衝撃波半径 R_s からゲイン半径 R_g までの領域) を流れる間は、主に電子ニュートリノおよび反電子ニュートリノの吸収反応で加熱され、ゲイン半径 R_g を過ぎると冷却が優勢になる。このゲイン領域での加熱が衝撃波にエネルギーを与え、復活させるのである。

ここでこの先、ゲイン半径の大きさやニュートリノ加熱メカニズムのエネルギーの見積もりを議論するために、球対称の場合の密度、温度がそれぞれ半径の -3 乗、 -1 乗に比例すること、及び衝撃波による圧縮率が $\mathcal{O}(10)$ となることを示す。ここでの議論は Janka (2001) に従う。

重力崩壊を起こした星のコアの中心部は非常に高密度であるが、衝撃波のすぐ背面では密度はそこまで大きくない。しかしながら、鉄を核子に解離できるくらい非常に高温であるため、圧力は核子ではなく光子および相対論的な電子と陽電子が担う。そのような場合、流体の状態方程式は輻射密度定数 a_γ を用いて $P = P_{e\pm} + P_\gamma = \frac{11}{12}a_\gamma T^4$ となる。一方、相対論的流体の断熱指数は $4/3$ なので、 $P = \kappa\rho^{4/3}$ とも書ける。いま、原始中性子星からの重力とこの相対論的流体の圧力が釣りあって静水圧平衡 $dP/dr = -GM_{\text{PNS}}\rho/r^2$ になっているとすれば、 $\rho \propto r^{-3}$ となる。また、状

状態方程式の関係から $\rho \propto T^3$ なので、 $T \propto r^{-1}$ となる。

さらに、衝撃波の圧縮率について考える。いま、Rankine-Hugoniot 条件は衝撃波上流での量に u 、下流での量に d という添字をつけると

$$\rho_u u_u = \rho_d u_d \quad (3.3)$$

$$P_u + \rho_u u_u^2 = P_d + \rho_d u_d^2 \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2}u_u^2 + h_u - q_u = \frac{1}{2}u_d^2 + h_d \quad (3.5)$$

となる。ただし、 $h = (P + e)/\rho$ は比エンタルピーで、 e は内部エネルギー密度、 u は衝撃波に対する速度、 q は衝撃波通過後に原子核の解離に使われる単位質量あたりのエネルギーである。ここで $P_d \gg P_u$ 、 $h_d \gg h_u$ という強い衝撃波を考える。また前述の通り、衝撃波通過後の流体では状態方程式は相対論的に振る舞うので $P = e/3$ 、 $h = 4P/\rho$ となることを考えると、衝撃波による圧縮率は

$$\frac{\rho_d}{\rho_u} \simeq 7 + \frac{2q_u \rho_u}{P_u} \quad (3.6)$$

となる。したがって、相対論的流体の衝撃波通過後の圧縮率は $\mathcal{O}(10)$ である。 $\gamma = 4/3$ の場合の強い衝撃波の圧縮率に加え、原子核の解離にエネルギーを使う分さらに密度が上がるのである。

以上の準備を利用して、ニュートリノ加熱メカニズムで得られるエネルギーを見積もる。そのためにはゲイン半径の大きさも知らなければならないので、まずはこれを大雑把に見積もる。ニュートリノ加熱反応で重要なのは β 反応 $\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p$ と逆 β 反応 $\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n$ なので、この節ではこれらの反応に絞って議論する。中心の原始中性子星ではニュートリノが熱平衡にあり、そこから黒体輻射によりニュートリノが光度 $L_{\nu_e} = \pi R_{\nu_e}^2 a_\nu c T_{\nu_e}^4$ で放出されるとする。ただし、 R_{ν_e} は電子ニュートリノ球半径、 $a_\nu = \frac{7}{8} a_\gamma$ はニュートリノの「輻射密度定数」で、 T_{ν_e} は電子ニュートリノ球での温度である。核子あたりのニュートリノによる加熱率 $q_{\nu_e}^+$ は局所的なニュートリノフラックスに比例するので、中心からの距離が r である点では

$$q_{\nu_e}^+ \simeq \frac{L_{\nu_e} \sigma_{\nu_e}(T_{\nu_e}) Y_n}{4\pi r^2} \quad (3.7)$$

となる。ただし中性子存在比 Y_n は全核子数密度に対する中性子数密度の比である。また、

$$\sigma_{\nu_e}(T) = \frac{3a^2 + 1}{4} \sigma_0 \frac{\langle \epsilon_{\nu_e}^2 \rangle}{(m_e c^2)^2} \quad (3.8)$$

は温度 T のニュートリノが吸収される反応の断面積の熱平均である。ただし、エネルギーの最低次のオーダーのみ取った。

$$a = 1.26 \quad (3.9)$$

は軸性ベクトル結合定数で、 σ_0 は弱い相互作用の典型的な断面積 (式 (2.36)、ただしここでは弱い相互作用に伴うクォークの混合は無視した)、 $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ は電子の静止エネルギーである。 $\langle \cdot \rangle$ は物理量 \cdot のエネルギーを重みとした平均を表し、ニュートリノが化学ポテンシャルを 0 とする Fermi-Dirac 分布に従うとすれば、ニュートリノエネルギーの二乗の平均は

$$\langle \epsilon_{\nu_e}^2 \rangle = \frac{\Gamma(6) \mathcal{F}_5(0)}{\Gamma(4) \mathcal{F}_3(0)} (k_B T)^2 \simeq 21 (k_B T)^2 \quad (3.10)$$

となる。ただし、 k_B は Boltzmann 定数で

$$\mathcal{F}_n(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{t^n}{\exp(t-x)+1} dt \quad (3.11)$$

は完全 Fermi-Dirac 積分、 $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。また、核子あたりの電子捕獲ニュートリノ放出による冷却率 (正の時に物質が冷却されると定義) は

$$q_{\nu_e}^- = \sigma_{\nu_e}(T) a_\nu c T^4 Y_n \quad (3.12)$$

となる。ただし、 $q_{\nu_e}^+$ はニュートリノ球での温度 T_{ν_e} に依存していたのに対し、 $q_{\nu_e}^-$ は局所的な温度 T に依存していることに注意せよ。 $\sigma_{\nu_e}(T) \propto T^2$ なので $\sigma_{\nu_e}(T)/\sigma_{\nu_e}(T_{\nu_e}) = T^2/T_{\nu_e}^2$ となり、加熱率と冷却率は差し引き

$$q_{\nu_e}^+ - q_{\nu_e}^- = q_{\nu_e}^+ \left\{ 1 - \left(\frac{2r}{R_{\nu_e}} \right)^2 \left(\frac{T}{T_{\nu_e}} \right)^6 \right\} \quad (3.13)$$

となる。これが 0 になる位置がゲイン半径である。ここで先ほどの議論により、温度プロファイルは衝撃波から半径に反比例して上がっていくので、

$$T = T_s \frac{R_s}{r} \quad (3.14)$$

となる。ただし T_s は衝撃波すぐ内側の温度である。これはゲイン半径の内側まで続くので、

$$R_g = \sqrt{\frac{(2R_s)^3}{R_{\nu_e}} \left(\frac{T_s}{T_{\nu_e}} \right)^3} \quad (3.15)$$

となる。ここで、シミュレーションで得られる典型的な値として $k_B T_{\nu_e} = 4.8 \text{ MeV}$ 、 $k_B T_s = 1 \text{ MeV}$ 、 $R_s = 200 \text{ km}$ 、 $R_{\nu_e} = 80 \text{ km}$ を用いると、 $R_g = 85 \text{ km}$ 程度となる。以下では $R_g = 100 \text{ km}$ として扱う。

ゲイン半径の大きさがわかったので、ゲイン領域にニュートリノがエネルギーを加える効率を考える。 $\sigma_{\nu_e}(T)$ を用いて opacity は $\kappa_{\nu_e, \text{abs}} = \sigma_{\nu_e}(T) Y_n / m_u$ であるから、ニュートリノの光学的深さは

$$\tau \equiv \int_{R_g}^{R_s} dr \kappa_{\nu_e, \text{abs}} \rho = \frac{3a^2 + 1}{4} \frac{\sigma_0 \langle \epsilon^2 \rangle}{(m_e c^2)^2} \frac{Y_n}{m_u} \int_{R_g}^{R_s} dr \rho \quad (3.16)$$

である。ここで、前述のとおり衝撃波背面の流体においては $\rho \propto r^{-3}$ であると近似できる。いま、この密度分布の比例係数を別のパラメータで表す事を考える。衝撃波のすぐ上流での質量降着率 $\dot{M} = 4\pi R_s^2 |v_u| \rho_u$ はおおまかに $0.1 M_\odot / \text{s}$ と見積もれる。ここで、 v_u は衝撃波上流での速度だが、物質が自由落下すると考えれば M_{PNS} を原始中性子星の質量として $v_u = -\sqrt{2GM_{\text{PNS}}/R_s}$ である。また、衝撃波による圧縮は前の議論により $\rho_u \simeq \rho_d / 10$ 程度になる。 $\rho \propto r^{-3}$ という関係は衝撃波の内側で成り立つため、 ρ_d を用いて $\rho = \rho_d (R_s/r)^3$ となる。以上の関係を用いると、密度分布は

$$\rho = \frac{5}{2\pi\sqrt{2G}} \frac{\dot{M} R_s^{3/2}}{M_{\text{PNS}}^{1/2} r^3} \quad (3.17)$$

と見積もれる。これを用いて、光学的深さ、すなわちエネルギー吸収率は

$$\tau \simeq 0.035 \left(\frac{k_B T_{\nu_e}}{4 \text{ MeV}} \right)^2 \left(\frac{\dot{M}}{0.1 M_\odot/\text{s}} \right) \left(\frac{R_s}{200 \text{ km}} \right)^{3/2} \left(\frac{R_g}{100 \text{ km}} \right)^{-2} \left(\frac{M_{\text{PNs}}}{1.5 M_\odot} \right) \quad (3.18)$$

となる。ただし、シミュレーションから得られた典型的な値を用いており、積分の上限は R_s でなく ∞ で近似した。これによると電子ニュートリノがエネルギーを落とす割合は数%であり、反電子ニュートリノも同様の計算により同じだけの割合のエネルギーを物質に与える。ここで、全ニュートリノエネルギーは $\sim 10^{53}$ erg であるが、これは各フレーバーのニュートリノに分配され、電子ニュートリノおよび反電子ニュートリノはそれぞれ 2×10^{52} erg 程度のエネルギーを原始中性子星から持ち出すと仮定すると、上の光学的深さによる吸収では $\sim 10^{51}$ erg のエネルギーを物質に与える。

しかし、この議論は球対称で静水圧平衡である流体にニュートリノが照射される場合のものである。実際には衝撃波背面の物質は中心に降り積もり続けるので、時間が経つとゲイン領域から流れ出てしまう。そのような場合には、単位時間あたりゲイン領域に加えられるエネルギーを考えるほうがよい。これは電子ニュートリノの核子あたりの加熱率 $q_{\nu_e}^+$ と同様に反電子ニュートリノの核子あたりの加熱率 $q_{\bar{\nu}_e}^+$ (断面積は平均エネルギー以外同じなので、 $L_{\nu_e} \rightarrow L_{\bar{\nu}_e}$ 、 $Y_n \rightarrow Y_p$ と置き換えればよい) を用いて

$$Q_\nu^+ \equiv (q_{\nu_e}^+ + q_{\bar{\nu}_e}^+) \frac{M_g}{m_u} \quad (3.19)$$

となる。ただし M_g はゲイン領域にある質量である。ここで、反電子ニュートリノの平均エネルギーは電子ニュートリノの平均エネルギーより少し大きい、ゲイン領域にある物質は陽子のほうが少し少ないので、それを差し引きして

$$q_{\nu_e}^+ + q_{\bar{\nu}_e}^+ = \frac{L_{\nu_e} \sigma_{\nu_e}(T_{\nu_e})}{4\pi r^2} \quad (3.20)$$

と近似する。これにより、ここでも多次元シミュレーションでの典型的な値を用いて

$$Q_\nu^+ \simeq 9.4 \times 10^{51} \text{ erg/s} \left(\frac{k_B T_{\nu_e}}{4 \text{ MeV}} \right)^2 \left(\frac{L_{\nu_e}}{3 \times 10^{52} \text{ erg/s}} \right) \left(\frac{M_g}{0.01 M_\odot} \right) \left(\frac{R_g}{100 \text{ km}} \right)^{-2} \quad (3.21)$$

となる。また、単位時間あたり加えられるエネルギーともう一つ重要なのは、物質の滞在時間 t_{dwell} である。これは

$$t_{\text{dwell}} \equiv \frac{M_g}{\dot{M}} = 0.1 \text{ s} \left(\frac{M_g}{0.01 M_\odot} \right) \left(\frac{\dot{M}}{0.1 M_\odot/\text{s}} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

で定義し、示したように典型的には 0.1 s である。物質が得るエネルギーは以上より

$$E \equiv Q_\nu^+ t_{\text{dwell}} \simeq 9.4 \times 10^{50} \text{ erg/s} \left(\frac{k_B T_{\nu_e}}{4 \text{ MeV}} \right)^2 \left(\frac{L_{\nu_e}}{3 \times 10^{52} \text{ erg/s}} \right) \times \left(\frac{M_g}{0.01 M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\dot{M}}{0.1 M_\odot/\text{s}} \right)^{-1} \left(\frac{R_g}{100 \text{ km}} \right)^{-2} \quad (3.23)$$

となる。実際にはここでは無視していた冷却の効果があるので 20-30% 程度小さな値となるが、それでもニュートリノ加熱メカニズムによりこれだけのエネルギーを与えることができ、爆発が起こる可能性がある。

また、上のスケールングではエネルギーを落とす割合は $Q_\nu^+ / (L_{\nu_e} + L_{\bar{\nu}_e}) \simeq 0.16$ となり、(3.18)

より大きな値になっている。これは、後に述べる流体不安定性により衝撃波半径が広がったりするなどの効果が働くために、多次元シミュレーションでは球対称静水圧平衡を仮定した場合よりもゲイン領域の質量 M_g が大きくなるのが大きな理由である。 M_g が大きくなると、ニュートリノが吸収される標的が増えること、および滞在時間が増えることの二つの効果が働いて衝撃波に与えるエネルギーが大きくなる。これは (3.23) でエネルギーがゲイン領域内質量の二乗に比例することに現れている。

3.3 流体不安定性

3.2 節で述べたニュートリノ加熱による爆発は Wilson (1985) の後多くのグループによって追試が行われたが、一次元計算ではどんなに入力物理を精緻化しても爆発を再現することができなかった (Liebendörfer et al. 2001, Rampp and Janka 2000, Sumiyoshi et al. 2005, Thompson et al. 2003)。親星の質量が非常に小さい場合のみ、爆発を上から押さえつける質量降着が小さいため一次元でも爆発することが確かめられたが (Kitaura et al. 2006)、それは大質量星の最期としては例外的である。最近の研究ではニュートリノ加熱の他にもまだいくらかの物理過程、特に多次元性が重要になる流体不安定性が衝撃波を復活させるために必要だと考えられている。特に Herant et al. (1992) は初めて二次元でのシミュレーションを行うことで、対流不安定性による物質循環が重要であることを示した。この対流不安定性には前述のとおりゲイン領域の質量を増やす効果などがある。また、対流不安定性はニュートリノ加熱によって起こるが、ニュートリノ加熱がない場合にもまた別の不安定性が発生することも発見された (Blondin et al. 2003)。この不安定性は衝撃波面が大スケールで振動するもので、定在降着衝撃波不安定性 (standing accretion shock instability, SASI) と呼ばれる。SASI も、対流不安定性と同様にニュートリノ加熱の効率を上げる。以下では、超新星爆発における対流不安定性の発生をまず述べ、次に SASI について簡単なトイモデルで発生メカニズムを説明する。最後に流体不安定性がどのように衝撃波復活に影響を与えるかを議論する。

3.3.1 対流不安定性

流体不安定性として最もよく研究されてきたのは、対流不安定性である。Wilson (1985) のシミュレーションでも、対流不安定性は考慮されている。対流不安定性を引き起こすのは、エントロピー勾配が重力と逆方向を向いていることである。この不安定性条件は Schwarzschild の条件と呼ばれる。また、物質の組成の勾配も考える場合の条件は Ledoux の条件と呼ばれる。以下では、これらの条件を導く。簡単のために平面平行流を考え、物理量が z のみに依存する一次元系を考える。また、系を定める物理量としては密度、圧力、エントロピー、そして平均分子量を考える。今、平衡状態だった流体に摂動が加わり、密度、エントロピー、平均分子量がそれぞれ $\rho(z)$ 、 $S(z)$ 、 $\mu(z)$ である流体片が位置 z から $z + \Delta z$ に変化したとする。この時、温度が放射冷却などで変化する前に圧力は瞬時に $z + \Delta z$ での値に等しくなるとすれば、密度は圧力の変化に従って断熱的に変化する。その変化量を $\rho(z) + \Delta_{\text{ad}}\rho$ と書く。一方で、周囲の密度の変化量を $\rho(z) + \Delta_{\text{sur}}\rho$ と書くと、重力加速度 $-g$ のもとではこの流体片には $-g(\Delta_{\text{ad}}\rho - \Delta_{\text{sur}}\rho)$ だけの浮力が働く。ここで、流体片が断熱的に上昇したこと、及び内包する物質は変化しないことからその密度変化は

$$\Delta_{\text{ad}}\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{S,\mu} \frac{dP}{dz} \Delta z \quad (3.24)$$

であり、周囲の密度変化は

$$\Delta_{\text{sur}}\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{S,\mu} \frac{dP}{dz}\Delta z + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,\mu} \frac{dS}{dz}\Delta z + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_{P,S} \frac{d\mu}{dz}\Delta z \quad (3.25)$$

となる。よって、この場合の浮力は

$$g \left\{ \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,\mu} \frac{dS}{dz} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_{P,S} \frac{d\mu}{dz} \right\} \Delta z \quad (3.26)$$

となる。対流不安定になるのは $\Delta z > 0$ のとき浮力が正になることなので

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,\mu} \frac{dS}{dz} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_{P,S} \frac{d\mu}{dz} > 0 \quad (3.27)$$

の時である。これを Ledoux の条件という。また、 μ の勾配が無視できる場合は、 $(\partial\rho/\partial S)_{P,\mu} < 0$ なので対流不安定条件は

$$\frac{dS}{dz} < 0 \quad (3.28)$$

すなわち負のエントロピー勾配の存在となる。これを Schwarzschild の条件という。

ここまでは摂動の変位に関して式を線形化して不安定性を議論していた。さらに議論を進めて、線型化した摂動の運動方程式は

$$\rho \frac{d^2\Delta z}{dt^2} = g \left(\frac{\partial\rho}{\partial S} \frac{dS}{dz} + \frac{\partial\rho}{\partial\mu} \frac{d\mu}{dz} \right) \Delta z \quad (3.29)$$

となる。ここから、線形成長率 N は

$$N \equiv \sqrt{\frac{g}{\rho} \left\{ \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,\mu} \frac{dS}{dz} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_{P,S} \frac{d\mu}{dz} \right\}} \quad (3.30)$$

となる。もし対流安定、つまり平方根の中身が負であれば、これは Brunt-Väisälä 振動数を与える。さらに、

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,\mu} dS + \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{S,\mu} dP + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_{P,S} d\mu \quad (3.31)$$

より、 μ の勾配が無視できる場合は

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{P,\mu} \frac{dS}{dz} = \frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{S,\mu} \frac{dP}{dz} = \frac{d\rho}{dz} - \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dz} \quad (3.32)$$

なので、

$$N = \sqrt{\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g}{\gamma P} \frac{dP}{dz}} \quad (3.33)$$

と表せる。ただし、

$$\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_{S,\mu} \quad (3.34)$$

である。

以上の議論は周囲の環境が静的な場合に限っていたが、実際の超新星では常に衝撃波に降着してきた物質が中心の原始中性子星に流れてきており、静的な状況ではない。そのような状況では、

対流不安定性の条件としては Ledoux や Schwarzschild の条件よりも、Foglizzo et al. (2006) が提案した χ パラメータ

$$\chi \equiv \int_{\text{gain}}^{\text{shock}} N \frac{dz}{v_z} \quad (3.35)$$

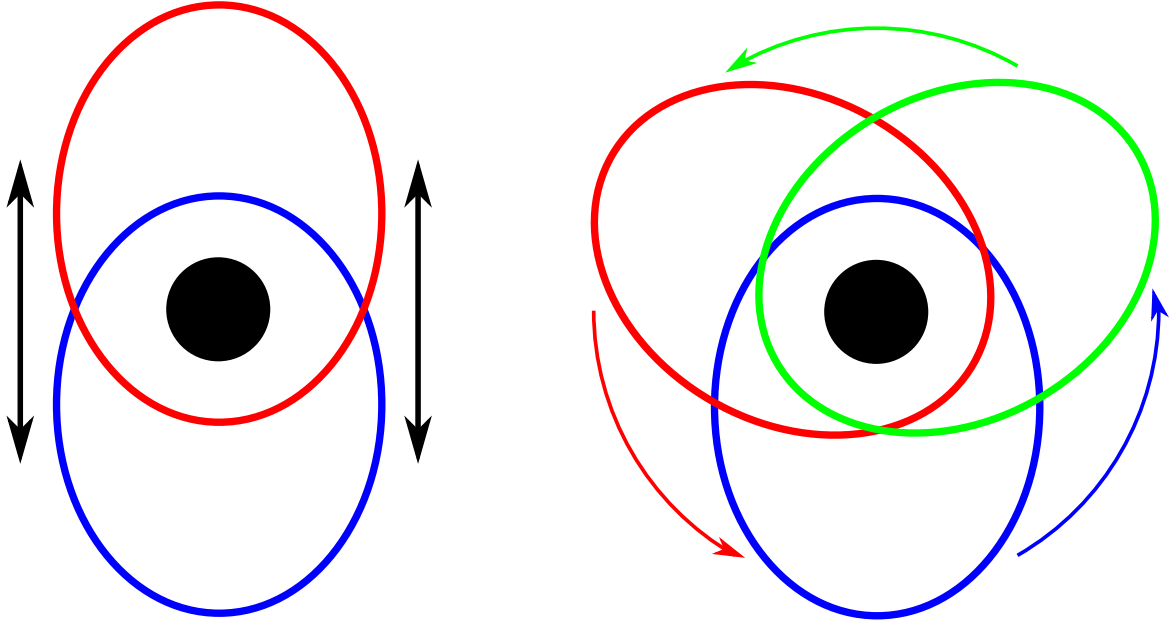
が多く用いられる。これは、大雑把には (ゲイン領域を物質が流れるのにかかる時間)/(対流不安定性が成長するのにかかる時間) という量である。すなわち、 χ が小さいと、対流不安定性が成長する前に物質はゲイン領域を流れ切ってしまう、対流に対して安定になる。ニュートリノ加熱を考えた一次元流体方程式を摂動に関して線形化し、モード解析をしようとすると、安定モード/不安定モードの振動数に関する固有値問題になる。Foglizzo et al. (2006) はこの固有値問題を逆に、振動数が 0 となる場合に χ がどのような値を取るかを調べることで、 χ に関する対流不安定性条件を調べた。その結果、 $\chi \gtrsim 3$ の場合に対流不安定性が発達することを主張した。単純に考えると $\chi > 1$ で対流不安定性は発達しそうだが、なぜ 1 でなくて 3 なのか、その物理的理由はまだわかっていない。また、この条件はあくまで線形解析の結果であり、非線形効果まで考えるシミュレーションでは χ がいくつ以上で不安定になるかは議論の余地がある。

3.3.2 定在降着衝撃波不安定性

3.3.1 節で説明したように、ゲイン領域を物質が流れきるのにかかるタイムスケールが短い場合には対流不安定性は発達しない。しかしながら、これは流体不安定性が何も発生しないということは意味しない。むしろ、しばしば別の不安定性である定在降着衝撃波不安定性、SASI が生じる (Müller et al. 2012a)。

SASI とは、衝撃波面の形が大スケールで振動する不安定性である。もともとブラックホールへ物質が降着する時に発生する不安定性として提唱されたが (Foglizzo 2002)、Blondin et al. (2003) が超新星爆発を模した二次元シミュレーションでも発生することを示した。Blondin et al. (2003) によると、衝撃波面は動径方向の摂動に対しては安定であるが、角度方向の摂動に対しては不安定となる。さらに、三次元シミュレーションでも同様の不安定性が発生することも見つかっている (Blondin and Mezzacappa 2007)。SASI による衝撃波面変動の模式図を図 3.2 に示す。いま、中心の原始中性子星は黒い丸で表し、様々な時刻の衝撃波面を赤、青、緑の線で示す。左側は SASI の sloshing モードという特に二次元シミュレーションでよく見られるパターンを表し、赤と青の間を振動する双極型の動きになる。右側は SASI の spiral モードという特に三次元シミュレーションでよく見られるパターンを表し、赤 → 青 → 緑 → 赤 … というふうに衝撃波面の歪みが回転する。定量的には、衝撃波面の形を二次元なら Legendre 多項式 P_ℓ 、三次元なら球面調和関数 $Y_{\ell m}$ で展開し、その $\ell = 1, 2$ モードの係数の振動で特徴付けられる。sloshing モードは軸対称な $m = 0$ モードに対応し、spiral モードは $m = \pm 1$ モードに対応する。二次元の場合はもちろん sloshing モードしか現れないが、三次元の場合には摂動の加わり方によって sloshing モードと spiral モードのどちらも表れうる (Iwakami et al. 2014)。また、振動や回転のタイムスケールは後で述べる移流音響サイクルのタイムスケールで特徴づけられる (式 (3.92))。SASI により衝撃波面に大スケール (小 ℓ) の周期的な振動が現れるのに対し、対流不安定性では小スケールの泡状構造が浮力で持ち上がることで衝撃波を突き上げるので、それに伴う衝撃波変形はもっと大きな ℓ のモードとなり、はっきりした周期も現れない (Müller et al. 2012a)。

SASI が発達する仕組みは、移流音響サイクルというものであると考えられている。衝撃波の形に角度方向の摂動が加わると、動径方向から降ってくる物質からみると斜め衝撃波になり、衝撃



Sloshing mode

Spiral mode

図 3.2: 定在降着衝撃波不安定性の模式図。中心に示した黒い丸は原始中性子星を表し、赤、青、緑の線はある時点ごとの衝撃波面を表す。左の図は sloshing モードを表し、これはある軸 (二次元超新星シミュレーションでは回転対称軸) に沿って上下に振動する動きを示す。右の図は spiral モードを表し、衝撃波面の歪みが回転する動きを示す。

波通過前後で角度方向の速度にジャンプが生じる。衝撃波面変形が一樣ではない場合は速度の角度成分のジャンプも一樣にはならず、そこで渦度が生じる。この渦度が中心に移流していき、原始中性子星表面で散逸される。このときに音波が発生し、この音波が逆に衝撃波面に向かって伝搬し、衝撃波面をさらに歪める。このようなサイクルを移流音響サイクルという。実際、シミュレーションでは角度方向の速度摂動が衝撃波面で生じてそれが下流に流されていき、また圧力摂動が中心から衝撃波に向かって伝搬していく様子が見られる。それに対して、衝撃波面で発生する音波が原始中性子星で跳ね返され、それがまた衝撃波面で跳ね返され、ということを繰り返して成長するメカニズムは純音響サイクルと呼ばれる。純音響サイクルは現在のところ SASI の支配的なメカニズムにはならないと考えられている。以下では、簡単なモデル (Foglizzo 2009, Foglizzo et al. 2006, Yamasaki and Foglizzo 2008) を用いて移流音響サイクルが SASI の発達に支配的であること、および SASI が大スケールモードで発達することを議論する。

いま、球状の定在衝撃波の代わりに、図 3.3 に示すような $z-x$ 平面上の平面平行流を考える。非摂動定常状態 (基本状態) では x 方向には一樣とし、物質は z 負方向に流れるとする。衝撃波の平均位置を z_{sh} とし、流体は簡単のため手で与えたポテンシャル

$$\Phi(z) = \frac{\Delta\Phi}{2} \left\{ \tanh\left(-\frac{z - z_{\nabla}}{H_{\nabla}/2}\right) + 1 \right\} \quad (3.36)$$

によって、 z_{∇} を中心とする幅 H_{∇} の領域で減速するとする。衝撃波 z_{sh} と減速領域中心 z_{∇} の間の幅は $H \equiv z_{\text{sh}} - z_{\nabla}$ であり、そこでは流体は自由に流れる。系を支配する方程式は連続の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (3.37)$$

ロピ-の摂動 (それぞれ δf 、 δh 、 δS) を考える。ただしエントロピ-は

$$S \equiv \frac{1}{\gamma+1} \log \left[\frac{P}{P_{\text{sh}}} \left(\frac{\rho_{\text{sh}}}{\rho} \right)^\gamma \right] \quad (3.41)$$

と定義する。ただし、添字 sh は衝撃波直後での量であることを表す。摂動はそれぞれ、互いに

$$\delta f = v\delta v + \frac{2}{\gamma-1}a\delta a \quad (3.42)$$

$$\delta h = \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (3.43)$$

$$\delta S = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (3.44)$$

および

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{1}{1-\mathcal{M}^2} \left(\delta h + \delta S - \frac{\delta f}{a^2} \right) \quad (3.45)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{1-\mathcal{M}^2} \left(-\mathcal{M}^2\delta h - \delta S + \frac{\delta f}{a^2} \right) \quad (3.46)$$

$$\frac{\delta a^2}{a^2} = \frac{\gamma-1}{1-\mathcal{M}^2} \left(\frac{\delta f}{a^2} - \mathcal{M}^2\delta h - \mathcal{M}^2\delta S \right) \quad (3.47)$$

という関係で結ばれている。ただし $\mathcal{M} = -v/a$ は Mach 数。摂動の一次までの方程式として、Euler 方程式の z 成分から

$$\frac{\partial \delta f}{\partial z} = \frac{i\omega v}{1-\mathcal{M}^2} \left\{ \delta h + \left(\frac{1}{\mathcal{M}^2} - 1 + \gamma \right) \frac{\delta S}{\gamma} - \frac{\delta f}{a^2} \right\} \quad (3.48)$$

連続の式から

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{i\omega}{v(1-\mathcal{M}^2)} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{\text{ev}}^2}{\omega^2} \right) \frac{\delta f}{a^2} - \mathcal{M}^2\delta h - \delta S \right\} + \frac{k_x \delta K}{\omega v} \quad (3.49)$$

を得る。ただし $\omega_{\text{ev}} \equiv k_x a \sqrt{1-\mathcal{M}^2}$ であり、 δK は摂動によって加わった y 方向の渦度 δw_y を用いて

$$\delta K \equiv ik_x \frac{a^2}{\gamma} \delta S - v\delta w_y \quad (3.50)$$

である。あとで示すように、この量は 0 となる。また、エントロピ-方程式は

$$\frac{\partial \delta S}{\partial z} = i\frac{\omega}{v} \delta S \quad (3.51)$$

となる。

さらに、 δK が 0 となることを示す準備として、 δK が従う方程式を導く。Euler 方程式の x 成分から δv_x を x 方向の速度の摂動として

$$-i\omega\delta v_x + v\delta w_y + ik_x\delta f - ik_x \frac{a^2}{\gamma} \delta S = 0 \quad (3.52)$$

であるから、

$$\delta K = ik_x\delta f - i\omega\delta v_x \quad (3.53)$$

とも書ける。この式から、

$$\frac{\partial \delta f}{\partial z} = \frac{1}{ik_x} \frac{\partial \delta K}{\partial z} + \frac{\omega}{k_x} \frac{\partial \delta v_x}{\partial z} \quad (3.54)$$

となり、渦度の定義から

$$\delta w_y = \frac{\partial \delta v_x}{\partial z} - ik_x \delta v \quad (3.55)$$

であることを用いると

$$\frac{\partial \delta f}{\partial z} = \frac{1}{ik_x} \frac{\partial \delta K}{\partial z} + \frac{\omega}{k_x} \delta w_y + i\omega \delta v \quad (3.56)$$

となる。また、式 (3.48) を簡単のために

$$\frac{\partial \delta f}{\partial z} = i\omega \delta v + i \frac{\omega a^2}{v \gamma} \delta S \quad (3.57)$$

と書いておく。これは式 (3.50) を用いて δS を置き換えて

$$\frac{\partial \delta f}{\partial z} = \frac{\omega}{vk_x} \delta K + \frac{\omega}{k_x} \delta w_y + i\omega \delta v \quad (3.58)$$

となる。以上より、

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{i\omega}{v} \right) \delta K = 0 \quad (3.59)$$

と δK が従う方程式がわかる。これは δK の Lagrange 微分が 0 であるということであり、 δK の値は衝撃波位置での境界条件で与える値にいたるところ等しいことを示している。

次に、 δf 、 δh 、 δS の境界条件を考える。衝撃波面は摂動によって基本状態の場合の位置 z_{sh} から変動するので、それを $z_{sh} + \Delta \zeta$ とする。また、衝撃波面の速度を Δv とすると、 $\Delta v = -i\omega \Delta \zeta$ となる。衝撃波静止系での Rankine-Hugoniot 条件は、この速度も考えて

$$\rho_1 (v_1 - \Delta v) = (\rho_{sh} + \delta \rho_{sh}) (v_{sh} + \delta v_{sh} - \Delta v) \quad (3.60)$$

$$\rho_1 (v_1 - \Delta v)^2 + \rho_1 \frac{a_1^2}{\gamma} = (\rho_{sh} + \delta \rho_{sh}) (v_{sh} + \delta v_{sh} - \Delta v)^2 + (\rho_{sh} + \delta \rho_{sh}) \frac{(a_{sh} + \delta a_{sh})^2}{\gamma} \quad (3.61)$$

$$\frac{(v_1 - \Delta v)^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = \frac{(v_{sh} + \delta v_{sh} - \Delta v)^2}{2} + \frac{(a_{sh} + \delta a_{sh})^2}{\gamma - 1} \quad (3.62)$$

となる。ただし、下付き添字の 1 と sh はそれぞれ衝撃波のすぐ上流とすぐ下流での量を表す。これらの条件は $z_{sh} + \Delta \zeta$ でのものなので、全てを z_{sh} での量に直すとすると、Taylor 展開によって

$$\rho_1 v_1 \delta h_{sh} - (\rho_{sh} - \rho_1) \Delta v = \Delta \zeta \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\rho v)_1 - \frac{\partial}{\partial z} (\rho v)_{sh} \right\} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} v_{sh}^2 \delta \rho_{sh} + 2\rho_{sh} v_{sh} \delta v_{sh} + \frac{2}{\gamma} \rho_{sh} a_{sh} \delta a_{sh} + \delta \rho_{sh} \frac{a_{sh}^2}{\gamma} \\ = \Delta \zeta \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho v^2 + \rho \frac{a^2}{\gamma} \right)_1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho v^2 + \rho \frac{a^2}{\gamma} \right)_{sh} \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\delta f_{sh} - (v_{sh} - v_1) \Delta v = \Delta \zeta \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} \right)_1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} \right)_{sh} \right\} \quad (3.65)$$

となる。ここで、式 (3.39) から式 (3.63) 右辺の括弧内は消え、式 (3.40) から式 (3.65) の右辺の括弧内は $\partial \Phi / \partial z$ のジャンプになるが、これも 0 である。一方で式 (3.64) の右辺の括弧内は $-\rho \partial \Phi / \partial z$ のジャンプになり、これは ρ がジャンプするため一般には消えずに残る。ただし今考えている系

では衝撃波面ではポテンシャル勾配自体が無視できるので、その結果

$$\delta h_{\text{sh}} = \left(\frac{1}{v_{\text{sh}}} - \frac{1}{v_1} \right) \Delta v = -i\omega \left(\frac{1}{v_{\text{sh}}} - \frac{1}{v_1} \right) \Delta \zeta \quad (3.66)$$

$$\frac{\delta S_{\text{sh}}}{\gamma} = -\frac{v_1 \Delta v}{a_{\text{sh}}^2} \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right)^2 = \frac{i\omega v_1 \Delta \zeta}{a_{\text{sh}}^2} \left(1 - \frac{v_{\text{sh}}}{v_1} \right)^2 \quad (3.67)$$

$$\delta f_{\text{sh}} = (v_{\text{sh}} - v_1) \Delta v = -i\omega (v_{\text{sh}} - v_1) \Delta \zeta \quad (3.68)$$

が衝撃波面での境界条件となる。

また、 δK の境界条件を考える。変形した衝撃波は z 軸方向に降ってくる物質にとっては斜め衝撃波になっているので、通過した直後の x 方向の速度のジャンプは

$$\delta v_{x,\text{sh}} = (v_1 - v_{\text{sh}}) \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial x} = ik_x (v_1 - v_{\text{sh}}) \Delta \zeta \quad (3.69)$$

となる。これらから、 δK の衝撃波直後の値は

$$\delta K_{\text{sh}} = ik_x \delta f_{\text{sh}} - i\omega \delta v_{x,\text{sh}} = 0 \quad (3.70)$$

となる。式 (3.59) の議論もあわせて、 δK はいたる所 0 となることが示された。加えて、その帰結として

$$\delta w_y = i \frac{k_x a^2}{v \gamma} \delta S \quad (3.71)$$

$$\delta v_x = \frac{k_x}{\omega} \delta f \quad (3.72)$$

となり、エントロピー摂動の移流は渦度の移流を伴うことがわかる。

下流での境界条件を書き下すために、 δf および δh を物質の移流に伴う成分 δf^S 、 δh^S と音波による成分 δf^\pm 、 δh^\pm (複号は + が流体と同じ方向に向かう成分、- が逆方向に向かう成分) とに分解する。まず移流に伴う成分は、Lagrange 微分すると 0 になる。すなわち、 z 微分すると係数として $i\omega/v$ が出てくる。従って、次の方程式系

$$\frac{i\omega}{v} \delta f^S = \frac{i\omega v}{1 - \mathcal{M}^2} \left\{ \delta h^S + \left(\frac{1}{\mathcal{M}^2} - 1 + \gamma \right) \frac{\delta S}{\gamma} - \frac{\delta f^S}{a^2} \right\} \quad (3.73)$$

$$\frac{i\omega}{v} \delta h^S = \frac{i\omega}{v(1 - \mathcal{M}^2)} \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{\text{ev}}^2}{\omega^2} \right) \frac{\delta f^S}{a^2} - \mathcal{M}^2 \delta h^S - \delta S \right\} \quad (3.74)$$

の解が δf^S 、 δh^S である。具体的に書くと、

$$\delta f^S = \frac{1 - \mathcal{M}^2}{1 - \mu^2 \mathcal{M}^2} a^2 \frac{\delta S}{\gamma} \quad (3.75)$$

$$\delta h^S = \frac{\mu^2}{a^2} \delta f^S - \delta S \quad (3.76)$$

となる。ただし、 $\mu^2 = 1 - \omega_{\text{ev}}^2/\omega^2$ 。移流に伴う成分の添字を S にしたのは、エントロピー摂動に比例しているからである。式 (3.48)、(3.49) へのエントロピー摂動の寄与は全て δf^S 、 δh^S に含まれるので、音波による成分は $\delta S = 0$ とした方程式系の解になる。この場合、 z 依存性を

$\delta f^\pm, \delta h^\pm \propto \exp(ik_z^\pm z)$ とすると、非自明解を得る条件は

$$k_z^\pm = \frac{\omega}{a} \frac{\mathcal{M} \mp \mu}{1 - \mathcal{M}^2} \quad (3.77)$$

である。ただし、 μ の符号は $\text{Re}(\mu^2) < 0$ ならば $\text{Im}(k_z^\pm) < 0$ 、 $\text{Re}(\mu^2) > 0$ ならば $\text{Re}(k_z^\pm) < 0$ となるように選ぶ。また、

$$\delta f^+ + \delta f^- = \delta f - \delta f^S \quad (3.78)$$

とそれを z 微分した

$$\delta f^+ - \delta f^- = \frac{\mathcal{M}a^2}{\mu} (\delta h + \delta S) - \mu \mathcal{M} \delta f^S \quad (3.79)$$

から、

$$\delta f^\pm = \frac{1}{2} f \pm \frac{\mathcal{M}a^2}{2\mu} (\delta h + \delta S) - \frac{1 \pm \mu \mathcal{M}}{2} \delta f^S \quad (3.80)$$

$$\delta h^\pm = \pm \frac{\mu}{\mathcal{M}a^2} \delta f^\pm \quad (3.81)$$

と書ける。

以上のように分解することで、下流での境界条件を書き下すことができる。いま、下流ではより下流側からは摂動が伝播してこないという条件を課すので、式 (3.80) から

$$\frac{\mu_{\text{out}}}{\mathcal{M}_{\text{out}}} - \left(\gamma + \frac{\mu_{\text{out}}}{\mathcal{M}_{\text{out}}} \frac{1 - \mathcal{M}_{\text{out}}^2}{1 + \mu_{\text{out}} \mathcal{M}_{\text{out}}} \right) \frac{\delta S_{\text{out}}}{\gamma} - \delta h_{\text{out}} = 0 \quad (3.82)$$

が境界条件となる。ただし添字 out は減速領域のすぐ下流での量であることを表し、以下で用いる添字 in は減速領域のすぐ上流での量であることを表す。

摂動の移流成分と二つの音波成分は全て互いに独立であるが、境界条件を課した衝撃波面と減速領域では互いに結びつく。衝撃波で上向きの音波が下向きの音波に反射される効率を \mathcal{R}_{sh} 、移流成分に変換される効率を \mathcal{Q}_{sh} とし、減速領域で下向きの音波が上向きの音波に反射される効率を \mathcal{R}'_{∇} 、移流成分が上向きの音波に散逸される効率を \mathcal{Q}'_{∇} とする。このとき、

$$\delta f_{\text{sh}}^+ = \mathcal{R}_{\text{sh}} \delta f_{\text{sh}}^- \quad (3.83)$$

$$\delta f_{\text{sh}}^S = \mathcal{Q}_{\text{sh}} \delta f_{\text{sh}}^- \quad (3.84)$$

$$\delta f_{\text{in}}^- = \mathcal{Q}'_{\nabla} \delta f_{\text{in}}^S + \mathcal{R}'_{\nabla} \delta f_{\text{in}}^+ \quad (3.85)$$

である。衝撃波面と減速領域での摂動は移流または伝搬によって、 $k_z^0 = \omega/v$ として

$$\delta f_{\text{sh}}^S = e^{ik_z^0 H} \delta f_{\text{in}}^S \quad (3.86)$$

$$\delta f_{\text{sh}}^+ = e^{ik_z^+ H} \delta f_{\text{in}}^+ \quad (3.87)$$

$$\delta f_{\text{sh}}^- = e^{ik_z^- H} \delta f_{\text{in}}^- \quad (3.88)$$

という関係で結ばれる。ここから、

$$\delta f_{\text{sh}}^- = \mathcal{Q}_{\nabla} \delta f_{\text{sh}}^S + \mathcal{R}_{\nabla} \delta f_{\text{sh}}^+ \quad (3.89)$$

とかける。ただし $Q_{\nabla} \equiv Q'_{\nabla} e^{i\omega\tau_Q}$ 、 $\mathcal{R}_{\nabla} \equiv \mathcal{R}'_{\nabla} e^{i\omega\tau_{\mathcal{R}}}$ と定義され、

$$\tau_Q \equiv (k_z^- - k_z^0) \frac{H}{\omega} = \tau_{\text{aac}} \frac{1 + \mu_{\text{in}} \mathcal{M}_{\text{in}}}{1 + \mathcal{M}_{\text{in}}} \quad (3.90)$$

$$\tau_{\mathcal{R}} \equiv (k_z^- - k_z^+) \frac{H}{\omega} = \frac{H}{a_{\text{in}}} \frac{2\mu_{\text{in}}}{1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2} \quad (3.91)$$

である。 τ_{aac} は移流音響サイクルのタイムスケールであり、衝撃波面で発生した摂動が減速領域まで移流し、そこで瞬間的に散逸されて発生した音波摂動が衝撃波面に帰ってくるまでの時間となる。すなわち、

$$\tau_{\text{aac}} \equiv \frac{H}{a_{\text{in}}} \frac{1}{\mathcal{M}_{\text{in}}(1 - \mathcal{M}_{\text{in}})} \quad (3.92)$$

である。式 (3.83)、(3.84)、(3.89) から $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{\text{sh}} \mathcal{R}_{\nabla}$ および $Q \equiv Q_{\text{sh}} Q_{\nabla}$ は

$$\mathcal{R} + Q = 1 \quad (3.93)$$

という関係がある。 \mathcal{R} は一サイクルあたりの純粋な音波による摂動の成長効率、 Q は移流音響サイクルの効率になる。

まず衝撃波面での変換効率を考えるために、波面での摂動の各成分の値を考える。基本状態の Rankine-Hugoniot 条件から、上流と下流の速度の比および音速の二乗の比は

$$\frac{v_{\text{sh}}}{v_1} = \frac{(\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2 + 2}{(\gamma + 1)\mathcal{M}_1^2} \quad (3.94)$$

$$\frac{a_{\text{sh}}^2}{a_1^2} = \frac{\{(\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2 + 2\}\{2\gamma\mathcal{M}_1^2 - (\gamma - 1)\}}{(\gamma + 1)^2\mathcal{M}_1^2} \quad (3.95)$$

となる。これらを用いて衝撃波面での摂動の境界条件 (3.66)、(3.67)、(3.68) を書き直すと、

$$\delta S_{\text{sh}} = -\frac{4\gamma(\mathcal{M}_1^2 - 1)^2}{(\gamma + 1)^2\mathcal{M}_1^2} \frac{a_1^2}{a_{\text{sh}}^2} \frac{\Delta v}{v_1} \quad (3.96)$$

$$\delta f_{\text{sh}} = -\frac{2a_1^2}{\gamma + 1} (\mathcal{M}_1^2 - 1) \frac{\Delta v}{v_1} \quad (3.97)$$

$$\delta h_{\text{sh}} + \delta S_{\text{sh}} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{a_1^2}{a_{\text{sh}}^2} \frac{\mathcal{M}_1^2 - 1}{\mathcal{M}_1^2} \frac{\Delta v}{v_1} \quad (3.98)$$

となる。ここから、(3.80) より (3.75) も用いて

$$\begin{aligned} \delta f_{\text{sh}}^{\pm} &= \frac{1}{2} f_{\text{sh}} \pm \frac{\mathcal{M}_{\text{sh}} a_{\text{sh}}^2}{2\mu_{\text{sh}}} (\delta h_{\text{sh}} + \delta S_{\text{sh}}) - \frac{1 \pm \mu_{\text{sh}} \mathcal{M}_{\text{sh}}}{2} \delta f_{\text{sh}}^S \\ &= \mp \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \frac{a_{\text{sh}}^2}{1 - \mathcal{M}_1^{-2}} \frac{\delta S_{\text{sh}}}{\mu_{\text{sh}}} \frac{\mathcal{M}_{\text{sh}} \mu_{\text{sh}}^2 \mp \mathcal{M}_{\text{sh}} \mu_{\text{sh}} (2 - \mathcal{M}_1^{-2} + \mathcal{M}_{\text{sh}}/\mathcal{M}_1^2) + \mathcal{M}_1^{-2}}{1 \mp \mu_{\text{sh}} \mathcal{M}_2} \end{aligned} \quad (3.99)$$

衝撃波上流での Mach 数が十分大きいとすると、これは

$$\delta f_{\text{sh}}^{\pm} = \mp \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \frac{a_{\text{sh}}^2}{1 - \mathcal{M}_1^{-2}} \frac{\delta S_{\text{sh}}}{\mu_{\text{sh}}} \frac{\mathcal{M}_{\text{sh}} \mu_{\text{sh}}^2 \mp 2\mathcal{M}_{\text{sh}} \mu_{\text{sh}} + \mathcal{M}_1^{-2}}{1 \mp \mu_{\text{sh}} \mathcal{M}_2} \quad (3.100)$$

となる。この表式から、 \mathcal{R}_{sh} は

$$\mathcal{R}_{\text{sh}} = \frac{\delta f_{+, \text{sh}}}{\delta f_{-, \text{sh}}} = -\frac{\mu_{\text{sh}}^2 - 2\mathcal{M}_{\text{sh}} \mu_{\text{sh}} + \mathcal{M}_1^{-2}}{\mu_{\text{sh}}^2 + 2\mathcal{M}_{\text{sh}} \mu_{\text{sh}} + \mathcal{M}_1^{-2}} \frac{1 + \mu_{\text{sh}} \mathcal{M}_{\text{sh}}}{1 - \mu_{\text{sh}} \mathcal{M}_{\text{sh}}} \quad (3.101)$$

と計算でき、また Q_{sh} を計算すると

$$Q_{\text{sh}} = \frac{\delta f_{S,\text{sh}}}{\delta f_{-, \text{sh}}} = \frac{2}{M_{\text{sh}}} \frac{1 - M_{\text{sh}}^2}{1 + \gamma M_{\text{sh}}^2} \left(1 - \frac{M_{\text{sh}}^2}{M_1^2}\right) \frac{\mu_{\text{sh}}}{(1 - \mu_{\text{sh}} M_{\text{sh}})(\mu_{\text{sh}}^2 + 2\mu_{\text{sh}} M_{\text{sh}} + M_1^{-2})} \quad (3.102)$$

となる。さらに減速領域での変換効率を考えるが、ここでは減速領域の厚さが無限小であると近似する (コンパクト近似)。これが成り立つ条件は摂動の z 方向の波長 $2\pi/k_z$ が減速領域の幅より十分大きいことである。特に、移流成分の波長 $k_z^S = \omega/v$ から近似が成り立つ条件として

$$\frac{2\pi}{\omega} \gg \tau_{\nabla} \equiv \int_{z_{\nabla} - \frac{H_{\nabla}}{2}}^{z_{\nabla} + \frac{H_{\nabla}}{2}} \frac{dz}{|v|} \quad (3.103)$$

を要請する。まず \mathcal{R}'_{∇} を考える。 $\delta f_{\text{in},\mathcal{R}}^- \equiv \mathcal{R}'_{\nabla} \delta f_{\text{in}}^+$ は上向き音波の摂動のうち、下向きの音波が減速領域で反射された時に生じる成分であると解釈できる。同様に、下向き音波の反射と透過に関する量は添字に \mathcal{R} を付けて表すことにすると、音波の反射は減速領域の前後で

$$\delta f_{\text{in}}^+ + \delta f_{\text{in},\mathcal{R}}^- = \delta f_{\text{out},\mathcal{R}}^+ \quad (3.104)$$

$$\delta h_{\text{in}}^+ + \delta h_{\text{in},\mathcal{R}}^- = \delta h_{\text{out},\mathcal{R}}^+ \quad (3.105)$$

と書ける。 δh の式は (3.81) から

$$\delta f_{\text{in}}^+ - \delta f_{\text{in},\mathcal{R}}^- = \frac{\mu_{\text{out}} \mathcal{M}_{\text{in}} a_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{in}} \mathcal{M}_{\text{out}} a_{\text{out}}^2} \delta f_{\text{out},\mathcal{R}}^+ \quad (3.106)$$

となるので、

$$\mathcal{R}'_{\nabla} = \frac{\mu_{\text{in}} \mathcal{M}_{\text{out}} a_{\text{out}}^2 - \mu_{\text{out}} \mathcal{M}_{\text{in}} a_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{in}} \mathcal{M}_{\text{out}} a_{\text{out}}^2 + \mu_{\text{out}} \mathcal{M}_{\text{in}} a_{\text{in}}^2} \quad (3.107)$$

を得る。次に Q'_{∇} を考える。 $\delta f_{\text{in},\mathcal{Q}}^- \equiv Q'_{\nabla} \delta f_{\text{in}}^S$ を上向き音波摂動のうち、摂動の移流成分が減速領域で散逸された時に生じる成分であると解釈できる。移流成分の散逸に関する量は添字 \mathcal{Q} をつけて表すものとする、エネルギーの保存および質量保存から

$$\delta f_{\text{in}}^S + \delta f_{\text{in},\mathcal{Q}}^- = \delta f_{\text{out}}^S + \delta f_{\text{out},\mathcal{Q}}^+ \quad (3.108)$$

$$\delta h_{\text{in}}^S + \delta h_{\text{in},\mathcal{Q}}^- = \delta h_{\text{out}}^S + \delta h_{\text{out},\mathcal{Q}}^+ \quad (3.109)$$

となり、(3.76)、(3.81) および減速領域の前後でエントロピー摂動は変化しないことから

$$\delta f_{\text{in},\mathcal{Q}}^- - \delta f_{\text{out},\mathcal{Q}}^+ = \delta f_{\text{out}}^S - \delta f_{\text{in}}^S \quad (3.110)$$

$$\frac{\mu_{\text{in}}}{\mathcal{M}_{\text{in}}} \frac{\delta f_{\text{in},\mathcal{Q}}^-}{a_{\text{in}}^2} + \frac{\mu_{\text{out}}}{\mathcal{M}_{\text{out}}} \frac{\delta f_{\text{out},\mathcal{Q}}^+}{a_{\text{out}}^2} = \mu_{\text{in}}^2 \frac{\delta f_{\text{out}}^S}{a_{\text{in}}^2} - \mu_{\text{out}}^2 \frac{\delta f_{\text{in}}^S}{a_{\text{out}}^2} \quad (3.111)$$

と書き換えられる。さらに、 $\delta f_{\text{in},\text{out}}^S$ はどちらも δS で書けるので、それを用いて

$$Q'_{\nabla} = \frac{\mathcal{M}_{\text{out}} + \mu_{\text{out}}}{1 + \mu_{\text{out}} \mathcal{M}_{\text{out}}} \frac{1}{\mu_{\text{out}} \frac{a_{\text{in}}^2}{a_{\text{out}}^2} + \mu_{\text{in}} \frac{\mathcal{M}_{\text{out}}}{\mathcal{M}_{\text{in}}}} \left\{ 1 - \frac{a_{\text{in}}^2}{a_{\text{out}}^2} + \frac{k_x^2 a_{\text{in}}^2}{\omega^2} (\mathcal{M}_{\text{in}}^2 - \mathcal{M}_{\text{out}}^2) \right\} \quad (3.112)$$

と計算できる。これら Q'_{∇} 、 \mathcal{R}'_{∇} にそれぞれ $\exp(i\omega\tau_{\mathcal{Q}})$ 、 $\exp(i\omega\tau_{\mathcal{R}})$ をかけたものが Q_{∇} 、 \mathcal{R}_{∇} である。コンパクト近似を用いた場合と、近似を用いずに $H_{\nabla}/H = 0.1$ とした場合の $|Q_{\nabla}|$ 、 $|\mathcal{R}_{\nabla}|$ の数値解は Foglizzo (2009) の図 5、6 で比較されている。コンパクト近似をする場合としない場

合とは $\omega\tau_{\nabla} \sim 1$ より小さいところではよく一致している。これはコンパクト近似が成立する範囲であるが、そこから外れると数値解はコンパクト近似解より小さくなっていく。これは、コンパクト近似ではどの波長の摂動も減速領域 z_{∇} の一点で散逸、反射されるが、減速領域が有限の大きさを持っている場合は領域内の各点から散逸、反射された音波が位相がずれて重なりあい、ある程度打ち消し合ってしまうからだと考えられる。

これらから、純音響サイクルの効率

$$\mathcal{R} = -\frac{1 + \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}}^2 - 2\mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}} + \mathcal{M}_{\text{in}}^{-2}}{1 - \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}}\mu_{\text{in}}^2 + 2\mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}} + \mathcal{M}_{\text{in}}^{-2}} \frac{\mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{out}}a_{\text{out}}^2 - \mu_{\text{out}}\mathcal{M}_{\text{in}}a_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{out}}a_{\text{out}}^2 + \mu_{\text{out}}\mathcal{M}_{\text{in}}a_{\text{in}}^2} \exp(i\omega\tau_{\mathcal{R}}) \quad (3.113)$$

と移流音響サイクルの効率

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \frac{4}{\gamma + 1} \frac{\mu_{\text{in}}}{\mathcal{M}_{\text{in}}} \frac{1 - \frac{a_{\text{in}}^2}{a_{\text{out}}^2} + \frac{k_x^2 a_{\text{in}}^2}{\omega^2} (\mathcal{M}_{\text{in}}^2 - \mathcal{M}_{\text{out}}^2)}{(1 - \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}})(\mu_{\text{in}}^2 + 2\mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{in}} + \mathcal{M}_{\text{in}}^{-2})} \\ &\times \frac{\mathcal{M}_{\text{out}} + \mu_{\text{out}}}{1 + \mu_{\text{out}}\mathcal{M}_{\text{out}}} \frac{(1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2)(1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^{-2})}{\mu_{\text{out}}a_{\text{in}}^2/a_{\text{out}}^2 + \mu_{\text{in}}\mathcal{M}_{\text{out}}/\mathcal{M}_{\text{in}}} \exp(i\omega\tau_{\mathcal{Q}}) \end{aligned} \quad (3.114)$$

が求まる。Foglizzo (2009) の図 7 には、二つのサイクルの効率 $|\mathcal{Q}|$ 、 $|\mathcal{R}|$ が示されている。その図を見るとわかるように、純音響サイクルは特定の振動数の摂動を加えた時以外は効率が非常に小さく、効率が大きくなる時でも 1 より大きくはならないため、不安定性は成長しない。一方で、移流音響サイクルは効率が 1 を超える成長モードが存在する。しかしながら、コンパクト近似を用いた場合は k_z が大きい場合でも成長するモードがあるが、減速領域が有限の幅を持つ場合はある程度以上 k_z が大きいと成長モードがない。これは、 \mathcal{Q}_{∇} についての議論と同様の理由である。

移流音響サイクルが成長するためには、コンパクト近似が成立して音波が打ち消し合わないことが必要である。この条件は $\text{Re}(\omega) < \omega_{\nabla} = 1/\tau_{\nabla}$ である。また、 k_z^- には虚部が存在するため、伝搬に従って減衰する。減速領域で発生した音波が減衰しきらずに衝撃波面に到達しなければ移流音響サイクルは成長しない。この観点からの成長する条件は $\text{Im}(k_z^- H) < 1$ である。これらを組み合わせると、

$$k_x^2 < \frac{\omega_{\nabla}^2}{a_{\text{in}}^2(1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2)} + \frac{1 - \mathcal{M}_{\text{in}}^2}{H^2} \quad (3.115)$$

を得る。ここで、簡単のために $\mathcal{M}_{\text{in}}^2 \ll 1$ を無視すると、無次元化して

$$n_x^2 < \left(\frac{L_x}{2\pi a_{\text{in}} \tau_{\nabla}} \right)^2 + \left(\frac{L_x}{2\pi H} \right)^2 \quad (3.116)$$

となる。ここまでは平面平行流で移流音響サイクルを考えてきたが、これを単純に超新星の定在衝撃波に適用するとした場合、 n_x の代わりに多重極モーメント指数 l を用い、また系のサイズとして L_x の代わりに衝撃波の円周長 $2\pi R_s$ を用いることができると仮定すると、

$$l^2 < \left(\frac{R_s}{a_{\text{in}} \tau_{\nabla}} \right)^2 + \left(\frac{R_s}{H} \right)^2 \quad (3.117)$$

となる。いま、尤もらしい値として Scheck et al. (2008) のシミュレーションの結果を取ってくると、 $R_s \sim 110$ km、 $H \sim 50$ km、 $R_s/a_{\text{in}} \sim 5$ ms、 $\tau_{\nabla} \sim 15$ ms となる。これらから計算した場合、 $l < 2.2$ となり、SASI では大スケールのモードが発達することが示唆される。小スケールのモードは渦度が散逸して音波を作る時に打ち消しが起こり、また減衰も速いため、発達できないのである。

Blondin et al. (2003) ではニュートリノ加熱の寄与は無視し、全体が等エントロピーであるという仮定のもとでのシミュレーションがなされており、ニュートリノ加熱も整合的に考えた場合のシミュレーションでは近年になるまで SASI の発達が見られなかったが、Müller et al. (2012a) は初めてニュートリノ加熱まで考えた場合にも SASI が発達するシミュレーションを示した。彼らはさらに、式 (3.35) の χ パラメータが 3 より小さくなることが SASI が発生する条件であるとし、そのためには鉄コアの周りのケイ素シェルが厚く、質量降着率が大きいことが必要であると主張した。また、三次元でニュートリノ Boltzmann 方程式を解いた場合にも SASI が生じる様子が Takiwaki et al. (2012) などでは確かめられている。

3.3.3 ニュートリノ加熱への影響

ここまで超新星爆発で生じる流体不安定性について議論してきたが、ここではそれらがどのようにニュートリノ加熱の効率を高めるかを議論する。ただし、現在までに複数の効果が指摘されており、一つに定められるようなものではない。今後新たな過程が発見される可能性もある。

対流不安定性に伴う Reyleigh-Taylor 不安定性による流体片の運動は、加熱効率を高める過程のひとつである。この運動は高温の流体片をゲイン領域の深い所から衝撃波のすぐ後ろまで運び、また衝撃波通過直後の低温の流体片をゲイン領域の深くまで運ぶ。ゲイン領域深部はニュートリノ加熱率は大きいので、流体片はより効率よく加熱される。また、ゲイン領域深くの高温の流体片は不安定性なしにはすぐに冷却領域に流れ込み、ニュートリノを放出して冷えてしまうが、この流体運動でゲイン領域に留まることでニュートリノ放出による冷却が抑えられる。

衝撃波が十分加熱されて膨張し始めると、原始中性子星に降着する物質の量が減ってニュートリノ光度が下がり、また衝撃波が冷えてしまう。しかしながら、流体不安定性による非球対称な衝撃波膨張では物質の降着も同時に起こるため、ニュートリノ光度を保ちつつ衝撃波も膨張することができる。この点も、ニュートリノ加熱メカニズムには有利である。

対流か SASI かに拘らず、流体不安定性は線型段階を超えて非線形段階まで発達すると、いずれ乱流を生じるようになる。こうした乱流にも Reyleigh-Taylor 不安定性と同様の効果がある。つまり、乱流運動により長時間ゲイン領域に滞在して t_{dwell} (式 (3.22)) を伸ばすのである。実際、流体片の運動はゲイン領域で複雑な軌道を描き、長時間そこに留まる様子が Takiwaki et al. (2012) の図 11 から見て取れる。また、ゲイン領域内での流体片の運動は定在衝撃波の内側にもう一つ衝撃波を作ることがある (二次衝撃波)。この二次衝撃波での散逸によって熱化がさらに進み、もともとの定在衝撃波にエネルギーを与えるという機構も指摘されている。

加えて、乱流は乱流圧力 (Reynolds 応力) を生じ、衝撃波を外に押し出す。衝撃波が押し出されると、その分ゲイン領域が広がるため、3.2 節での議論に従いニュートリノ加熱の効率が上がる。Reynolds 応力によって衝撃波半径が広がる様子は Murphy et al. (2013) によって調べられている。対流か SASI にかかわらず、流体不安定性が起こると衝撃波面が大きく歪むが、Reynolds 応力を考慮しない場合は平均衝撃波半径を正しく説明できない。Reynolds 応力とは、速度場 u を Reynolds 平均 \bar{v} とそこからのゆらぎ v' に分解した時、ゆらぎ v' から作られる応力 $v'v'$ をさらに Reynolds 平均したものである。Reynolds 平均とは、流体の物理量を乱流渦が一回転するタイムスケールで平均したもので、以下の議論ではさらに全立体角についての平均も取る。衝撃波の位置は、Rankine-Hugoniot 条件を満たす場所として定義できる。いま、運動量フラックスのジャンプ条件

$$[P + \rho v^2 + \rho R_{rr}] = 0 \quad (3.118)$$

を考える。ただし、熱圧力 P と動圧 ρv^2 に加えて Reynolds 応力 ρR_{rr} まで考えてある。衝撃波の上流では物質は自由落下してくるので、運動量フラックスとしては動圧のみを考えればよく、また r の適当な冪で記述できる。一方で衝撃波の下流は全てのフラックスの和を考えなければならないが、これも適当な冪で記述できる。そこで、シミュレーション結果から上流の動圧が従う冪と下流の運動量フラックスの従う冪とをフィッティングし、それを中間領域まで外挿し、ジャンプ条件を満たす位置を衝撃波の位置と考える。Murphy et al. (2013) の図 7 では上記の議論から推定した衝撃波半径とシミュレーションでの実測値とが比較されている。ここでは、実際に両者が精度よく一致している様子、および乱流圧力を無視して推定した衝撃波半径がシミュレーションのそれより小さくなっている様子が見て取れる。面白いことに、この乱流を無視した衝撃波推定位置は、衝撃波最小半径とよく一致することも同時に確かめられている。Murphy et al. (2013) は、最小衝撃波半径は乱流がゆらぎによって瞬間的に無視できるような位置で達成される可能性を指摘している。

いずれにせよ、多次元でのみ生じる流体不安定性はニュートリノ加熱を助け、ニュートリノ加熱メカニズムにおいて重要な役割を果たす。

3.4 その他の爆発メカニズム

本論文ではニュートリノ加熱メカニズムに主に着目するが、重力崩壊型超新星爆発には他のメカニズムも考えられている。ここではそれらのメカニズムの概要を Janka (2012) に従って紹介する。

3.4.1 音響メカニズム

ニュートリノ輸送を考えたシミュレーションであっても、その輸送の扱いやその他の入力物理によってはニュートリノ加熱による爆発はしない場合もある。しかしながら、Burrows et al. (2006a, 2007b) はそのような場合でニュートリノ加熱由来でない爆発を発見した。バウンス後 1 秒程度以上経ってから中心の原始中性子星で $\ell = 1$ モードの g-モード振動、浮力を復元力とする星震が起こる。これは流体不安定性による非等方的な降着流によって発生する。この原始中性子星の振動を波源として音波が外側に伝搬していくが、外に行くにつれて密度が小さくなっていくので位置によって伝搬速度が変わり、音波は衝撃波に変化する。この衝撃波への散逸がバウンス衝撃波にエネルギーを加え、爆発を起こす。Burrows et al. (2007a) ではこの音波によるエネルギー注入率は $\sim 0.5 \times 10^{51}$ erg/s と見積もられているが、この見積もりには不定性がある。また、長時間シミュレーションはできていないため爆発のエネルギーは確定できていないが、あまり大きくはないと推測される。これまでのところ他のグループでこのメカニズムを再現できたところはない (Marek and Janka 2009) が、それは Burrows et al. (2006a, 2007b) の手法が不正確なのか、1 秒程度以上の長時間シミュレーションをしているグループがないからなのかは不明である。

3.4.2 磁気流体力学メカニズム

Wilson (1985) のニュートリノ加熱メカニズムによる爆発の前から、磁気流体力学 (magnetohydrodynamics, MHD) が関わるメカニズムでの超新星爆発も研究されてきた (e.g. Meier et al. 1976)。特に星の回転エネルギーが磁場エネルギーに転化して爆発する磁気回転メカニズムというものがある。1970 年代から考えられてきている。

超新星物質の抵抗率は無視することができ、磁力線凍結により重力崩壊とともに磁場は $B \propto R_{\text{core}}^{-2} \propto \rho^{2/3}$ と増大し、それに伴うエネルギー ($\propto B^2$) も増大する。重力崩壊の開始時は磁場は $\sim 10^9$ G であり、それは崩壊によって 1000 倍以上に大きくなるが、そのままでは依然磁気圧がガス圧より小さいのであまり爆発に影響を及ぼさない。

しかしながら、磁場が何らかの機構でさらに増幅されることで、爆発に影響するようになる。この場合、増幅のエネルギー源としては中心の中性子星の持つ回転エネルギーがある。角運動量 J_{core} の流出が無視できるとした場合、コアの収縮によってその回転エネルギー E_{rot} は $E_{\text{rot}} \propto J_{\text{core}}^2 / (M_{\text{core}} R_{\text{core}}^2)$ のように大きくなる。最終的に原始中性子星が高速回転している場合、その回転エネルギーは $E_{\text{rot}} = 2.4 \times 10^{52}$ erg $\left(\frac{M_{\text{PNS}}}{1.5 M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\text{PNS}}}{10 \text{ km}} \right)^2 \left(\frac{P_{\text{PNS}}}{1 \text{ ms}} \right)^{-2}$ 程度となり、超新星爆発のエネルギー源として十分な大きさである。ただし、原始中性子星の各物理量の典型的な値としてパルサーの典型的な値を用いた。

磁場の増幅機構としては、磁力線の巻き込みと磁気回転不安定性 (magnetorotational instability, MRI) の二つが考えられている。前者は、太陽のダイナモ理論と同様に、もともと存在していたポロイダル磁場を差動回転によって巻き込んでトロイダル磁場に変換し、さらにそれを何重にも巻き込むことで磁場を強めていくというものである。この場合は巻き込みに応じて線型に磁場強度が増幅していく。後者は同じ磁力線に貫かれたプラズマ同士が磁気張力によって角運動量を交換し、軌道が離れていくことで両者を結ぶ磁力線が束ねられて磁場が強まるというものである。この場合は時間に対して指数関数的に磁場強度が増幅していく。MRI の成長スケール $v_A / (d\Omega / d \ln r)$ (ただし $v_A = B / \sqrt{4\pi\rho}$ は Alfvén 速度で Ω は角速度) は磁場と共に大きくなり、これが半径 r が同程度になった時にそれ以上成長できなくなると考えれば、最終的に得られる磁場は

$$B^2 \sim 4\pi\rho r^2 \Omega^2 \left(\frac{d \ln \Omega}{d \ln r} \right)^2 \quad (3.119)$$

となる。この値は $10^{15} - 10^{16}$ G (Akiyama et al. 2003) と見積もられている。

以上のように増幅された磁場は磁気圧や散逸による加熱によって周囲の物質にエネルギーを与え、放出させる。この放出物質は細く絞られたジェットとして、回転軸の両極の方向に吹き出す。そのエネルギー放出率は

$$\dot{E}_{\text{MHD}} \sim 10^{52} \text{ erg/s} \left(\frac{B}{10^{16} \text{ G}} \right)^2 \left(\frac{r}{10 \text{ km}} \right)^3 \left(\frac{\Omega}{10^3 \text{ rad/s}} \right) \quad (3.120)$$

程度となる (Akiyama et al. 2003)。

磁場を増幅するのに十分な回転エネルギーを得るには、親星のコアが周期 1 秒程度で回転していなければならない。しかしながら、磁場が存在している場合はそれを通じて角運動量が外部に輸送されてしまうため、親星コアの回転周期は 100 秒程度以上になってしまう。そのような低速回転コアでも磁場を増幅させるために様々なメカニズムが考えられているが、それらのメカニズムで必要な磁場を得るにはそもそも初めから大きな磁場を持っていないとではない。

それゆえ、MHD によるメカニズムは非常に高速回転している親星に対して重要なメカニズムであって、通常の II 型超新星というよりも極超新星などのメカニズムではないかと考えられている。これは、ニュートリノ加熱メカニズムでは降着物質の分解でエネルギーを消費して爆発エネルギー自体は小さくなってしまいが、MHD メカニズムはそのようなエネルギー消費がないため大きなエネルギーの爆発になると考えられるからである。しかし、磁場は本質的に三次元効果が重要な現象なので、シミュレーションの計算量を減らすために次元を落とすわけにはいかない。また、

MRI などの成長スケールが非常に小さいこと、また Alfvén 速度は大きいため計算の時間刻みは小さくしなければいけないことなどから、非常に大きな計算機パワーが必要な難しい問題である。

第4章 基礎物理過程とシミュレーション手法

究極的には、超新星爆発を理解するためには配位空間三次元の一般相対論的流体力学方程式

$$\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = C^{\nu} \quad (4.2)$$

$$\nabla_{\mu}(n_e u^{\mu}) = \Gamma \quad (4.3)$$

および Einstein 方程式

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \quad (4.4)$$

を、位相空間六次元のニュートリノ輸送 Boltzmann 方程式

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} + \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial p^{\mu}} = \left(\frac{\delta f}{\delta \tau} \right)_{\text{col}} \quad (4.5)$$

と連立させて解かなければならない。ただし $c = G = \hbar = k_B = 1$ とする単位系を用いており、以下この節では同様とする。 ∇_{μ} は時空座標 x^{μ} と計量 $g_{\mu\nu}$ に関する共変微分である。よく使われるように、本論文ではギリシャ文字を時空四成分を表す添字とし、アルファベットを空間三成分を表す添字とする。計量の符号は $(-, +, +, +)$ となるように取る。また、 ρ は静止エネルギー密度、 u^{μ} は四元速度、 $T^{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu} = \rho h u^{\mu} u^{\nu} + P g^{\mu\nu} \quad (4.6)$$

で、 $h = 1 + \varepsilon + P/\rho$ は比エンタルピー、 ε は比内部エネルギー、 P は圧力、 n_e は電子数密度、 $G^{\mu\nu}$ は Einstein テンソル、そして C^{μ} と Γ はそれぞれ流体のエネルギー運動量、および電子数に対するニュートリノ反応の寄与である。さらに p^{μ} は運動量空間座標、 f はニュートリノの分布関数、 τ はニュートリノのアフィンパラメータ、 $(\delta f/\delta \tau)_{\text{col}}$ は衝突項である。ニュートリノには非常に小さな質量があると考えられているが、超新星のエネルギースケールはそれを遥かに上回るため、質量はないものとして扱う。質量の影響は観測されるニュートリノ信号にニュートリノ振動として現れるが、これについては5.1節で議論する。以上に加えて、圧力などを密度、温度、電子存在比の関数として表す状態方程式 (equation of state, EOS) も方程式系を閉じるのに必要である。これらの方程式系の解析解を得ることは不可能なので、数値シミュレーションを利用することになる。以下では、超新星爆発のシミュレーションに必要な物理過程や計算手法について説明する。

4.1 流体シミュレーション

4.1.1 一般相対論的流体

計算機で一般相対論を取り扱うにあたっては、いわゆる 3 + 1 分解 (Arnowitt et al. 1962) という定式化がよく使われる。この定式化においては、計量は

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (4.7)$$

と表される。ただし、 α はラプス関数、 β^i はシフトベクトルである。これらの量は四次元時空において、二つの三次元超曲面 (時刻座標が一定である点の集合) Σ_t と Σ_{t+dt} の間の関係を表すものである。まず Σ_t 上のある点 $A(t, x^i)$ と、 Σ_{t+dt} 上で A と空間座標値が同じ点 $B(t+dt, x^i)$ を考える。また、点 A において Σ_t の単位法線ベクトル n^μ を考え、この法線ベクトルを伸ばした直線と Σ_{t+dt} の交点を点 $C(t+dt, x'^i)$ を考える。以上のような状況の下で、 αdt は n^μ に沿って測った場合の二つの超曲面 Σ_t と Σ_{t+dt} の間の距離を表し、 $\beta^i dt$ は Σ_{t+dt} 上の二点 $B(t+dt, x^i)$ と $C(t+dt, x'^i)$ の空間座標の差 (つまり、 $\beta^i dt = x^i - x'^i$) を表す。以上から、点 A における反変単位法線ベクトルは

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha} \right). \quad (4.8)$$

と表され、共変ベクトルは規格化条件 $n^\mu n_\mu = -1$ から

$$n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (4.9)$$

となる。また、 γ_{ij} は空間三次元計量 $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ の空間成分である。Einstein 方程式を解くには、時空四次元計量を以上のラプス関数 α 、シフトベクトル β^i 、空間三次元計量 γ_{ij} に分解し、数値相対論の手順に従って時間発展を計算する必要がある。近似解法についてはこの節の最後に議論する。 $\gamma_{\mu\nu}$ は法線ベクトル n^μ に直交するので、 $\gamma^\mu{}_\nu$ は反変四元ベクトルを空間成分だけを持つ反変ベクトルに射影する演算子となる。これを用いると四元速度 u^μ から慣性系での流体の三次元速度 v^i を

$$v^i = \frac{(g^i{}_\rho + n^i n_\rho)u^\rho}{-n_\mu u^\mu} = \frac{u^i - n^i \alpha u^0}{\alpha u^0} = \frac{u^i}{W} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \quad (4.10)$$

と求めることができる。ここで、 $W = \alpha u^0 = (1 - v_i v^i)^{-1/2}$ は Lorentz 因子である。

いま、流体の運動を記述する式を導く。ここでは、ひとまずニュートリノの寄与を無視する。式 (4.1)、(4.2) から g 、 γ をそれぞれ計量 $g_{\mu\nu}$ 、 $\gamma_{\mu\nu}$ の行列式として

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \rho u^\mu) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = -\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} \quad (4.12)$$

となる。ただし $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 。ここで、この式をバリオン質量密度

$$D = \rho u^\mu n_\mu = \alpha \rho u^0 = \rho W \quad (4.13)$$

運動量密度

$$S^i = -\gamma^i{}_\nu T^{\mu\nu} n_\mu = \rho h W^2 v^i \quad (4.14)$$

全エネルギー密度

$$\tau = T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu - J^\mu n_\mu = \rho h W^2 - P - D \quad (4.15)$$

の発展方程式として書くと、

$$\partial_0(\sqrt{\gamma}D) + \partial_i\{\sqrt{\gamma}(\alpha v^i - \beta^i)D\} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\partial_0(\sqrt{\gamma}S_j) + \partial_i\{\sqrt{\gamma}((\alpha v^i - \beta^i)S_j + \alpha p\delta^i_j)\}] = T^{\mu\nu}(\partial_\mu g_{\nu j} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}g_{\lambda j}) \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\partial_0(\sqrt{\gamma}\tau) + \partial_i\{\sqrt{\gamma}((\alpha v^i - \beta^i)\tau + \alpha p v^i)\}] = \alpha \left(T^{\mu 0} \frac{\partial_\mu \alpha}{\alpha} - T^{\mu\nu} \Gamma^0_{\mu\nu} \right) \quad (4.18)$$

という双曲型方程式を得る。また、式(4.3)はニュートリノの寄与を無視すれば式(4.1)の ρ を n_e に変えただけのものなので、上式も同様の置き換えによって電子密度に関する式を得る。これが一般相対論における流体方程式である。

さらに、計量の時間発展も考える。これを解くためには Einstein 方程式(4.4)を解く必要があり、そのためには数値相対論が必要である。例えば Kuroda et al. (2012) で数値相対論シミュレーションが行われている。ただし、これは非常に短時間しかシミュレーションされておらず、ニュートリノ加熱メカニズムを確かめられるシミュレーションにはなっていない。その一方で、現在最先端の爆発シミュレーションコード (Dimmelmeier et al. 2005, Müller et al. 2010) では計量の時間発展に関しては共形平坦近似 (Wilson et al. 1996, Isenberg 2008) という近似が用いられている。これは、系が球対称から極端にずれない、かつ重力波で放出されるエネルギーが小さいという条件のもとで空間計量を

$$\gamma_{ij} = \phi^4 \hat{\gamma}_{ij} \quad (4.19)$$

という形に近似するものである。ただし、 $\hat{\gamma}_{ij}$ は平坦時空の空間計量である。

数値相対論において、Einstein 方程式は

$$\partial_0 \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 K_{ij} &= -\nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k) \\ &\quad + \beta^k \nabla_k K_{ij} + K_{ik} \nabla_j \beta^k + K_{jk} \nabla_i \beta^k \\ &\quad - 8\pi\alpha \left\{ \rho h \left(W^2 v_i v_j - \frac{\gamma_{ij}}{2} \right) - P \gamma_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$0 = R + K^2 - K_{ij} K^{ij} - 16\pi(\rho h W^2 - P) \quad (4.22)$$

$$0 = \nabla_i (K^{ij} - \gamma^{ij} K) - 8\pi S^j \quad (4.23)$$

と書ける。ただし $K_{ij} = -\nabla_i n_j$ は外的曲率と呼ばれる量であり、 $K = K_i^i$ である。また、 R_{ij} は三次元の Ricci テンソルであり、 $R = R_i^i$ はスカラー曲率である。これらの式はさらに共形平坦近似を適用することで

$$\hat{\Delta}\phi = -2\pi\phi^5 \left(\rho h W^2 - P + \frac{K_{ij} K^{ij}}{16\pi} \right) \quad (4.24)$$

$$\hat{\Delta}(\alpha\phi) = 2\pi\alpha\phi^5 \left(\rho h (3W^2 - 2) + 5P + \frac{7K_{ij} K^{ij}}{16\pi} \right) \quad (4.25)$$

$$\hat{\Delta}\beta^i = 16\pi\alpha\phi^4 S^i + 2\hat{K}^{ij} \hat{\nabla}_j \left(\frac{\alpha}{\phi^6} \right) - \frac{1}{3} \hat{\nabla}^i \hat{\nabla}_k \beta^k \quad (4.26)$$

という楕円形方程式になる (Dimmelmeier et al. 2005)。ただし、 $\hat{\Delta}$ 、 $\hat{\nabla}$ はそれぞれ平坦時空での

Laplacian、微分である。この5つの式を解くことで (α, β^i, ϕ) が求まり、時空の計量が決まる。この近似の結果得られる重力波は共形平坦性を仮定しない場合の計算とよく似たものになっており (Shibata and Sekiguchi 2004)、この近似の妥当性を示している。また、これらの方程式は楕円形なので、Courant 条件を満たさない場合に生じる数値不安定性のようなものは生じないという利点もある。

4.1.2 Newtonian 極限流体

ここまでは一般相対論的な枠組みを述べてきたが、実際のシミュレーションにおいては非相対論的な場合を考えて計算することも多い。以下では非相対論的な極限 (Newtonian 極限) を考えていく。まず流体方程式 (4.16)、(4.17)、(4.18) は、

$$W = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \mathcal{O}(v^4) \quad (4.27)$$

となるために、質量密度、運動量密度、全エネルギー密度がそれぞれ

$$D = \rho W \rightarrow \rho \quad (4.28)$$

$$S^i = \rho h W^2 v^i = \rho \left(1 + \epsilon + \frac{P}{\rho}\right) v^i \rightarrow \rho v^i \quad (4.29)$$

$$\tau = \rho h W^2 - P - D \rightarrow \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (4.30)$$

となることなどを用いて連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) = 0 \quad (4.31)$$

運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho v^j v^i + P \delta^{ij}) = \rho g^i \quad (4.32)$$

およびエネルギー保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \left(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + P \right) v^i \right\} = \rho g_i v^i \quad (4.33)$$

となる。また、電子密度に関する式は電子存在比 Y_e を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_e) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho Y_e v^i) = 0 \quad (4.34)$$

となる。ここで、 g_i は重力加速度で Poisson 方程式

$$\Delta \phi = 4\pi \rho \quad (4.35)$$

から $g_i = \partial \phi / \partial x^i$ で求める。また、粘性の効果は通常無視する。

以上の Newtonian 流体方程式を解くにあたり、計量を求めるところまではいかなくとも一般相対論的效果を簡単に補正する手法もある。式 (4.35) は Newtonian での重力ポテンシャルを求める式であるが、この解 ϕ_N に対して

$$\phi_{\text{eff}} = \phi_N + (\bar{\phi}_{\text{TOV}} - \bar{\phi}_N) \quad (4.36)$$

という補正重力ポテンシャル ϕ_{eff} を考えるのである。ここで、 $\bar{\phi}$ は球座標において角度方向を平均化した重力ポテンシャルを表し、 $\bar{\phi}_{\text{TOV}}$ は一般相対論的な球対称静水圧平衡を記述する Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程式から求める重力ポテンシャルで、

$$\bar{\phi}_{\text{TOV}}(r) = \int_{\infty}^r (m(r') + 4\pi r'^3 P) \left(1 + \epsilon + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + v_r^2 - \frac{2m(r')}{r'}\right)^{-1} \frac{dr'}{r'^2} \quad (4.37)$$

である。ただし、 v_r は動径方向の速度、

$$m(r) = \int_0^r \rho(1 + \epsilon) 4\pi r'^2 dr' \quad (4.38)$$

は重力質量である。この補正は、 M を星の質量、 Q_{ij} を四重極モーメントとして重力ポテンシャルを多重極展開した

$$\phi_{\text{N}} = -\frac{M}{r} - \frac{3}{2r^3} \sum x_i x_j Q_{ij} - \dots \quad (4.39)$$

の各項のうち、モノポール成分だけを一般相対論的なものに置き換えたものである。この手法は、例えば Marek et al. (2006) で用いられている。一般的ではないが、便宜上本論文ではこの手法を TOV monopole 法と呼ぶことにする。

4.2 状態方程式

原子核程度の高密度の物質の状態方程式は超新星のダイナミクスを考える上で非常に重要である。流体力学的にはバウンスがどのように起こるかに大きな影響があり、渦度が散逸される位置を通じて SASI に影響を与えることも指摘されている。さらに原始中性子星がどの程度早く収縮してどの程度高エネルギーのニュートリノを放出するにも影響する。基礎物理過程から状態方程式を構成するには、強い相互作用を記述する量子色力学 (quantum chromodynamics, QCD) を考える必要があるが、現在のところ格子 QCD による数値計算から直接状態方程式を構成することはできていない。その一方で、モデルを仮定することで超新星シミュレーションに使用できる状態方程式を構成する研究はなされてきており、特に二つの状態方程式が現実的な状態方程式として多くの超新星シミュレーションで用いられている。それらは Lattimer & Swesty の状態方程式 (Lattimer and Swesty 1991) と Shen の状態方程式 (Shen et al. 1998) と言われる。

高密度物質の形態は非常に高温・高密度では自由核子だけが存在する一様核物質状態であるが、密度が下がると一様に存在するより局所的に集まって原子核を構成したほうがエネルギー的に安定になり、核子気体の中に原子核が存在する非一様核物質状態になる。Shen の状態方程式は Shen et al. (1998) では一様核物質はレプトン、光子、自由核子の混合物であるとして考える。Lattimer & Swesty の状態方程式、及び Shen et al. (1998) よりも後でアップデートされた Shen の状態方程式ではこれに加えて α 粒子も考える。また、非一様核物質の場合にはどちらもある種類の重原子核を加えて考える。実際には多様な重原子核が存在していると考えられるが、それを一種類だけに代表させるのである。Lattimer & Swesty の状態方程式は液滴モデルにもとづいて状態方程式を構成し、核力のモデルとしては Skyrme 力を考える。また、密度の変化にともなって一様核物質と非一様核物質の間で相転移が起こるが、その間は Maxwell の規則によってつなぐ。状態方程式の「硬さ」の指標となる非圧縮性パラメータ K_s (定義は (4.66) を見よ) には不定性があるが、Lattimer & Swesty は $K_s = 375, 220, 180 \text{ MeV}$ の 3 つのパラメータについて状態方程式を計算するコードを公開している。Shen の状態方程式は一様核物質の熱力学量については相対論的平均場

理論にもとづいて計算し、非一様物質については Thomas-Fermi 近似を用いて計算する。二つの相のどちらを取るかは自由エネルギーを比較することで決定する。こちらの非圧縮性パラメータは $K_s = 281 \text{ MeV}$ である。Lattimer & Swesty も Shen も、どちらも非一様核物質の原子核は平均的な一つの原子核で代表させているが、様々な種類の原子核が混在している現実的な状況を反映した状態方程式を構成する試みもなされている (Hempel et al. 2012, Furusawa et al. 2013)。以下では、Lattimer & Swesty および Shen の状態方程式の具体的な構成方法を述べ、両者の比較について議論する。

4.2.1 Lattimer & Swesty の状態方程式

Lattimer & Swesty の状態方程式 (Lattimer and Swesty 1991) は液滴モデルに基づくものである。すなわち、広がった核子その他の粒子の中に重原子核が存在するとモデル化し、その体積エネルギーや表面エネルギーなどから求めた自由エネルギーを最小化するようにモデルパラメータを選び、熱力学量を計算する。このような手順を計算するコードは、以下で述べる非圧縮性パラメータが 375, 220, 180 MeV の場合については公開されている。

核物質は核子、原子核、 α 粒子、電子、陽電子、そして光子からできていると考える。ただし、電子、陽電子と原子核の相互作用は無視する。原子核は平均的なある一種類の原子核で代表させ、Coulomb エネルギーを最小化するために体心立方格子をつくっているとす。この原子核の周りを核子、 α 粒子、電子のガスが取り巻いていると考える。体心立方格子の体積は n_A を原子核の数密度として $V_c = n_A^{-1}$ となる。いま、状態方程式を考えるので入力する熱力学量としてはバリオン数密度 n_B 、温度 T 、陽子存在比 $Y_p = Y_e$ (電荷中性条件より電子存在比に等しい) を考える必要がある。これに加えて、このような液滴モデルを記述するのに必要なパラメータは原子核の数密度 n_A 、 α 粒子の数密度 n_α 、原子核外部での核子密度 n_o と陽子存在比 x_o 、原子核の半径 r_A 、原子核の内側での核子密度 n_i と陽子存在比 x_i の 7 つである。

系の自由エネルギー密度 F は、系を構成する各粒子の自由エネルギーの和

$$F = F_A + F_\alpha + F_o + F_e + F_\gamma \quad (4.40)$$

で表される。右辺第一項から、体心立方格子の中心にある原子核、 α 粒子、自由核子、電子陽電子、光子、の自由エネルギー密度を表す。液滴モデルを記述するパラメータを様々に変えたとき、自由エネルギーが最小値となるパラメータが実現されるとして状態方程式を構成するが、 F_e と F_γ はモデルのパラメータには依存しないので、以下では無視して考える。

まず、核子の集合体による自由エネルギーを評価するために、核子あたりの自由エネルギー体積項 f_{bulk} を考える。これは $F_{A,\alpha,o}$ の全てに寄与する。まず、核物質の内部エネルギー密度を

$$E_{\text{bulk}}(n, x, T) = \sum_t \frac{\tau_t}{2m} + \{a + 4bx(1-x)\}n^2 + cn^{1+\delta} - xn\Delta \quad (4.41)$$

と近似する。ただし、 n 、 x はそれぞれバリオン数密度、陽子存在比であるが、状態方程式に入力するものとはあとで (4.74)、(4.75) によって結びつける。第一項は運動エネルギー ($\hbar = 1$ という単位系であることに注意)、第二項は二体相互作用、第三項はそれ以上の多体相互作用、第四項は陽子と中性子の質量差に起因するエネルギーを表す。ここで、 $t = n, p$ はアイソスピンを表し、 m は核子の質量、 τ_t は

$$\tau_t = \frac{1}{2\pi^2} (2mT)^{5/2} \int_0^\infty \frac{u^{3/2} du}{1 + \exp(u - \eta_t)} \quad (4.42)$$

である。 a 、 b 、 c 、 δ は実験や核力モデルから決めるパラメータで、これについては後述する。さらに、 Δ は陽子と中性子の静止エネルギーの差である。(4.42) の η_t は化学ポテンシャル μ_t と力を生み出すポテンシャル

$$V_t = \frac{\delta E_{\text{bulk}}}{\delta n_t} = 2an + 4bn_{-t} + c(1 + \delta)n^\delta - \Delta\delta_{tp} \quad (4.43)$$

(ただし $-t$ は t とは逆のアイソスピンを表し、 δ_{tp} は Kronecker のデルタである。) によって $\eta_t = (\mu_t - V_t)/T$ で定義されるが、実際には密度と結びつける式

$$n_t = \frac{1}{2\pi^2} (2mT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{u^{1/2} du}{1 + \exp(u - \eta_t)} \quad (4.44)$$

を逆に解くことによって得られる。これらの η_t 、 τ_t から核子あたりのエントロピーは

$$s_{\text{bulk}} = \frac{1}{n} \sum_t \left(\frac{5\tau_t}{6mT} - n_t \eta_t \right) \quad (4.45)$$

と計算され、これらにより核子あたりの自由エネルギーが

$$f_{\text{bulk}} = \frac{E_{\text{bulk}}}{n} - T s_{\text{bulk}} \quad (4.46)$$

と計算できる。また、これに対応して圧力は

$$P(n, x, T) = n^2 \frac{\partial f_{\text{bulk}}}{\partial n} = \sum_t \frac{\tau_t}{3m} + \{a + 4bx(1-x)\}n^2 + c\delta n^{1+\delta} \quad (4.47)$$

となる。

ここからまず F_0 が計算できる。 V_A を代表原子核の占める体積とし、その占有体積比 $u = V_A/V_c$ を定義すると、 α 粒子の占有体積比は $(1-u)n_\alpha v_\alpha$ となる。ただし $v_\alpha = 24 \text{ fm}^3$ は一つの α 粒子の占める体積である。原子核と α 粒子のない空間は自由核子が占めており、その占有体積比は $(1-u)(1-n_\alpha v_\alpha)$ であるから、単位体積あたりのこの核子の自由エネルギーは

$$F_0 = (1-u)(1-n_\alpha v_\alpha)n_0 f_{\text{bulk}}(n_0, x_0, T) \quad (4.48)$$

となる。

F_α については、 α 粒子が Maxwell-Boltzmann 分布に従うと考えて

$$F_\alpha = (1-u)n_\alpha(\mu_\alpha - B_\alpha - T) \quad (4.49)$$

と表す。ただし $B_\alpha = 28.3 \text{ MeV}$ は α 粒子の束縛エネルギーで $\mu_\alpha = T \ln(n_\alpha/8n_Q)$ は化学ポテンシャルである。ここで、 $n_Q = (mT/2\pi)^{3/2}$ とする。あとで用いるが、 α 粒子の圧力は $P_\alpha = n_\alpha T$ である。

液滴モデルにおいて、原子核による自由エネルギー密度は $An_A = un_i$ より

$$F_A = un_i f_{\text{bulk}} + F_s + F_C + F_H \quad (4.50)$$

のように、式 (4.46) で求めた体積項、及び表面項 F_s 、Coulomb ポテンシャル項 F_C 、並進運動項 F_H の和で表される。形成される原子核が小さいうちは、核子気体の中に小さな液滴状原子核が存

しているのだが、原子核の占有体積比 u が大きくなるといづれ巨大な原子核の中に核子気体の小さな泡が存在する形態 (核子泡相) に変化していく。この変化を表すために $F_s + F_C$ を u の関数として表す。ここで採用するのは

$$F_s + F_C = \beta(n_i, x_i, T)D(u) \quad (4.51)$$

という形である。ただし、

$$\beta(n_i, x_i, T) = \frac{9}{2} \left(\frac{8\pi e^2 x_i^2 n_i^2}{15} \right)^{1/3} \sigma(x_i, T)^{2/3} \quad (4.52)$$

$$\sigma(x_i, T) = \sigma_s h \left(\frac{T}{T_c(x_i)} \right) \frac{16 + q}{x_i^{-3} + q + (1 - x_i)^{-3}} \text{MeV/fm}^2 \quad (4.53)$$

$$\text{w/ } h \left(\frac{T}{T_c(x_i)} \right) = \begin{cases} \left\{ 1 - \left(\frac{T}{T_c(x_i)} \right)^2 \right\}^2 & T \leq T_c(x_i) \\ 0 & T > T_c(x_i) \end{cases} \quad (4.54)$$

$$\text{w/ } T_c(x_i) = 87.76 \text{ MeV} \left(\frac{K_s}{375 \text{ MeV}} \right)^{1/2} \left(\frac{n_s}{0.155 \text{ fm}^{-3}} \right)^{-1/3} x_i(1 - x_i) \quad (4.55)$$

である。ここで、 e は電子の電荷で、 $q = 384\pi(3/4\pi n_s)^{2/3}\sigma_s/S_s$ であり、 n_s 、 σ_s 、 S_s 、 K_s は実験や核力モデルから決めるパラメータで、後述する。また、 $D(u) = 1 - \frac{3}{2}u^{1/3} + \frac{1}{2}u$ として

$$D(u) = u(1 - u) \frac{(1 - u)D(u)^{1/3} + uD(1 - u)^{1/3}}{u^2 + (1 - u)^2 + 0.6u^2(1 - u)^2} \quad (4.56)$$

という関数形をとる。式 (4.51) は以下のようにして導かれる。まず、二つの自由エネルギー表面項の関数形を

$$F_s = \frac{3\sigma}{r_A} s(u) \quad (4.57)$$

$$F_C = \frac{4}{5} \pi e^2 x_i^2 n_i^2 r^2 c(u) \quad (4.58)$$

と仮定する。次に、自由エネルギーのうち原子核半径 r_A に依存するのが $F_{s,C}$ の二項だけであると仮定して、自由エネルギーの停留条件 $\frac{\partial F}{\partial r_A} = 0$ から

$$r_A = \left(\frac{15\sigma s(u)}{8\pi e^2 x_i^2 n_i^2} \right)^{1/3} \left(\frac{s(u)}{c(u)} \right)^{1/3} \quad (4.59)$$

を得る。この r_A を $F_s + F_C$ に代入することで (4.51) となる。ただし、ここで出てきた量を用いると $D(u) = \{c(u)s(u)^2\}^{1/3}$ である。さらに $D(u)$ の具体的な関数形 (4.56) を決めるにあたっては、 $u \rightarrow 0$ の極限において Skyrme 力を仮定した Thomas-Fermi 計算の結果に一致する自由エネルギー

$$F_s = \frac{3\sigma(x_i, T)}{r_A} u \quad (4.60)$$

$$F_C = \frac{4}{5} \pi e^2 x_i^2 r_A^2 n_i^2 u D(u) \quad (4.61)$$

記号	n_s	B	K_s	S_v
名称	対称核物質の飽和密度	対称核物質の束縛エネルギー	非圧縮性	対称エネルギー
値	0.155 fm^{-3}	16.0 MeV	$375, 220, 180 \text{ MeV}$ (本文を見よ)	29.3 MeV
記号	a_v	σ_s	S_s	a_s
名称	体積レベル密度パラメータ	対称核物質の表面張力	表面对称エネルギー	表面レベル密度パラメータ
値	本文を見よ	$1.15 \text{ MeV}/\text{fm}^{-3}$	45.8 MeV	本文を見よ

表 4.1: Lattimer & Swesty の状態方程式 (Lattimer and Swesty 1991) を構成するのに使う自由エネルギーのパラメータ。非圧縮性は一つに定めず、いくつかの場合で計算できるようにしてある。体積及び表面レベル密度パラメータはモデルを構成する上で決める必要はない。

と、 $u \rightarrow 1$ の極限において考えられる核子泡相の場合の自由エネルギー

$$F_s = \frac{3\sigma(x_i, T)}{r_A}(1-u) \quad (4.62)$$

$$F_C = \frac{4}{5}\pi e^2 x_i^2 r_A^2 n_i^2 (1-u) D(u) \quad (4.63)$$

との間を接続した。ただし系が核子泡相にあるときは原子核の大きさのパラメータ r_A は泡の大きさになっている。最後に、並進運動エネルギーについては原子核を質量数 $A_0 = 60$ の点粒子とみなして

$$F_H = \frac{u(1-u)n_i}{A_0} h \left(\frac{T}{T_c(x_i)} \right) (\mu_H - T) \quad (4.64)$$

と表す。ただし

$$\mu_H = T \ln \left(\frac{n_A}{n_Q A_0^{3/2}} \right) \quad (4.65)$$

は並進運動に関する化学ポテンシャルであり、 h は温度 $T_c(x_i)$ で点粒子の近似が破綻する効果を表す。

以上の式 (4.40)、(4.48)、(4.49)、(4.50)、(4.51) および (4.64) から自由エネルギー密度が求まるが、さらに実験や核力モデルからいくつかのパラメータを求める必要がある。核子あたりの自由エネルギー体積項は次のように展開できる:

$$f_{\text{bulk}}(n, x, T) \simeq -B - x\Delta + \frac{1}{18}K_s \left(1 - \frac{n}{n_s} \right)^2 + S_v(1-2x)^2 - a_v T^2 + \dots \quad (4.66)$$

また、表面項は次のように展開できる:

$$F_s = A f_s(n_i, x_i, T) \simeq 4\pi r_A^2 \sigma_s - A^{2/3} \{ S_s(1-2x_i)^2 + a_s T^2 \} + \dots \quad (4.67)$$

ただし $A = 4\pi n_i r_A^3 / 3$ 。以上二式に出てきた各種パラメータを表 4.1 にまとめる。また、ここでは実験ではなく Skyrme 力を仮定して計算した場合のパラメータを使うことにし、その値も共に載せる。非圧縮性 K_s については不定性から $K_s = 375, 220, 180 \text{ MeV}$ の3つの場合を考える。自由エネルギー表面項で使われるパラメータについてはこの表 4.1 の値を用いればよい。体積項の計算に使われるパラメータ (a, b, c, δ) も表 4.1 の値を再現するように選ぶ必要があり、 $\alpha = \frac{3}{10m} (\frac{3}{2}\pi^2 n_s)^{2/3}$

として

$$\delta = \frac{K_s + 2\alpha}{3\alpha + 9B} \quad (4.68)$$

$$b = \frac{\{\alpha(2^{2/3} - 1) - S_v\}}{n_s} \quad (4.69)$$

$$a = \frac{\delta(\alpha + B) - 2\alpha/3}{n_s(1 - \delta)} - b \quad (4.70)$$

$$c = \frac{K_s + 2\alpha}{9\delta(\delta - 1)n_s^\delta} \quad (4.71)$$

によって定める。また、密度パラメータは

$$a_v = 2m \left(\frac{\pi}{12n_s} \right)^{2/3} \quad (4.72)$$

$$a_s = 8\pi \left(\frac{3}{4\pi n_s} \right)^{2/3} \frac{\sigma_s}{T_c(x_o)^2} \quad (4.73)$$

で決められる。

以上によって自由エネルギーが定まるので、状態方程式に入力する n_B 、 Y_e 、 T を固定して液滴モデルの各パラメータに対する自由エネルギーの停留点を求める。液滴モデルのパラメータは7つあるが、バリオン数密度保存則

$$n_B = un_i + (1 - u)\{4n_\alpha + n_o(1 - n_\alpha v_\alpha)\} \quad (4.74)$$

と電荷の保存則

$$n_B Y_e = ux_i n_i + (1 - u)\{2n_\alpha + n_o(1 - n_\alpha v_\alpha)\} \quad (4.75)$$

から拘束条件が二つ課されるので、系の自由度は5つになる。そこで、パラメータとして r_A 、 n_i 、 x_i 、 u 、 n_α をとる。すると、停留条件は次の5つの方程式に帰着する:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial r_A} : \quad r_A = \frac{9\sigma}{2\beta} \left(\frac{s(u)}{c(u)} \right)^{1/3} \quad (4.76)$$

$$0 = -\frac{1}{un_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} : \quad \hat{\mu}_i - \frac{2\beta\mathcal{D}}{3un_i} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) - \frac{(1 - \mu)}{A_o} \frac{\partial h}{\partial x_i} (\mu_H - T) = \hat{\mu}_o \quad (4.77)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial n_i} - \frac{x_i}{n_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} : \quad \mu_{n,i} - \frac{2\beta\mathcal{D}x_i}{3un_i\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{(1 - u)}{A_o} \{h\mu_H - x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} (\mu_H - T)\} = \mu_{n,o} \quad (4.78)$$

$$0 = \frac{n_i}{u} \frac{\partial F}{\partial n_i} - \frac{\partial F}{\partial u} : \quad P_i + \beta \left(\frac{2\mathcal{D}}{3u} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial u} \right) + \frac{un_i}{A_o} h\mu_H = P_o + P_\alpha \quad (4.79)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} : \quad \mu_\alpha = 2\hat{\mu}_o + B_\alpha - P_o v_\alpha \quad (4.80)$$

ただし $\hat{\mu} = \mu_n - \mu_p$ であり、圧力は (4.47) と $P_\alpha = n_\alpha T$ から求める。これらの連立方程式を Newton-Raphson 法により数値的に解くことで液滴モデルのパラメータを定め、さらに他の熱力学量を

$$\hat{\mu} = \mu_e - \frac{\partial F/n}{\partial Y_e} = \hat{\mu}_o \quad (4.81)$$

$$\mu_n = \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{Y_e}{n} \frac{\partial F}{\partial Y_e} = \mu_{n,o} \quad (4.82)$$

$$n_B s = -\frac{\partial F}{\partial T} = un_i s_i - \left(\frac{2\beta D}{3h} + \frac{F_H}{h} \right) \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{u(1-u)n_i h}{A_o} \left(\frac{5}{2} - \frac{\mu_H}{T} \right) + (1-u)(1-n_\alpha v_\alpha)n_o s_o + (1-u)n_\alpha \left(\frac{5}{2} - \frac{\mu_\alpha}{T} \right) + n(s_e + s_\gamma) \quad (4.83)$$

$$P = n^2 \frac{\partial F/n}{\partial n} = P_o + P_\alpha - \beta \left(D - u \frac{\partial D}{\partial u} \right) + \frac{un_i}{A_o} h \{ T(1-u) - u\mu_H \} + P_e + P_\gamma = P_i + \beta D \left(\frac{2}{3u} - 1 - \frac{1-u}{D} \frac{\partial D}{\partial u} \right) + \frac{u(1-u)n_i}{A_o} h(\mu_H + T) + P_e + P_\gamma \quad (4.84)$$

と求めることができる。原子核の大きさ r_A は熱力学量を求める上では必要ないが、ニュートリノ散乱を考えると必要な場合は $s(u) = u(1-u)$ と近似して

$$r_A \simeq \frac{9\sigma u(1-u)}{2\beta D} \quad (4.85)$$

として求める。

密度が上がるとここまで記述してきた非一様核物質は一様核物質に相転移する。この転移は通常の液滴原子核相から核子泡相を挟んで転移し、核子泡相のエネルギーと一様核物質相のエネルギーが等しくなるところで起こる。核子あたりの体積エネルギーは

$$\frac{E_{\text{bulk}}(n)}{n} \simeq \left\{ -16 + \frac{1}{18} K_s \left(\frac{n}{n_s} - 1 \right)^2 \right\} \text{ MeV} \quad (4.86)$$

となるが、核子泡相の原子核については $n = n_i = n_s$ なので $E_{\text{bulk}}(n_i)/n_i = -16 \text{ MeV} = e_i$ であり、自由エネルギー密度は $e_i + \beta D/n$ からエントロピーに関する項を引いたものである。一方、核子泡相の泡内部の核子を無視すれば、バリオン密度は $n = un_i = un_s$ であり、自由エネルギー密度は $E_{\text{bulk}}(n)/n = -16 + K_s(1-u)^2/18 \text{ MeV}$ からエントロピーに関する項を引いたものとなる。両者が一致する場合より u が大きくなると、表面エネルギーがない一様核物質の方が安定となり、相転移が起こる。実際、 D に核子泡相極限での関数形を入れると $u < 1$ でそのような状況が実現することがわかる。

この相転移が起こる時は、非一様核物質相と一様核物質相が共存した状態が生じる。この共存状態の熱力学量は Maxwell の規則によって構成する。すなわち、バリオン数密度 n_B がある値 n_ℓ から n_h の間をとる ($n_\ell < n_B < n_h$) 場合の自由エネルギー密度 F は、 $n_B = n_\ell$ の時の自由エネルギー密度 $F_\ell = F(n_\ell, Y_e, T)$ と $n_B = n_h$ の時の自由エネルギー密度 $F_h = F(n_h, Y_e, T)$ とを線形補間した

$$F = \frac{n_B - n_\ell}{n_h - n_\ell} F_h + \frac{n_h - n_B}{n_h - n_\ell} F_\ell \quad (4.87)$$

と表される。これに関して、自由エネルギーが停留となる条件

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n_\ell} \right|_{n_h, n_B, Y_e, T} = \left. \frac{\partial F}{\partial n_h} \right|_{n_\ell, n_B, Y_e, T} = 0 \quad (4.88)$$

を課す。この条件から n_ℓ, n_h を求め、共存状態の圧力 $P = n_B \partial F / \partial n_B |_{Y_e, T} - F$ と化学ポテンシャル

$\mu = \partial F / \partial n_B |_{Y_e, T}$ として

$$P = P_\ell = P_h = \frac{n_\ell F_h - n_h F_\ell}{n_h - n_\ell} \quad (4.89)$$

$$\mu = \mu_\ell = \mu_h = \frac{F_h - F_\ell}{n_h - n_\ell} \quad (4.90)$$

を得る。他の熱力学量は

$$\hat{\mu} = \mu_e + \frac{n_h - n_B}{n_h - n_\ell} (\hat{\mu}_\ell - \mu_{e,\ell}) + \frac{n_B - n_\ell}{n_h - n_\ell} (\hat{\mu}_h - \mu_{e,h}) \quad (4.91)$$

$$\mu_n = \mu_\ell + Y_e (\hat{\mu} - \mu_e) \quad (4.92)$$

$$ns = \frac{n_h - n_B}{n_h - n_\ell} s_\ell n_\ell + \frac{n_B - n_\ell}{n_h - n_\ell} s_h n_h \quad (4.93)$$

となる。以上の手順によって自由エネルギーを最小化するモデルパラメータから熱力学量を計算するのが、Lattimer & Swesty の状態方程式である。

4.2.2 Shen の状態方程式

Shen の状態方程式 (Shen et al. 1998) は相対論的平均場理論に基づくものである。また、非一様核物質に関しては種々の量を相対論的平均場近似で密度の関数として求め、局所的な密度を代入して計算する Thomas-Fermi 近似を用いる。非一様核物質と一様核物質のどちらの状態が実現するかは、両者について自由エネルギーを求め、小さいほうが実現すると考える。以下に説明する手順で状態方程式を求めた結果はデータテーブルとして公開されている。

状態方程式には核子、原子核、電子、 μ 粒子、そして光子からの寄与を考える。まずは一様核物質を考えるが、その場合には Fermi 粒子としてレプトンを考える必要はなく、核子場 ψ のみを考える。ハイペロンを含む場合は Shen et al. (2011) で計算されている。Bose 粒子で考えるものは中間子で、特にアイソスピン三重項のスカラー場 σ 、ベクトル場 ω^μ 、およびアイソスピン三重項のベクトル場 $\rho^{a\mu}$ である。ただし a はアイソスピン演算子に関わる添字であり、空間成分を表す添字ではないことに注意。これらの粒子と相互作用を記述する Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Shen}} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - m - g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu - g_\rho \gamma_\mu \tau_a \rho^{a\mu}] \psi \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 \\ & - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{4} c_3 (\omega_\mu \omega^\mu)^2 \\ & - \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^a R^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu^a \rho^{a\mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.94)$$

ただし

$$W^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \quad (4.95)$$

$$R^{a\mu\nu} = \partial^\mu \rho^{a\nu} - \partial^\nu \rho^{a\mu} + g_\rho \epsilon^{abc} \rho^b{}_\mu \rho^{c\nu} \quad (4.96)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (4.97)$$

であり、 m は核子の質量、 $g_{\sigma,\omega,\rho}$ は中間子と核子の結合定数、 $m_{\sigma,\omega,\rho}$ は中間子の質量、 τ_a はアイソスピン演算子で ϵ^{abc} は完全反対称テンソルである。ここで、 σ の三次以上の項は原子核の性質を再現するために導入した項で、 ω^μ の四次の項は Hartree-Fock 近似での核子の自己エネルギーを再現

m	m_σ	m_ω	m_ρ	g_σ
938.0	511.19777	783.0	770.0	10.02892
g_ω	g_ρ	g_2 [fm ⁻¹]	g_3	c_3
12.61394	4.63219	-7.23247	0.61833	71.30747

表 4.2: $\mathcal{L}_{\text{Shen}}$ 中の各種パラメータの表。 g_2 を除き、全てのパラメータの値は MeV 単位で与えた。値は Shen et al. (2011) から取っている。

するために導入した項である。 $g_{2,3}$ 、 c_3 は中間子の自己結合定数である。各パラメータは原子核の性質を再現するために表 4.2 のように与える。いま、この系に平均場近似を適用する。すなわち、中間子の場に関しては古典的に扱い、時間的に一定、空間的に一様であるとする。すると、残る非零成分は $\sigma = \langle \sigma \rangle$ (右辺の σ は場としての σ で左辺は平均値)、 $\omega = \langle \omega^0 \rangle$ 、 $\rho = \langle \rho^{30} \rangle$ となる。これらを支配する Euler-Lagrange 方程式は

$$\sigma = -\frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle - \frac{1}{m_\sigma^2} (g_2 \sigma^2 + g_3 \sigma^3) \quad (4.98)$$

$$\omega = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle - \frac{c_3}{m_\omega^2} \omega^3 \quad (4.99)$$

$$\rho = \frac{g_\rho}{m_\rho^2} \langle \bar{\psi} \tau_3 \gamma^0 \psi \rangle \quad (4.100)$$

であり、核子の Dirac 方程式は $t = p, n$ をアイソスピンを示す添字として

$$\left\{ -i\gamma^0 \gamma_k \partial^k + \gamma^0 (m + g_\sigma \sigma) + g_\omega + g_\rho \tau_3 \rho \right\} \psi_t^s = E_t^s \psi_t^s \quad (4.101)$$

となる。ただし、 s はエネルギー準位の添字で E_t^s は核子 t のエネルギー準位 s におけるエネルギー固有値である。核子 t があるエネルギー準位 s を占める確率は Fermi-Dirac 分布

$$f_t^s = \frac{1}{1 + \exp((\sqrt{k^2 + (m + g_\sigma \sigma)^2} - \mu_t^0)/T)} \quad (4.102)$$

で与えられる。ただし k は運動量で μ_t^0 は質量を含まない化学ポテンシャルである。反粒子を考える場合は化学ポテンシャルの符号が変わる。ここで、化学ポテンシャルと核子 t の数密度は

$$n_t = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 (f_t^k - f_{\bar{t}}^k) \quad (4.103)$$

で結び付けられる。ただし、エネルギー準位を表す添字 s の代わりに運動量 k を用い、核子 t の反粒子を \bar{t} とした。いま、バリオン数密度 $n_B = n_p + n_n$ 、陽子存在比 $Y_p = n_p/n_B$ および温度 T は与えられたものとする、そこから化学ポテンシャルが σ の関数として決まり、以上の方程式を自己無撞着に解くことができる。

以上からエネルギー固有値と平均場の値が求まると、種々の熱力学量を求めることができる。内部エネルギー密度は

$$e = \sum_t \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + (M + g_\sigma \sigma)^2} (f_t^k + f_{\bar{t}}^k) + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 + \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2 + \frac{3}{4} c_3 \omega^4 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 \quad (4.104)$$

であり、圧力は

$$P = \sum_t \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (M + g_\sigma \sigma)^2}} (f_t^k + f_t^k) - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2 + \frac{1}{4} c_3 \omega^4 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 \quad (4.105)$$

さらにエントロピー密度は

$$s = \sum_t \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left\{ -f_t^k \ln f_t^k - (1 - f_t^k) \ln(1 - f_t^k) - f_t^k \ln f_t^k - (1 - f_t^k) \ln(1 - f_t^k) \right\} \quad (4.106)$$

と計算できる。

次に非一様核物質の場合を考える。ここでは、以下に示すモデルに従って自由エネルギーを計算し、その停留点を探す。考えるモデルは Lattimer & Swesty と同様に、核子とレプトンで満たされた気体の中に種類の代表的な重原子核が存在しているような状態である。ここでも、レプトンは一様に分布する相互作用しない相対論的粒子として扱い、寄与は別にして考える。代表的原子核は体心立方格子を構成し、格子あたりのバリオン数 N_B と平均的なバリオン数密度 n_B を用いて格子の体積 V_c と格子定数 a を $V_c = a^3 = N_B/n_B$ と定義する。ここで、体心立方格子を同体積の球 (Wigner-Seitz セル) とみなし、核子 $t = n, p$ の数密度分布 $n_t(r)$ を

$$n_t(r) = \begin{cases} (n_{t,i} - n_{t,o}) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R_t} \right)^{p_t} \right\}^3 + n_{t,o}, & 0 \leq r < R_t \\ n_{t,o}, & R_t \leq r \leq R_c \end{cases} \quad (4.107)$$

と仮定する。ただし r は Wigner-Seitz セルの中心からの距離で R_c は $V_c = \frac{4\pi}{3} R_c^3$ から決める。 $n_{t,i}$ 、 $n_{t,o}$ は核子 t のセル中心および原子核外での密度で、 R_t と p_t は原子核の大きさと表面の厚さを決めるパラメータである。いま、バリオン数密度 n_B 、陽子存在比 Y_p 、温度 T を与えた状態でこの状態の自由エネルギー密度

$$F = (E - TS)/a^3 \quad (4.108)$$

を計算する。ここで、 $E = E_{\text{bulk}} + E_s + E_C$ と分解でき、

$$E_{\text{bulk}} = \int_{\text{cell}} d^3r e(n_n(r), n_p(r)) \quad (4.109)$$

$$S = \int_{\text{cell}} d^3r s(n_n(r), n_p(r)) \quad (4.110)$$

である。 $e(n_n, n_p)$ 、 $s(n_n, n_p)$ は、相対論的平均場理論により一様物質の時に n_B と Y_p すなわち n_n と n_p を与えて計算した内部エネルギー密度、エントロピー密度である。表面項はすなわち密度勾配がもつエネルギーなので、

$$E_s = \int_{\text{cell}} d^3r F_0 |\nabla(n_n(r) + n_p(r))|^2 \quad (4.111)$$

として計算する。ただし、 $F_0 = 70 \text{ MeVfm}^5$ である。さらに、Coulomb ポテンシャルの項は

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{\text{cell}} d^3r e \{ n_p(r) - n_e \} \phi(r) + C_{\text{BCC}} \frac{(Z_{\text{non}e})^2}{a} \quad (4.112)$$

と計算できる。ここで、 e は電子電荷で $n_e = Y_p n_B$ は一様に分布した電子の電荷、 $C_{\text{BCC}} = 0.006562$

状態方程式 K_s [MeV]	Lattimer & Swesty			Shen
	375	220	180	281
中性子星最大質量 [M_\odot]	~ 2.72	~ 2.04	~ 1.83	~ 2.24

表 4.3: 中性子星のとりうる最大重力質量の状態方程式に対する依存性。O'Connor and Ott (2011) で計算されている。

は体心立方格子に対して Wigner-Seitz セルからのずれを表す定数で、Oyamatsu (1993) に値が示されている。さらに、

$$Z_{\text{non}} = \int_0^{R_p} 4\pi r^2 dr (n_{p,i} - n_{p,o}) \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R_p} \right)^{t_p} \right\}^3 \quad (4.113)$$

はセル内の電荷分布の非一様部分である。また、 $\phi(r)$ は Wigner-Seitz セルを考えた場合の静電ポテンシャルで、Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = 4\pi e \{ n_p(r) - n_e \} \quad (4.114)$$

の解である。以上のモデルから自由エネルギーを計算し、それを最小化するモデルパラメータ a 、 $n_{n,i}$ 、 $n_{n,o}$ 、 R_n 、 p_n 、 $n_{p,i}$ 、 $n_{p,o}$ 、 R_p 、 p_p の組を見つける。ここで、バリオン数の保存則と電荷保存則から、モデルパラメータは 9 個あるが実際の自由度は 7 である。

最終的に得られる自由エネルギーを一様核物質と非一様核物質の場合とで比較し、小さくなる方の形態が実現されるとして熱力学量を求める。これが Shen の状態方程式である。ここで、一様か非一様かを分ける密度はだいたい 10^{14} g/cm^3 程度になる。また、Lattimer & Swesty の状態方程式との比較のために書いておくと、Shen の状態方程式から得られる非圧縮性パラメータは $K_s = 281 \text{ MeV}$ 、対称エネルギーは $S_v = 36.9 \text{ MeV}$ となっている。

4.2.3 状態方程式の比較

核物質の状態方程式は中性子星の観測から制限できる。 β 平衡を仮定すれば、状態方程式と温度を決めて TOV 方程式 (式 (4.37) のポテンシャルのもとでの静水圧平衡の式) から中性子星の質量と半径の関係を決めることができ、 $T = 0.1 \text{ MeV}$ の場合には O'Connor and Ott (2011) の図 1 に結果が載っている。中性子星の半径について信頼できるデータはまだないが、一つの中性子星について質量と半径を同時に決めることができれば、それと O'Connor and Ott (2011) の図 1 を比較することで現実的な状態方程式に強い制限を加えることができる。また、半径のデータがなくても、中性子星の質量からある程度状態方程式を制限することもできる。中性子星のとりうる最大質量が状態方程式によってどのように変わるかも計算することができ、O'Connor and Ott (2011) の結果を表 4.3 に載せる。これを見ると、非圧縮性 K_s の小さい状態方程式の方が支えることのできる中性子星の質量がより小さく、より「柔らかい」状態方程式であることがわかる。観測された中性子星の質量は多くは $\sim 1.4M_\odot$ であり、この表からくる制限には反しないが、2010 年に報告されたパルサー J1614-2230 の質量は $(1.97 \pm 0.04)M_\odot$ であり (Demorest et al. 2010)、ここから Lattimer & Swesty の $K_s = 180 \text{ MeV}$ モデルは現実的ではないと考えられる。

以上のように中性子星の観測などから状態方程式に制限を加えることは重要であるが、状態方程式の不定性を取り除くのは容易なことではない。そこで、状態方程式の違いが爆発に与える影響を系統的に調べることもなされている。その結果わかっている傾向としては、より「柔らかい」

状態方程式の方が爆発しやすい。その理由としては大きく分けて二つある。一つは、柔らかい状態方程式の方がニュートリノの光度および平均エネルギーが高くなり (Janka et al. 2005)、より効率的に衝撃波背面の物質を加熱できるようになることである。これは、柔らかい状態方程式の方が原始中性子星の収縮がより速く、すなわち断熱的に圧縮することになり、温度がより高くなるためである。中性子化バースト時の光度は硬い状態方程式のほうが若干大きい、バーストは短時間しか続かないので、その後長時間ニュートリノ光度の高い状態を維持する柔らかい状態方程式のほうがニュートリノによる加熱量は大きくなるのである。もう一つの理由としては、SASIの発達が強くなることがある。原始中性子星で散逸 (もしくは反射) によって生じた音響エネルギーフラックス (Foglizzo and Tagger 2000)

$$F = \dot{M} a^2 \frac{(1 - \mathcal{M})^2}{\mathcal{M}} \left(\frac{\delta P^-}{\gamma P} \right)^2 \quad (4.115)$$

を調べてみると、柔らかい状態方程式の方が強くなっていることがわかる (Couch 2013)。ただし \dot{M} は質量フラックス (質量降着率ではない) であり、 a は音速、 \mathcal{M} は Mach 数、 γ は断熱指数、 P は圧力、 δP^- は圧力の摂動のうち衝撃波面に向かう音波成分である。これは式 (3.85) の Q_{∇}^- (もしくは \mathcal{R}_{∇}^-) が大きくなることを示し、SASI がより強く発達することを示唆している。この原因としては、状態方程式が柔らかいと移流してきた渦度摂動がより中心深くまで到達し、圧力勾配のずっと大きいところで音波に散逸されることが考えられる。この状況は 3.3.2 節の平行平面流モデルでは減速領域が小さいコンパクト近似の極限に近く、音波が打ち消し合うことなく放射されるのである。

ただし、超新星爆発の文脈においては状態方程式の「柔らかさ」は非圧縮性パラメータ K_s の大小だけでは決まらない。例えば、Shen の状態方程式より Lattimer & Swesty $K_s = 220, 180 \text{ MeV}$ の状態方程式の方が非圧縮性は小さく、バウンス後の原始中性子星の中心密度は大きくなるのだが、非圧縮性の大きい Lattimer & Swesty $K_s = 375 \text{ MeV}$ の状態方程式と Shen の状態方程式の比較においても前者の方が中心密度が大きくなる (Suwa et al. 2013)。また、爆発しやすいの目安としてバウンス後爆発するのにかかる時間が使われることもあるが、どの K_s の Lattimer & Swesty によるシミュレーションも Shen によるシミュレーションより早く爆発する (Couch 2013)。状態方程式の硬さを決めるのは非圧縮性パラメータ K_s だけではなく、対称エネルギー S_v など重要なパラメータであると考えられている。

4.3 ニュートリノ輸送シミュレーション

ニュートリノ加熱メカニズムにおいて、最も重要なのはニュートリノ輸送の取扱いである。ニュートリノの平均自由行程は大きいので、ニュートリノ輸送を考えるには流体方程式ではなく Boltzmann 方程式を解かなくてはならない。Boltzmann 方程式は位相空間六次元上の方程式なので、それを直接離散化して解くには非常に大きな計算コストがかかる。また、超新星爆発中、密度は中心の $\sim 10^{14} \text{ g/cm}^3$ から鉄コア表面の $\sim 10^7 \text{ g/cm}^3$ まで非常に広範囲の値をとり、弱い相互作用のタイムスケールもそれに応じて広範囲の値をとる。これに伴って方程式は数値的に硬いものとなり、陰的方法で時間発展させる必要がある。陰的時間発展には大規模連立方程式を行列反転させる必要があり、やはり大きな計算コストがかかる。そこで、計算量を少なく抑えるために、しばしばニュートリノ輸送を様々な方法で近似したシミュレーションが行われる。また、考える空間次元を低くすることで計算コストを抑えることもされている。

4.3.1 ニュートリノ反応

ニュートリノと物質の相互作用を考える際には、以下に示したような反応を考える必要がある:

β 反応

$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p \quad (4.116)$$

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n \quad (4.117)$$

$$\nu_e + (A, Z) \leftrightarrow e^- + (A, Z + 1) \quad (4.118)$$

散乱反応

$$\nu + (A, Z) \leftrightarrow \nu' + (A, Z) \quad (4.119)$$

$$\nu + t \leftrightarrow \nu' + t \quad (4.120)$$

$$\nu + e^\pm \leftrightarrow \nu' + e^\pm \quad (4.121)$$

対生成

$$\nu + \nu' \leftrightarrow e^- + e^+ \quad (4.122)$$

核子-核子 Bremsstrahlung

$$\nu + \nu' + t + t' \leftrightarrow t + t' \quad (4.123)$$

ニュートリノ間反応

$$\nu_{\mu,\tau} + \bar{\nu}_{\mu,\tau} \leftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e \quad (4.124)$$

$$\nu_x + \{\nu_e, \bar{\nu}_e\} \leftrightarrow \nu'_x + \{\nu'_e, \bar{\nu}'_e\} \quad (4.125)$$

ただし、 (A, Z) は質量数 A 、原子番号 Z の原子核を表し、 $t = p, n$ は自由核子である。このうち、ニュートリノ加熱に重要になるのはニュートリノ吸収反応 (4.116, 4.117) であり、3.2 節ではこれらに絞って議論したが、現在は超新星シミュレーションにおいては以上の反応の内、(4.121)、(4.124)、(4.125) を除く全てのものを考えるのが標準的である。

4.3.2 Y_e 処方

ここからしばらく、ニュートリノ輸送を近似する方法を説明していく。最も単純な手法は「 Y_e 処方」(Liebendörfer 2005) というものである。ここでは、ニュートリノ反応に伴う電子存在比 Y_e の変化を電子密度に関する式 (4.34) を解く代わりに密度のフィッティング関数

$$Y_e(x) = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_1) + \frac{x}{2}(Y_2 - Y_1) + Y_c \left[1 - |x| + 4|x| \left(|x| - \frac{1}{2} \right) (|x| - 1) \right], \quad (4.126)$$

$$w/ \quad x(\rho) = \max \left[-1, \min \left(1, \frac{2 \log \rho - \log \rho_2 - \log \rho_1}{\log \rho_2 - \log \rho_1} \right) \right]. \quad (4.127)$$

に従うと考えて扱うものである。ただし $\rho_{1,2}$ および $Y_{1,2,c}$ はフィッティングパラメータであり、一次元 Boltzmann 方程式と連立させた流体シミュレーションから求められる。表 4.4 には二つの親星モデルについて求められたフィッティングパラメータを示す。この手法によって、ニュートリノが電子捕獲反応によって Y_e に与える影響を見積もることができる。ニュートリノ加熱の影響はこ

	N13		G15	
	ρ_i [g/cm ³]	Y_i	ρ_i [g/cm ³]	Y_i
$i = 1$	2×10^7	0.5	3×10^7	0.5
$i = 2$	2×10^{13}	0.285	2×10^{13}	0.278
Y_c		0.035		0.035

表 4.4: フィッティング関数 (4.126, 4.127) のパラメータ。N13 は Nomoto and Hashimoto (1988) の $13 M_\odot$ 親星モデルを表し、G15 は Woosley and Weaver (1995) の $15 M_\odot$ 親星モデルを表す。値は Liebendörfer (2005) で求められている。

の近似から見積もることができないが、単純なために他の物理過程の計算コストが高いシミュレーションを行う場合などに有用である。

4.3.3 ニュートリノしみ出し法

ニュートリノの電子存在比 Y_e に対する効果だけでなく、冷却の効果を考えるためには、ニュートリノしみ出し法 (Epstein and Pethick 1981, van Riper and Lattimer 1981) が使われる。この近似では、ニュートリノはニュートリノ球内で生成されると拡散のタイムスケールでしみ出し、ニュートリノ球外で生成されると即座に逃げ出していくと考える。ここでは Kotake et al. (2003) の議論に従い手法を説明する。そこでは簡単のため電子ニュートリノのみが考えられているが、その他のニュートリノの効果も同様にして扱うことができる。レプトン存在比 Y_ℓ の時間変化はニュートリノ球の内部と外部で異なる。ニュートリノ球の外部では、ニュートリノは即座になくなる ($Y_{\nu_e} = 0$) と考えるため $Y_\ell = Y_e$ となる。レプトン存在比の変化 dY_ℓ/dt と内部エネルギー密度の変化 de/dt は電子捕獲反応 (4.116)、(4.118) によって決まり、

$$\frac{dY_\ell}{dt} = \frac{dY_e}{dt} = -Q_{Y_e} \quad (4.128)$$

$$\frac{de}{dt} = -Q_E \quad (4.129)$$

となる。ただし Q_{Y_e} と Q_E はそれぞれ核子あたりの電子捕獲反応率とニュートリノが持ち出すことによるエネルギーの変化率である。一方でニュートリノ球の内側では、ニュートリノは物質と β 平衡にあるので $Y_{\nu_e} \neq 0$ である。そのような条件下では、レプトン存在比はニュートリノがしみ出すことによって減少する。また、ニュートリノがしみ出していくことだけが内部エネルギーを減少させていく。それゆえ、レプトン存在比と内部エネルギー密度の時間変化を記述する方程式は

$$\frac{dY_\ell}{dt} = -\frac{Y_{\nu_e}}{t_{\text{esc}}(\varepsilon_{\nu_e})} \quad (4.130)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e_{\nu_e}}{t_{\text{esc}}(\varepsilon_{\nu_e})} \quad (4.131)$$

となる。ただし、 $t_{\text{esc}}(\varepsilon_{\nu_e})$ はエネルギー ε_{ν_e} のニュートリノの拡散タイムスケールで e_{ν_e} は生成されたニュートリノの平均エネルギー密度である。ニュートリノ球内部では Y_e は Y_ℓ から β 平衡を仮定して求める。以上の時間変化はオペレータースプリッティング法で流体の時間発展に取り込む。さらに、 Q_{Y_e} 、 Q_E 、 $t_{\text{esc}}(\varepsilon_{\nu_e})$ といった量は以下のように計算される。

まず、自由陽子への電子捕獲反応 (4.116) を考える。ここでは、簡単のため Fermi の黄金率

$$d\Gamma_p = 2\pi |H_{fi}|^2 (1 - f_{\nu_e}) D_{\nu_e} d\epsilon_{\nu_e} \delta(\epsilon_{\nu_e} + Q - E_e) \quad (4.132)$$

で反応率を見積もる。ただし、 Γ_p は電子捕獲率、 $D_{\nu_e} = \epsilon_{\nu_e}^2 / 2\pi^2$ はエネルギーが ϵ_{ν_e} である等方的なニュートリノの状態密度、 $Q = \mu_n - \mu_p$ は反応の Q 値、 E_e は電子のエネルギーである。また、Pauli の排他律によりニュートリノは一つの状態に二つ以上入ることができない (Pauli ブロッキング) ため、ブロッキング因子 $1 - f_{\nu_e}$ がかかっている。 f_{ν_e} は ν_e の分布関数であり、ここでは β 平衡を仮定しているので Fermi-Dirac 分布とする。さらに、 H_{fi} は Hamiltonian H の行列要素であるが、弱い相互作用の低エネルギー極限である四点相互作用を考えると

$$|H_{fi}|^2 = G_F^2 (1 + 3a^2) \quad (4.133)$$

となる。ただし、第一項は Fermi 遷移 (核子のスピンを変えない遷移) の寄与を、第二項は Gamow-Teller 遷移 (核子のスピンを変える遷移) の寄与をあらわす。 a は軸性ベクトル結合定数である (式 (3.9) を見よ)。ベクトル結合定数は 1 としている。以上をまとめ、また入射電子について和をとると

$$\begin{aligned} \Gamma_p &= \frac{G_F^2 (1 + 3a^2)}{\pi} \int F_e (1 - f_{\nu_e}) \epsilon_{\nu_e}^2 \delta(\epsilon_{\nu_e} + Q - E_e) d\epsilon_{\nu_e} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{G_F^2 (1 + 3a^2)}{2\pi^3} \int_Q^\infty E_e^2 (E_e - Q)^2 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e \end{aligned} \quad (4.134)$$

となる。ただし F_e は電子の Fermi-Dirac 分布であり、 p_e は電子の運動量を表す。原子核への電子捕獲確率 (4.118) は同様に計算して

$$\Gamma_A = \frac{G_F^2 a^2 S}{2\pi^3} \gamma_p F_p (1 - F_n) \int_{Q_A}^\infty E_e^2 (E_e - Q)^2 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e \quad (4.135)$$

となる。ただし、 γ_p は陽子軌道の縮退度で F_t は核子 $t = p, n$ の分布関数、 Q_A は原子核 A 中での反応 Q 値。また、 S は核子の角運動量の変化によって変わる値で、

$$S = \begin{cases} \frac{2\ell+3}{2\ell+1}, & \ell + \frac{1}{2} \rightarrow \ell + \frac{1}{2} \\ \frac{4\ell}{2\ell+1}, & \ell + \frac{1}{2} \rightarrow \ell - \frac{1}{2} \\ \frac{4(\ell+1)}{2\ell+1}, & \ell - \frac{1}{2} \rightarrow \ell + \frac{1}{2} \\ \frac{2\ell-1}{2\ell+1}, & \ell - \frac{1}{2} \rightarrow \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.136)$$

となる。ここで、もっとも遷移確率が大きくなるのは陽子軌道 $1f_{\frac{7}{2}}$ から中性子軌道 $1f_{\frac{5}{2}}$ への遷移である。そのような準位に陽子が存在するのは原子番号が $20 \leq Z \leq 28$ のものであり、 $\gamma_p F_p \sim Z - 20$ となる。さらに中性子軌道 $1f_{\frac{5}{2}}$ は空いているとすれば、 $\ell = 3$ のため $S = 12/7$ となる。結局、原子核への捕獲率は

$$\Gamma_A = \frac{12}{7} \frac{G_F^2 a^2 (Z - 20)}{2\pi^3} \int_{Q_A}^\infty E_e^2 (E_e - Q)^2 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e \quad (4.137)$$

となる (Epstein and Pethick 1981)。以上により、

$$Q_{Y_e} = Y_p \Gamma_p + Y_A \Gamma_A \quad (4.138)$$

となる。\$Y_A\$ は \$Y_e\$ と同様に原子核に対して定義する。

エネルギーの変化率については、反応で生じたニュートリノの持つエネルギーがなくなることを考えると、式 (4.132) のような微分反応率にニュートリノのエネルギー \$\epsilon_{\nu_e}\$ をかけて同様に積分を行えばよいので、

$$Q_E = \frac{G_F^2(1+3a^2)}{2\pi^3} n_p \int_Q^\infty E_e^2 (E_e - Q)^3 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e + \frac{12}{7} \frac{G_F^2 a^2 (Z-20)}{2\pi^3} n_A \int_{Q_A}^\infty E_e^2 (E_e - Q)^3 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e \quad (4.139)$$

となる。ただし \$n_{A,p}\$ は原子核、陽子の数密度である。

最後に、拡散タイムスケール

$$t_{\text{esc}} = \frac{3\Delta R^2}{\pi^2 c \lambda_{\text{tot}}} \quad (4.140)$$

を見積もる。\$\lambda_{\text{tot}}\$ は平均自由行程であり、\$\Delta R\$ は考えている場所からニュートリノ球までの距離である。平均自由行程を定義するための吸収係数 \$\alpha_{\text{tot}} = \lambda_{\text{tot}}^{-1}\$ の原因としてはコヒーレント散乱 (coh)(4.119)、陽子散乱 (sc,p) と中性子散乱 (sc,n)(4.120)、自由中性子への吸収 (ab,n)(4.116) を考え、

$$\alpha_{\text{tot}}(\epsilon_{\nu_e}) = \frac{\rho Y_A}{m_u} \sigma_{\text{coh}}(\epsilon_{\nu_e}) + \frac{\rho Y_p}{m_u} \sigma_{\text{sc,p}}(\epsilon_{\nu_e}) + \frac{\rho Y_n}{m_u} \sigma_{\text{sc,n}}(\epsilon_{\nu_e}) + \frac{\rho Y_n}{m_u} \sigma_{\text{ab,n}}(\epsilon_{\nu_e}) \quad (4.141)$$

とする。ここで \$\epsilon_{\nu_e}\$ はニュートリノの平均エネルギーであるが、これは各反応で生成されるニュートリノの平均エネルギー

$$\epsilon_{\nu_e,p} = \frac{\int_Q^\infty E_e^2 (E_e - Q)^3 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e}{\int_Q^\infty E_e^2 (E_e - Q)^2 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e} \quad (4.142)$$

$$\epsilon_{\nu_e,A} = \frac{\int_{Q_A}^\infty E_e^2 (E_e - Q)^3 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e}{\int_{Q_A}^\infty E_e^2 (E_e - Q)^2 F_e (1 - f_{\nu_e}) dE_e} \quad (4.143)$$

を用いて

$$\epsilon_{\nu_e} = \frac{\epsilon_{\nu_e,p} Y_p \Gamma_p + \epsilon_{\nu_e,A} Y_A \Gamma_A}{Y_p \Gamma_p + Y_A \Gamma_A} \quad (4.144)$$

と計算する。また、ニュートリノ球 (半径 \$R_{\nu_e}\$) は密度が \$3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3\$ である球として定義する場合 (Kotake et al. 2003) もあるが、光学的深さ \$\tau_{\nu_e}\$ で定義する場合 (Kotake et al. 2004) は、こちらでも吸収係数を用いて

$$\tau_{\nu_e} = \int_{R_{\nu_e}}^\infty \alpha_{\text{tot}}(\epsilon_{\nu_e}) dr = \frac{2}{3} \quad (4.145)$$

を満たす \$R_{\nu_e}\$ で定義する。ここから \$\Delta R\$ を求め、\$\lambda_{\text{tot}}(\epsilon_{\nu_e}) = \alpha_{\text{tot}}^{-1}(\epsilon_{\nu_e})\$ も用いて式 (4.140) から \$t_{\text{esc}}\$ を計算する。

この手法は重力崩壊に伴うニュートリノ光度の計算などに使うことができるが、爆発で重大な役割を果たすニュートリノ加熱を扱うことはできない。

4.3.4 ニュートリノライトバルブ近似

ニュートリノライトバルブ (電球) 近似はニュートリノ加熱と冷却を記述する近似である。この近似で想定しているのは、中心にニュートリノ球を半径とする原始中性子星が存在し、そこから

一定温度、一定光度のニュートリノが放出されているという状況で、あたかも系の中心に光の代わりに黒体輻射ニュートリノを放出する電球を設置したような近似である。また、ニュートリノ球より内側の部分をくり抜き、その外側の部分に限って流体計算を行う。この、ニュートリノ球外部の領域で生成したニュートリノはしみ出し法と同様にもはや物質と反応せず抜け出していくと考えるので、文献によっては、ニュートリノしみ出し/加熱法と呼んでいる。計算上ではニュートリノ加熱率 $\rho\mathcal{H}$ と冷却率 $-\rho\mathcal{C}$ を式 (4.33) の右辺に追加する。ここで、

$$\mathcal{H} = \frac{q_{\nu_e}^+ + q_{\bar{\nu}_e}^+}{m_u} = 1.544 \times 10^{20} \text{ erg/g/s} \times \left(\frac{L_{\nu_e}}{10^{52} \text{ erg/s}} \right) \left(\frac{T_{\nu_e}}{4 \text{ MeV}} \right)^2 \left(\frac{100 \text{ km}}{r} \right)^2 (Y_n + Y_p) e^{-\tau_\nu} \quad (4.146)$$

$$\mathcal{C} = \frac{q_{\nu_e}^- + q_{\bar{\nu}_e}^-}{m_u} = 1.399 \times 10^{20} \text{ erg/g/s} \left(\frac{T}{2 \text{ MeV}} \right)^6 (Y_n + Y_p) e^{-\tau_\nu} \quad (4.147)$$

であり、ニュートリノ光度 L_{ν_e} とニュートリノ球での温度 T_{ν_e} は任意に与えられる近似のパラメータである。 $q_{\nu_e}^+$ は式 (3.7) で与えられた核子あたりの電子ニュートリノによる加熱率である。ここでは、反電子ニュートリノの光度と温度は電子ニュートリノのそれらと等しく、 $Y_n \rightarrow Y_p$ という置き換えだけで $q_{\bar{\nu}_e}^+$ が得られるとした。また、 $q_{\nu_e}^-$ は式 (3.12) で与えられた核子あたりの電子捕獲による冷却率である。陽電子捕獲についても同様に考えられる。ここで用いた数値は Murphy and Burrows (2008) などが用いているものと同じだが、電子ニュートリノと反電子ニュートリノで例えば温度が違うとして扱うこともある。ただし、単純に $q_{\nu_e}^+$ 、 $q_{\bar{\nu}_e}^-$ を使うだけの定式化では、光学的に薄い領域ではよい近似を与えるが、光学的に厚い領域では加熱率が大きくなりすぎてしまう。この効果を防ぐために、抑制因子 $\exp(-\tau_\nu)$ がさらにかかっている。ここで τ_ν はニュートリノの光学的深さであり、正確には式 (4.145) と同様に α_{tot} を用いて

$$\tau_\nu = \int_r^\infty \alpha_{\text{tot}} dr \quad (4.148)$$

で定義されるべきものである。しかし、しばしば近似的に

$$\alpha_{\text{tot}} \simeq \frac{3}{4} \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1} \left(\frac{T_{\nu_e}}{4 \text{ MeV}} \right)^2 (Y_n + Y_p) \left(\frac{\rho}{10 \text{ g/cm}^3} \right) \quad (4.149)$$

で計算される (Murphy et al. 2009)。また、 Y_e の変化 (4.34) は電子捕獲反応率を計算する場合 (e.g., Murphy and Burrows 2008) もあるが、簡単に Y_e 処方 (4.3.2 節) を用いる場合 (e.g., Murphy et al. 2009) もある。

この近似では、ニュートリノ光度と温度は勝手な値に設定でき、特にニュートリノ光度を大きくすることで自由に爆発させることができる。そのため、ある質量降着率に対して爆発するのに最低限必要な「臨界光度」を調べたり (Murphy and Burrows 2008)、ニュートリノ光度に応じて衝撃波背面の対流によるエネルギーフラックス (Murphy et al. 2013) や SASI のパターン (Iwakami et al. 2014) などの流体不安定性の様子がどう変わるかを調べたりなどのパラメータ研究に使われる。

4.3.5 モーメント法による Boltzmann 方程式の解法

ここまでのニュートリノ輸送の取り扱い、ニュートリノが Fermi-Dirac 分布に従うということとを仮定してきた。これはいたるところで β 平衡が成立していれば正しいが、実際にはそのよう

な状態はニュートリノ球の奥深くでのみ成立する。そのため、ニュートリノに関しては分布関数の時間発展を直接追う、すなわち Boltzmann 方程式 (4.5) を解く必要がある。

Boltzmann 方程式を解く上では、おおまかに二つの方向性がある。一つは、位相空間六次元を直接離散化して Boltzmann 方程式を解くものである。これは S_N 法 (Sumiyoshi and Yamada 2012) と呼ばれる。もう一つは、Boltzmann 方程式の代わりにそのモーメント方程式を解くものである。この場合は、モーメント方程式は適切な次数までで打ち切り、何らかの closure 関係式を仮定して方程式系を閉じる必要がある。この節では、このモーメント方程式の解法を考えていく。Boltzmann 方程式を解く際にモーメント方程式系を導入するのは、一般的によく使われる手法である。例えば、流体力学方程式系 (4.31)、(4.32)、(4.33) は物質の分布関数についての Boltzmann 方程式を、それぞれ零次、一次、二次の速度に関するモーメント方程式に直したものである。この場合、closure 関係式としては状態方程式を用いる。

モーメント法による Boltzmann 方程式の解法は、光子の輻射輸送の文脈でも多く研究されており、超新星シミュレーションにおいてもそこで開発された手法が多く使われている。そこで、この節では光子の場合と同様に分布関数 f の代わりにニュートリノ輻射比強度 (specific intensity)

$$\mathcal{I} \equiv \epsilon^3 f \quad (4.150)$$

を考える。これが従う方程式は、一般相対論的な効果と Pauli ブロッキングを考えなければ慣性系で

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{I} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathcal{I} = \eta - \chi \mathcal{I} \quad (4.151)$$

となる。ここで、 η は emissivity、 χ は absorptivity と呼ばれる。光子の輻射輸送においてはそれぞれ放出係数 (emission coefficient) 及び吸収係数 (absorption coefficient) と呼ばれ、特に emissivity は別の物理量を指す用語であるが (Rybicki and Lightman 1986)、ここではこのように定義する。以下では特にニュートリノのフレーバーを区別して書かないが、フレーバーによって変わるのはこの emissivity と absorptivity の具体形だけなので、複数のフレーバーを扱う場合はそれぞれについて適切な η 、 χ を用いて以下で導く方程式を解けばよい。

光子の輻射輸送の場合と同様に、以下の「Eddington モーメント」を考える。

$$J(t, \mathbf{r}, \epsilon) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \mathcal{I}(t, \mathbf{r}, \epsilon, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} E \quad (4.152)$$

$$H^i(t, \mathbf{r}, \epsilon) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega n^i \mathcal{I}(t, \mathbf{r}, \epsilon, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} F^i \quad (4.153)$$

$$K^{ij}(t, \mathbf{r}, \epsilon) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega n^i n^j \mathcal{I}(t, \mathbf{r}, \epsilon, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} P^{ij} \quad (4.154)$$

ただし、 $t = x^0$ 、 $r^i = x^i$ 、 ϵ はニュートリノのエネルギー、 \mathbf{n} はニュートリノの運動量の方向を向く単位ベクトルであり、積分は運動量の方向について行っている。また、 E は輻射エネルギー密度、 F は輻射エネルギーフラックス、 P^{ij} は輻射圧力テンソルである。それぞれ、エネルギーが $\epsilon \sim \epsilon + d\epsilon$ の間にあるニュートリノについてのものであることに注意せよ。各モーメントの ϵ 依存性を無視する場合をグレイ輸送、考慮する場合をマルチグループ輸送と呼ぶ。また、さらに高次の角度モーメントを考えることもできる。これらの Eddington モーメントを支配する方程式は

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} = S^0 \quad (4.155)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{K} = S^1 \quad (4.156)$$

などとなる。こちらもより高次のモーメントを考えることもできる。ただし、 S^0 、 S^1 は衝突項のモーメントである。

多次元シミュレーションでは配位空間での角度方向の輸送は無視し、様々な角度 bin それぞれについて球対称性を仮定した方程式を解く手法がしばしば用いられる。これを Ray-by-Ray (RbR) 法と呼ぶ。RbR 法はこの節で説明するモーメント法や次節の当方拡散源近似などの一般の Boltzmann 方程式の解法それぞれに対し考えられる手法である。この場合、角度変数は変数というより単なるラベルとなる。この近似を改良して、角度方向の移流もオペレータースプリッティング法で考えるようにした手法も開発されており、Ray-by-Ray plus (RbR+) 法と呼ばれる (Buras et al. 2006)。

流束制限拡散近似

もし零次のモーメント方程式だけを考える場合、 E と F とを関係付ける closure 関係式を仮定しなくてはならない。このとき、しばしば流束制限拡散 (flux limited diffusion, FLD) 近似が用いられる。この近似では、closure 関係式としては

$$\mathbf{F} = -\frac{\Lambda}{\chi} \nabla E \quad (4.157)$$

が使われる。ただし、 Λ は流束制限関数 (flux limiter) と呼ばれ、以下の条件を満たす。

$$\Lambda = \begin{cases} 1/3 & (\chi \rightarrow \infty) \\ \chi E / |\nabla E| & (\chi \rightarrow 0) \end{cases} \quad (4.158)$$

$\chi \rightarrow 0$ という極限はニュートリノが自由に伝搬する状況を表し、そのような状況ではエネルギーフラックスは $|\mathbf{F}| = E$ となるべきである¹。一方、 $\chi \rightarrow \infty$ の極限はニュートリノがランダムウォークして拡散的な振る舞いをする状況を表し、この場合フラックスは $\mathbf{F} = -\nabla E / (3\chi)$ となるべきである。後者の拡散極限では、 χ が減少するにつれて F は増大していく。適用限界を無視して考えてしまうといずれ $|\mathbf{F}|$ は $\chi \rightarrow 0$ の極限で無限大に発散してしまうので、それを防ぐために Λ でフラックスを制限して二つの極限をつなぐのである。これが Λ を流束制限関数と呼ぶ理由である。超新星シミュレーションでよく使われる流束制限関数は二つある。一つは Mayle & Wilson (MW) 制限関数というもので (Mayle 1985)、

$$\Lambda_{\text{MW}}(R_{\text{MW}}) = \frac{1}{3 + |R_{\text{MW}}| \xi(R_{\text{MW}})}, \quad (4.159)$$

$$R_{\text{MW}} = \frac{|\nabla E|}{\chi E}, \quad (4.160)$$

$$\xi(R_{\text{MW}}) = 1 + \frac{3}{1 + \frac{1}{2}|R_{\text{MW}}| + \frac{1}{8}|R_{\text{MW}}|^2}. \quad (4.161)$$

とするものである。もう一つは Levermore & Pomraning (LP) 制限関数というもので (Levermore and Pomraning 1981)、

$$\Lambda_{\text{LP}} = \frac{1}{R_{\text{LP}}} \left(\coth R_{\text{LP}} - \frac{1}{R_{\text{LP}}} \right), \quad (4.162)$$

$$R_{\text{LP}} = \frac{|\nabla E|}{\chi E}. \quad (4.163)$$

¹ $c = 1$ としていることに注意せよ。 c をあらわに書くと $|\mathbf{F}| = cE$ となる。以下の式も同様である。

とするものである。

Princeton 大学を中心としたグループは Burrows et al. (2006a, 2007b) で Newtonian 極限重力、Shen の状態方程式、RbR 法を用いないマルチグループ FLD 近似による二次元シミュレーションの結果、音響メカニズムで Nomoto and Hashimoto (1988), Woosley and Weaver (1995), Woosley et al. (2002), Heger et al. (2005) の $11 - 25 M_{\odot}$ の親星モデルが爆発すると主張し、また Dolence et al. (2014) で同様のセットアップ、Woosley and Heger (2007) の $12, 15, 20, 25 M_{\odot}$ 親星モデルのシミュレーションで爆発しなかったと報告した。その一方で Oak Ridge 国立研究所のグループは Bruenn et al. (2013) で TOV monopole 法重力、Lattimer & Swesty の状態方程式、RbR+法マルチグループ FLD 近似による二次元シミュレーションで Dolence et al. (2014) と同じ親星モデルで爆発したと主張した。

M1 closure 法

次に、一次のモーメント方程式 (4.156) も導入する場合を考える。一次までの方程式と closure 関係式を使うこの手法は、M1 closure 法と呼ばれる。しばしば使われる closure 関係式は

$$P^{ij} = \left(\frac{1-p}{2} \delta^{ij} + \frac{3p-1}{2} \frac{F^i F^j}{F^2} \right) E \quad (4.164)$$

というものである (e.g., Levermore 1984)。ここで、 p は Eddington 因子で $p \rightarrow 1/3 (\chi \rightarrow \infty)$ および $p \rightarrow 1 (\chi \rightarrow 0)$ という極限值をとる。Eddington 因子として Audit モデル (González and Audit 2005) を使う場合、その関数形を陽に書くと

$$p = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}}, \quad (4.165)$$

となり、Cernoholsky モデル (Cernohorsky and Bludman 1994) を使う場合

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}(6f^2 - 2f^3 + 6f^4), \quad (4.166)$$

となる。ただし $f = |F|/E$ はフラックス因子である。FLD 近似は放物型の拡散方程式になるのに対し、M1 closure 法は双曲型の方程式になる。それゆえ、この手法は因果律に従い、相対論的な流体コードに実装することができる。M1 closure 法は例えば Kuroda et al. (2012) で Audit モデルが使われているが、非常に短時間しかシミュレーションされていないため爆発するかどうかを判定することはできない。

可変 Eddington 因子法

モーメント方程式を解く方法として、他に可変 Eddington 因子法というものがある (Yorke 1980, Rampp and Janka 2002)。この手法はモーメント方程式を閉じる closure 関係式を得るために、式 (4.157) や (4.164) のように何らかの関数形を仮定するのではなく、簡単化したモデル Boltzmann 方程式を解いた結果を用いるものである。ここでは Rampp and Janka (2002) で実装されている特殊相対論的な手法を考える。ここでは関連する方程式を $\mathcal{O}(v)$ の一次の項まで取る近似をしている。超新星においてはこれは 0.3 程度である。平坦な時空で、球対称を仮定した Boltzmann 方程

式はこの場合流体静止系で

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) \mathcal{I} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{I} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \mathcal{I} \\
& + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \left\{ \mu \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \mathcal{I} \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\epsilon \left\{ (1 - \mu^2) \frac{v}{r} + \mu^2 \frac{\partial v}{\partial r} + \mu \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \mathcal{I} \right] \\
& + \left\{ (3 - \mu^2) \frac{v}{r} + (1 + \mu^2) \frac{\partial v}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \mathcal{I} = C, \tag{4.167}
\end{aligned}$$

となる。ただし、独立変数は t 、 r 、 ϵ 、そして μ (動径方向に対するニュートリノ進行方向の方向余弦) である。これらの量はすべて流体静止系で測る。 $C = \eta - \chi \mathcal{I}$ は衝突項である。この式で μ の零次と一次のモーメントを取ると、

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) J + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H) \\
& - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\epsilon \left\{ \frac{v}{r} (J - K) + \frac{\partial v}{\partial r} K + \frac{\partial v}{\partial t} H \right\} \right] \\
& + \frac{v}{r} (3J - K) + \frac{\partial v}{\partial r} (J + K) + 2 \frac{\partial v}{\partial t} H = C^{(0)}, \tag{4.168}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \right) H + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 K) + \frac{K - J}{r} \\
& - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\epsilon \left\{ \frac{v}{r} (H - L) + \frac{\partial v}{\partial r} L + \frac{\partial v}{\partial t} K \right\} \right] \\
& + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) H + \frac{\partial v}{\partial t} (J + K) = C^{(1)}, \tag{4.169}
\end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$\{J, H, K, L\} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \{1, \mu, \mu^2, \mu^3\} \mathcal{I}, \tag{4.170}$$

は輻射比強度の角度モーメントで、

$$C^{(n)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \mu^n C, \tag{4.171}$$

は衝突項のモーメントである。closure 関係式を得るために、可変 Eddington 因子 $f_H = H/J$ 、 $f_K = K/J$ 、 $f_L = L/J$ を tangent-ray 法で計算する。Tangent-ray 法では、独立変数の組を (r, μ) から (s, p) に取り替える。ただし、 $s = r\mu$ で、 $p = r\sqrt{1 - \mu^2}$ はインパクトパラメータであり、 $\mu \geq 0$ とする。ここで、 μ を非負に限るのに対応して、もともと全ての μ を独立変数としていた \mathcal{I} の代わりに新しい二つの従属変数

$$j(t, s, p) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{I}(\mu) + \mathcal{I}(-\mu) \} \tag{4.172}$$

$$h(t, s, p) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{I}(\mu) - \mathcal{I}(-\mu) \} \tag{4.173}$$

を考える。このとき、式 (4.167) をモデル化して二つの方程式

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}j + \mu \frac{\partial}{\partial s}h - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \epsilon \left[(1 - \mu^2) \frac{v}{r}j + \mu^2 \frac{\partial v}{\partial r}j + \mu \frac{\partial v}{\partial t}h \right] \right\} \\ + (3 - \mu^2) \frac{v}{r}j + (1 + \mu^2) \frac{\partial v}{\partial r}j + 2\mu \frac{\partial v}{\partial t}h = s_E, \end{aligned} \quad (4.174)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}h + \mu \frac{\partial}{\partial s}j - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \epsilon \left[(1 - \mu^2) \frac{v}{r}h + \mu^2 \frac{\partial v}{\partial r}h + \mu \frac{\partial v}{\partial t}j \right] \right\} \\ + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) h + \mu \frac{\partial v}{\partial t}j = u_E. \end{aligned} \quad (4.175)$$

を得る。ただし、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.176)$$

は Lagrange 微分であり、また s_E と u_E はそれぞれ衝突項の対称成分と反対称成分で、角度モーメントに依存する。さらに、このモデル化にあたっては

$$(\mu - \mu^3) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial j}{\partial \mu} \rightarrow (3\mu^2 - 1) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) j \quad (4.177)$$

$$(\mu - \mu^3) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial h}{\partial \mu} \rightarrow (4\mu^2 - 2) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) h \quad (4.178)$$

という置き換えを行った。これらの方程式の解から、角度モーメントは

$$J(r_i) = \int_0^1 d\mu j(r_i, \mu) \simeq \sum_{k=K_0}^i j_{ik} a_{ik}, \quad (4.179)$$

$$H(r_i) = \int_0^1 d\mu \mu h(r_i, \mu) \simeq \sum_{k=K_0}^i h_{ik} b_{ik}, \quad (4.180)$$

$$K(r_i) = \int_0^1 d\mu \mu^2 j(r_i, \mu) \simeq \sum_{k=K_0}^i j_{ik} c_{ik}, \quad (4.181)$$

$$L(r_i) = \int_0^1 d\mu \mu^3 h(r_i, \mu) \simeq \sum_{k=K_0}^i h_{ik} d_{ik}. \quad (4.182)$$

で得られる。ただし、係数 a_{ik} 、 b_{ik} 、 c_{ik} 、 d_{ik} は Yorke (1980) のように計算できる。式 (4.174)、(4.175) を積分して得られた j 、 h から Eddington モーメント (4.179)–(4.182) を計算し、Eddington 因子 f_H 、 f_K 、 f_L を計算する。これらの因子を closure 関係式として (4.168)、(4.169) を解くのである。 J 、 H 、 K 、 L を計算するためには f_H 、 f_K 、 f_L を与える必要があるが、そのために必要な j 、 h の計算には s_E 、 u_E を与える必要があり、これは J 、 H 、 K 、 L に依存する。従って、実際にはある初期推定から始めて反復により解を得る。また、この近似では、半径がインパクトパラメータ p の球に接するニュートリノの光線を考えており、これが “tangent-ray” 法と呼ばれる所以である。

以上の解法は球対称を仮定しているが、RbR+法によって多次元の場合に拡張したニュートリノ輸送手法が Max Planck 研究所のグループが開発した VERTEX コード (Rampp and Janka 2002) に用いられている。Marek and Janka (2009) では TOV monopole 法重力、Lattimer & Swesty の状態方程式、および VERTEX コードによるニュートリノ輸送で二次元シミュレーションを行い、軽い親星モデル ($11.2 M_\odot$ (Woosley et al. 2002)) で爆発することを主張した。また、Müller

et al. (2012b) は重力を共形平坦近似で扱う以外は Marek and Janka (2009) と同じセットアップで、 $11.2 M_{\odot}$ (Woosley et al. 2002) および $15 M_{\odot}$ (Woosley and Weaver 1995) の親星モデルで爆発することを主張した。さらに、Hanke et al. (2013) では TOV monopole 法重力、Lattimer & Swesty の状態方程式、VERTEX コードによるニュートリノ輸送により、Woosley et al. (2002) の $27 M_{\odot}$ モデルで三次元のシミュレーションを行ったが、爆発はしなかった。

4.3.6 等方拡散源近似 (IDSA)

超新星中のニュートリノは物質を完全に無視して飛び回るわけでも完全に物質と平衡状態で捕らわれているわけでもなく、その中間の状態にある。そのような状況の分布関数を、自由に飛び回るニュートリノの分布関数と物質に捕らわれたニュートリノの分布関数とに分解する近似を行うのが等方拡散近似 (Liebendörfer et al. (2009), isotropic diffusion source approximation, IDSA) である。これは S_N 法でもモーメント法でもない特殊な近似法だが、計算量の割に精度の高い結果を得ることができ、三次元シミュレーションのような計算量の多いシミュレーションに適用する時に便利である。以下では、この近似法の詳細を述べる。

IDSA においては、球対称分布関数は

$$f(t, r, \mu, \epsilon) = f^t(t, r, \epsilon) + f^s(t, r, \mu, \epsilon) \quad (4.183)$$

と分解できると仮定する。ただし、 f^t は物質に捕らえられたニュートリノに関するもの、 f^s は自由に伝搬するニュートリノに関するもので、 f^t は等方的であるが f^s は方向依存性を持つ。また、しばらくニュートリノのフレーバーによる違いは考えない。それぞれの分布関数は

$$\mathcal{L}(f^t) = C^t - \Sigma \quad (4.184)$$

$$\mathcal{L}(f^s) = C^s + \Sigma \quad (4.185)$$

という方程式に従うとする。ここで、 \mathcal{L} は Boltzmann 方程式の左辺を記述する微分演算子であり、 $C = C^t + C^s$ は Boltzmann 方程式の右辺、つまり衝突項である。 Σ は捕らえられたニュートリノと自由伝搬ニュートリノとの変換を表す項であり、拡散源項と呼ぶ。 \mathcal{L} と C は具体的には、式 (4.176) の Lagrange 微分 D/Dt を用いて流体静止系で

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) \equiv & \frac{Df}{Dt} + \mu \frac{\partial f}{\partial r} + \left\{ \mu \left(\frac{D \ln \rho}{Dt} + \frac{3v}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\} (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ & + \left\{ \mu^2 \left(\frac{D \ln \rho}{Dt} + \frac{3v}{r} \right) - \frac{v}{r} \right\} \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \end{aligned} \quad (4.186)$$

$$C \equiv j(1 - f) - \chi f + \epsilon^2 \left\{ (1 - f) \int d\mu' R f' - f \int d\mu' R (1 - f') \right\} \quad (4.187)$$

である。ただし $f' = f(t, r, \mu', \epsilon)$ であり、 j は emissivity (モーメント方程式の時に使っていた η とはファクター e^3 だけ違うが、ここでは同じ用語で呼ぶ)、 χ は absorptivity を表す。ここではどちらも散乱反応の寄与は除いている。 $1 - f$ のファクターは Pauli ブロッキングの効果である。また、 R は散乱反応カーネルであり、

$$\epsilon^2 R = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \phi_{\ell}(\epsilon) \int_0^{2\pi} d\varphi \mathcal{P}_{\ell}(\cos \theta) = \frac{1}{2} \phi_0(\epsilon) + \frac{3}{2} \mu \mu' \phi_1(\epsilon) \quad (4.188)$$

と Legendre 展開する。ただし、 $\cos \theta = \mu\mu' + \cos \varphi \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}$ は散乱前後のニュートリノの進行方向がなす角の余弦、 φ は散乱後の方向から測った散乱前のニュートリノの方位角、 P_ℓ は ℓ 次の Legendre 多項式であり、最後の表式は $\ell = 1$ までで打ち切った。

まず、(4.184) を考える。これは具体形としては

$$\frac{Df^t}{Dt} + \frac{1}{3} \frac{D \ln \rho}{Dt} \epsilon \frac{\partial f^t}{\partial \epsilon} = j - (j + \chi) f^t - \Sigma \quad (4.189)$$

であり、拡散源項は

$$\Sigma = \min \left[\max \left\{ \alpha + \frac{j + \chi}{2} \int d\mu f^s, 0 \right\}, j \right] \quad (4.190)$$

$$w/ \alpha = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-r^2}{3(j + \chi + \phi)} \frac{\partial f^t}{\partial r} \right) \quad (4.191)$$

と表される。ただし、 $\phi = \phi_0 - \phi_1$ は散乱の opacity と呼ぶ。これは次のように導かれる。いま、散乱項によって f^t と f^s が移り変わることはなく、また emissivity j で生成されるニュートリノは全て物質に捕らわれた成分になるとすると、(4.184) は

$$\mathcal{L}(f^t) = j - (j + \chi) f^t - \Sigma + \epsilon^2 \left(\int d\mu' R f^{t'} - f^t \int d\mu' R \right) \quad (4.192)$$

となる。この角度平均をとると Σ も等方的なので (4.189) を得る。また、拡散源項 (4.190) については以下のように導かれる。いま、物質に捕らわれた粒子は拡散によって外部に抜け出していく。単位時間あたりに拡散で抜け出ていく量は、上の表式では単位時間あたりに自由伝搬ニュートリノに変換される率である Σ と、自由伝搬ニュートリノが物質に吸収される率である $(j + \chi) \int d\mu f^s / 2$ との差になる。従って、平均自由行程を λ とすると

$$\Sigma - \frac{j + \chi}{2} \int d\mu f^s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r^2 \lambda}{3} \frac{\partial f^t}{\partial r} \right) \quad (4.193)$$

となる。ここで、平均自由行程は Chapman-Enskog 展開 (Chapman and Cowling 1970) の一次の項までを考えることにより $\lambda = (j + \chi + \phi)^{-1}$ と書けるので、式 (4.191) を用いて $\Sigma = \alpha + (j + \chi) \int d\mu f^s / 2$ を得る。しかしながら、物質からの emissivity を超えて自由伝搬ニュートリノに変換されることはないので、 $\Sigma \leq j$ であり、また自由伝搬ニュートリノが直接物質に捕らわれたニュートリノに変換されることがないと考えると $\Sigma \geq 0$ である。こうした仮定から、(4.190) を得る。

また、(4.185) は流体静止系ではなく慣性系で計算する。慣性系での量には $\hat{\cdot}$ をつけて表すことにすると、解くべき方程式はポテンシャル

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{2} \int d\hat{\mu} \hat{f}^s \hat{\mu} \quad (4.194)$$

を用いて

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \int d\hat{\mu} \{ -(\hat{j} + \hat{\chi}) \hat{f}^s + \hat{\Sigma} \} \quad (4.195)$$

となる。これは以下のように示される。もともとの (4.185) は (4.192) と同様の仮定から

$$\mathcal{L}(f^s) = -(j + \chi) f^s + \Sigma + \epsilon^2 \left(\int d\mu' f^{s'} - f^{s'} \int d\mu' R \right) \quad (4.196)$$

と書ける。この左辺は (4.186) のように流体静止系では煩雑な形なので、これを Lorentz 変換により慣性系に移す。慣性系では散乱項の計算が非常に複雑になるが、散乱が重要になるような状況では自由伝搬ニュートリノの分布関数は小さな値を取るなので、これは無視して構わない。さらに、簡単のため背景流体が静的であると仮定すると

$$\frac{\partial \hat{f}^s}{\partial \hat{t}} + \hat{\mu} \frac{\partial \hat{f}^s}{\partial r} + \frac{1}{r}(1 - \hat{\mu}^2) \frac{\partial \hat{f}^s}{\partial \hat{\mu}} = -(\hat{j} + \hat{\chi}) \hat{f}^s + \hat{\Sigma} \quad (4.197)$$

を得る。さらに、ニュートリノのフラックスが定常状態になるのにかかるタイムスケールが系の力学的なタイムスケールよりずっと短いと仮定すると、この方程式の時間微分項は無視することができ、さらに角度方向について積分すれば (4.195) を得る。

ここで、 f^t が関わる項 Σ などを慣性系で記述するには、

$$\frac{1}{2} \int \hat{\epsilon}^2 d\hat{\epsilon} d\hat{\mu} \{ -(\hat{j} + \hat{\chi}) \hat{f}^s + \hat{\Sigma} \} = \frac{1}{2} \int \epsilon^2 d\epsilon d\mu \{ -(j + \chi) f^s + \Sigma \} \quad (4.198)$$

を用いる。また、拡散源項には $\int d\mu f^s$ が含まれているので、次の時間ステップの拡散源項を求めるには前の時間ステップの結果を用いる。このとき、慣性系と流体静止系間の Lorentz 変換を考えると

$$\frac{1}{2} \int \epsilon^2 d\epsilon d\mu f^s = \gamma \int \hat{\epsilon}^2 d\hat{\epsilon} \left(\frac{1}{2} \int d\hat{\mu} \hat{f}^s - v \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (4.199)$$

という関係が成り立つが、(4.195) で求まるのは \hat{f}^s でなく ψ なので、それを使って $\int d\hat{\mu} \hat{f}^s / 2$ を計算するために

$$\frac{1}{2} \int d\hat{\mu} \hat{f}^s = \frac{2 \frac{\partial \psi}{\partial r}(\epsilon)}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R_\nu(\epsilon)}{\max\{r, R_\nu(\epsilon)\}} \right)^2}} \quad (4.200)$$

という近似を用いる。ここで、 $R_\nu(\epsilon)$ はエネルギー ϵ のニュートリノにとってのニュートリノ球の半径である。ただし、Liebendörfer et al. (2009) の実装では以上の Lorentz 変換は無視している。

また、(4.189) は f^t に関する式だが、実際にはエネルギー依存性を簡略化して次のように計算する。いま、(4.189) は Euler 的な描像で書くと、連続の式を用いて

$$\frac{\partial f^t}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v f^t) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) \frac{1}{3\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\epsilon^3 f^t) = j - (j + \chi) f^t - \Sigma \quad (4.201)$$

となる。ここで、捕らわれたニュートリノは背景流体と平衡状態にあると考えると、分布関数は熱平衡分布で書ける。この場合、二つの量

$$Y^t = 4\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\epsilon \epsilon^2 f^t \quad (4.202)$$

$$Z^t = 4\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\epsilon \epsilon^3 f^t \quad (4.203)$$

でニュートリノの分布を特徴づけることができ、これらの発展方程式は式 (4.201) のエネルギーに関するモーメントを取って

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y^t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v \rho Y^t) = 4\pi m_u \int d\epsilon \epsilon^2 \{ j - (j + \chi) f^t - \Sigma \} \quad (4.204)$$

および

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z^t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v \rho Z^t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) \frac{\rho Z^t}{3} = 4\pi m_u \int d\epsilon \epsilon^2 \{j - (j + \chi) f^t - \Sigma\} \quad (4.205)$$

となる。捕らわれたニュートリノについては、分布関数の時間発展を直接計算するのではなく、この Y^t と Z^t の時間発展を計算するのである。ここで、実際の計算の上ではオペレータースプリッティング法を用いる。すなわち、時間ステップの半分は右辺の衝突項による変化を

$$\frac{\partial f^t}{\partial t} = j - (j + \chi) f^t - \Sigma \quad (4.206)$$

を用いて

$$\frac{\partial Y^t}{\partial t} = 4\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\epsilon \epsilon^2 \frac{\partial f^t}{\partial t} \quad (4.207)$$

$$\frac{\partial Z_l^t}{\partial t} = 4\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\epsilon \epsilon^3 \frac{\partial f_l^t}{\partial t} \quad (4.208)$$

と計算し、もう半分は移流による時間変化

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y^t) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v \rho Y^t) = 0 \quad (4.209)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z^t)^{3/4} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\{r^2 v (\rho Z^t)^{3/4}\} = 0 \quad (4.210)$$

を計算する。ただし、 Z^t に関する式は保存形に書き換えた。

流体とニュートリノの相互作用は以上のオペレータースプリッティング法の前半部分で取り入れる。具体的な取り込み方は、流体との相互作用率 $s_l = j_l - (j_l + \chi_l)(f_l^t + f_l^s)$ を考えれば得られる。ただし、ここではニュートリノのフレーバーを表す添字 $l = \nu_e, \bar{\nu}_e$ を復活させる。いま、ニュートリノとの相互作用による電子存在比 Y_e と内部エネルギー e の変化は

$$\frac{\partial Y_e}{\partial t} = -2\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\mu d\epsilon \epsilon^2 (s_{\nu_e} - s_{\bar{\nu}_e}) \quad (4.211)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -2\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\mu d\epsilon \epsilon^3 (s_{\nu_e} + s_{\bar{\nu}_e}) \quad (4.212)$$

であるが、この μ 積分を施したのものとして s_l を定義しなおすと、式 (4.206) も用いて

$$s_l = \frac{\partial f_l^t}{\partial t} + \Sigma_l - (j_l + \chi_l) \frac{1}{2} \int d\mu f_l^s \quad (4.213)$$

$$\frac{\partial Y_e}{\partial t} = -4\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\epsilon \epsilon^2 (s_{\nu_e} - s_{\bar{\nu}_e}) \quad (4.214)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -4\pi \frac{m_u}{\rho} \int d\epsilon \epsilon^3 (s_{\nu_e} + s_{\bar{\nu}_e}) \quad (4.215)$$

となる。ただし、 f_l^t の時間発展は直接は追わないので、 Σ と $\partial f_l^t / \partial t$ は Y_l^t 、 Z_l^t 、 $\partial\psi/\partial r$ から計算する。さらに、以上のように Y_e と e はニュートリノ分布関数の時間発展から計算されるが、ニュートリノの発展に関わる j 、 χ は Y_e と e に依存するので、実際には計算が収束するまで反復させる。

以上の手順をまとめると、ある時間ステップでの物理量が求まったらそれを元に次の時間ステップでの $\partial\psi/\partial r$ を (4.195) を用いて決める。この量を用いると (4.200) を用いて (4.199) を計算できる。ただし、Liebendörfer et al. (2009) では (4.200) をそのまま用いる。さらに Y^t と Z^t から前

の時間ステップでの f^t がわかるので、それらの量を元に新しい時間ステップでの拡散源項 Σ と f^t (すなわち $\partial f^t / \partial t$) を (4.190)、(4.206) を連立させて求める。ここで得た $\partial \psi / \partial r$ 、 Σ 、 $\partial f^t / \partial t$ から (4.214)、(4.215) によって Y_e と e を計算する。この結果を用いて j 、 χ の値をアップデートし、(4.195) から $\partial \psi / \partial r$ を求め直し、同様の手順を収束するまで反復させる。収束したら Y_i^t 、 Z_i^t 、流体の速度 v を式 (4.207)、(4.208) および

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho Z_i^t}{3m_u} \right) \quad (4.216)$$

によってオペレーターをスプリットさせる中間タイムステップでのものに発展させる。その後、残りのタイムステップでの移流による時間発展を通常の流体シミュレーションの解法によって進めれば、新しいタイムステップでの変数のセットを得る。これを繰り返して時間発展をシミュレートするのである。

球対称モデルについてこの手法で実際にニュートリノ輸送を計算し、球対称 Boltzmann 方程式を直接解いたものとの比較が Liebendörfer et al. (2009) に載っている。これによると、ニュートリノ光度はニュートリノバーストより後は約 5 – 10% 程度小さくなるが、大まかには同様な光度変化を示す。また、 ~ 100 km より外側での電子存在比は 10 – 20% 程度ずれるが、それより内側の拡散極限をとれる領域では殆どずれない。衝撃波半径はバウンス後収縮に転じるあたりでは最大 8% 程度大きくなるが、それよりあとの定在衝撃波の段階では 3% 程度小さくなる。冷却率と加熱率は、場所によっては 30% 程度変わることもある。また、この IDSA は日本のグループによる超新星爆発シミュレーションでよく使われている。Suwa et al. (2010) では Newtonian 極限重力、Lattimer & Swesty の状態方程式、RbR 法 IDSA による二次元シミュレーションで Nomoto and Hashimoto (1988) の $13 M_\odot$ モデルが爆発することを主張し、Takiwaki et al. (2014) では同様の設定で Woosley et al. (2002) の $11.2 M_\odot$ モデルが爆発することを主張した。さらに、Takiwaki et al. (2012, 2014) では同様のモデル (親星は $11.2 M_\odot$) による三次元シミュレーションで爆発することが報告された。

4.3.7 直接解法 (S_N 法)

ここまで、Boltzmann 方程式を近似する手法と、それを用いた超新星シミュレーションの結果を述べてきた。そこで見たように、近似手法や入力物理などのモデルの違いによってシミュレーション結果、特に爆発するかしないかが変わってしまっており、超新星シミュレーションに関する大きな問題の一つになっている。これは、エネルギーや圧力が少し変わるだけで爆発するかが変わってしまうということが理由の一つである。しかしながら、モデルの違いの中でも特にニュートリノ輸送の手法に着目すると、単純に近似手法同士を比較するだけでは近似同士の相対的な違いしかわからず、どれが一番 Boltzmann 方程式の解に近い値を導くかを知ることは難しい。そこで、計算コストがある程度かかることには目をつぶり、離散化以外の近似なしの Boltzmann 方程式を解く必要がある。Boltzmann 方程式を直接離散化して解く手法を直接解法、または S_N 法と呼ぶ。

ここでは、Sumiyoshi and Yamada (2012) に従って Boltzmann 方程式の直接解法を考える。Boltzmann 方程式は、経路長 s を用いれば

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} = \left[\frac{\delta f}{\delta t} \right]_{\text{col}} \quad (4.217)$$

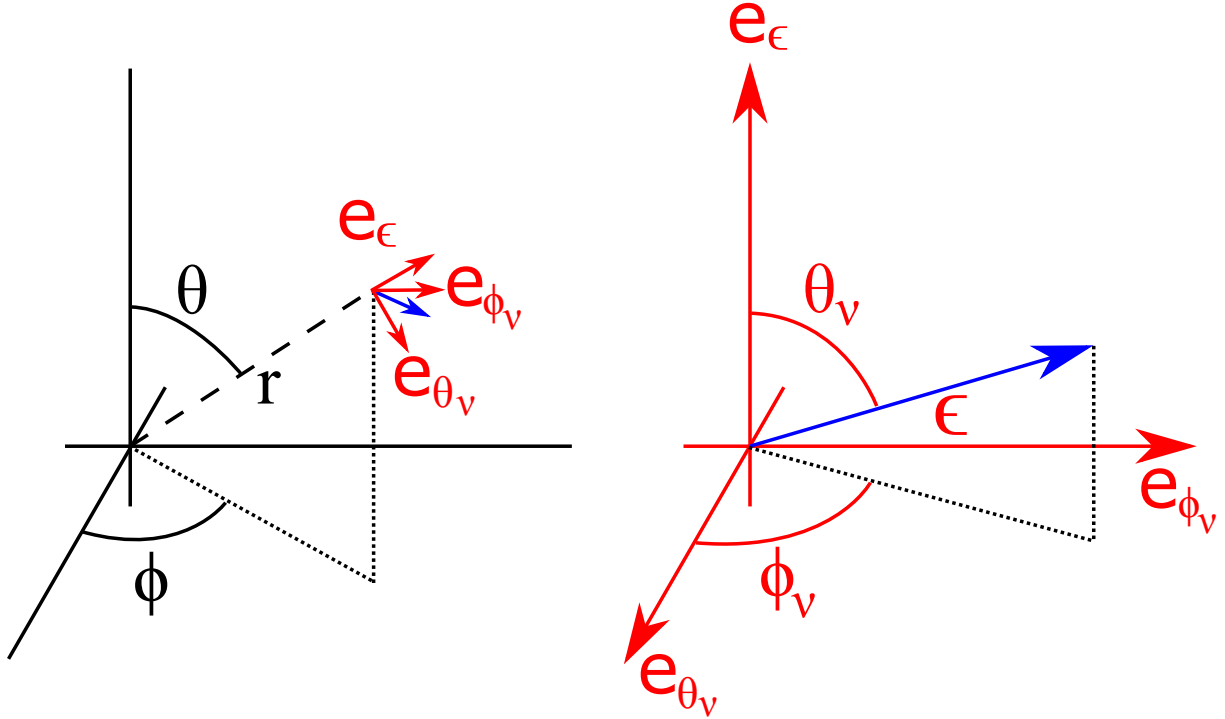


図 4.1: ニュートリノの分布関数を記述するための座標の取り方。配位空間、運動量空間ともに球座標をとる。左図が配位空間での座標を表し、青矢印は伝搬するニュートリノを表す。青矢印の根本が考える配位空間上の点 (r, θ, ϕ) であり、そこで運動量空間の基底 $e_\epsilon, e_{\theta_\nu}, e_{\phi_\nu}$ を張る。右図は運動量空間での座標を表し、伝搬するニュートリノのエネルギーを ϵ 、方向を e_ϵ から測った角度を θ_ν 、 e_{θ_ν} - e_{ϕ_ν} 平面に射影して e_{θ_ν} から測った角度を ϕ_ν とする。

と書ける。今、配位空間座標を記述するのに球座標 (r, θ, ϕ) を用いることとする。また、運動量空間座標についても球座標をとり、エネルギーの大きさ ϵ 、配位空間の動径方向から測った角度 θ_ν 、 ϕ_ν を用いて表す。詳しくは図 4.1 を見よ。式 (4.217) を流体静止系ではなく慣性系 (上付き添字に in をつけて表す) で書き下すと、速度依存項やエネルギー微分の項はなくなり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial t} + \cos \theta_\nu \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial r} + \frac{\sin \theta_\nu \cos \phi_\nu}{r} \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta_\nu \sin \phi_\nu}{r \sin \theta} \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial \phi} \\ + \frac{\sin^2 \theta_\nu}{r} \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial \cos \theta_\nu} - \frac{\sin \theta_\nu \sin \phi_\nu \cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial \phi_\nu} = \left[\frac{\delta f^{\text{in}}}{\delta t} \right]_{\text{col}} \end{aligned} \quad (4.218)$$

となる。ここで、 $\mu = \cos \theta$ および $\mu_\nu = \cos \theta_\nu$ とし、さらに方程式を保存形で書けば

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial t} + \frac{\mu_\nu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f^{\text{in}}) + \frac{\sqrt{1 - \mu_\nu^2} \cos \phi_\nu}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f^{\text{in}}) \\ + \frac{\sqrt{1 - \mu_\nu^2} \sin \phi_\nu}{r \sin \theta} \frac{\partial f^{\text{in}}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu_\nu} \{(1 - \mu_\nu^2) f^{\text{in}}\} \\ - \frac{\sqrt{1 - \mu_\nu^2} \cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi_\nu} (\sin \phi_\nu f^{\text{in}}) = \left[\frac{\delta f^{\text{in}}}{\delta t} \right]_{\text{col}} \end{aligned} \quad (4.219)$$

となる。衝突項は次節で議論するが、ニュートリノ以外の物質の密度にも依存し、前述のように非常に広範囲の値をとる。従って方程式は数値的に硬いものとなり、陰的に離散化する必要がある。離散化した大規模連立方程式を双共役勾配安定化法 (Barrett et al. (1994), biconjugate gradient stabilized method, BiCGSTAB) を用いて行列反転することにより、Boltzmann 方程式を時間発

展させる。また、Sumiyoshi and Yamada (2012) では右辺の衝突項は流体静止系で求めたもので近似している。

4.3.8 衝突項の取扱い

さらに、衝突項を考える。基本となる式 (4.217) の衝突項を Sumiyoshi and Yamada (2012) に従って考えるが、モーメント法の場合の衝突項は適切な変換を施せば求まる。以下では流体静止系での衝突項を考えるが、慣性系で考える場合はここで求める衝突項は適切に Lorentz 変換する必要がある。時間ステップは非常に短く取るので、以下に述べるように配位空間点を固定した運動量空間上の点同士のカップリングを考えるだけでよく、隣り合った配位空間点からの影響を考える必要はない。また、一般相対論的流体方程式 (4.17)、(4.18) および電子数密度の式、または Newtonian 極限での流体方程式 (4.32)、(4.33)、(4.34) の右辺にはこの衝突項から得られる運動量、エネルギー、電子数変化の項を足す必要がある。

以下では、相対論を考えない Newtonian 極限をとる。まず、 β 反応 (4.116)、(4.117)、(4.118) については

$$\left[\frac{\delta f^{\text{in}}}{\delta t} \right]_{\text{col,emis-abs}} = R_{\text{emis}} \{1 - f(\epsilon, \Omega)\} - R_{\text{abs}}(\epsilon, \Omega) f(\epsilon, \Omega) \quad (4.220)$$

となる。 R_{emis} と R_{abs} は反応カーネルと呼び、エネルギー ϵ 、運動量の方向 Ω についての反応率を表す。 $1 - f(\epsilon, \Omega)$ は Pauli ブロッキングの効果である。反応カーネルの計算は以下に譲る。

また、散乱反応 (4.119)、(4.120) については

$$\left[\frac{\delta f^{\text{in}}}{\delta t} \right]_{\text{col,scat}} = - \int \frac{\epsilon'^2 d\epsilon'}{(2\pi)^3} \int d\Omega' R_{\text{scat}}^{\text{out}}(\epsilon, \Omega; \epsilon', \Omega') f(\epsilon, \Omega) \{1 - f(\epsilon', \Omega')\} \quad (4.221)$$

$$+ \int \frac{\epsilon'^2 d\epsilon'}{(2\pi)^3} \int d\Omega' R_{\text{scat}}^{\text{in}}(\epsilon', \Omega'; \epsilon, \Omega) f(\epsilon', \Omega') \{1 - f(\epsilon, \Omega)\} \quad (4.222)$$

となる。原子核や核子は質量が非常に大きいので、ニュートリノを散乱したときの反跳は無視できる。この場合ニュートリノのエネルギーは変化せず、あとで見るように $R_{\text{scat}}^{\text{out}}(\epsilon, \Omega; \epsilon', \Omega') = R_{\text{scat}}^{\text{in}}(\epsilon', \Omega'; \epsilon, \Omega) = R_{\text{scat}}(\epsilon; \Omega, \Omega') \delta(\epsilon - \epsilon')$ となる。すると、上式は

$$\left[\frac{\delta f^{\text{in}}}{\delta t} \right]_{\text{col,scat}} = - \frac{\epsilon^2}{(2\pi)^3} \int d\Omega' R_{\text{scat}}(\epsilon; \Omega, \Omega') \{f(\epsilon, \Omega) - f(\epsilon, \Omega')\} \quad (4.223)$$

と書ける。一方で、電子の質量は小さいので、ニュートリノを散乱した時の反跳は無視できない。この場合、ニュートリノは散乱によって別のエネルギーを持つようになり、方程式にエネルギー bin の間のカップリングが発生する。この場合は計算の取扱いが難しいので、ここではひとまず考えないこととする。

さらに、対生成対消滅反応 (4.122) と制動放射反応 (4.123) については

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta f^{\text{in}}}{\delta t} \right]_{\text{col,pair}} &= \int \frac{\epsilon'^2 d\epsilon'}{(2\pi)^3} \int d\Omega' R_{\text{pair-emis}}(\epsilon, \Omega; \epsilon', \Omega') \{1 - f(\epsilon, \Omega)\} \{1 - \bar{f}(\epsilon', \Omega')\} \\ &- \int \frac{\epsilon'^2 d\epsilon'}{(2\pi)^3} \int d\Omega' R_{\text{pair-anni}}(\epsilon, \Omega; \epsilon', \Omega') f(\epsilon, \Omega) \bar{f}(\epsilon', \Omega') \end{aligned} \quad (4.224)$$

で与えられる。ただし、 \bar{f} は反粒子の分布関数である。この反応を考えると Boltzmann 方程式が非線形方程式になり、計算が難しくなるので、反粒子の分布関数は一つ前の時間ステップのもの

を使うことにする。これらの反応が重要になる状態は熱平衡に近い状態なので、これはよい近似になる。ただし、この反応のカーネルは非常に複雑なので、以下でもあらわに書くことはしない。

以上の衝突項を全て足しあわせたものが Boltzmann 方程式の右辺となる。さらに具体的に計算するには、反応カーネルを求めていく必要がある。以下では、しばしば用いられる Bruenn (1985) に従って反応カーネルの具体形を計算していく。弱い相互作用による様々な反応の反応率を計算することになるが、いま、超新星のエネルギースケールは W ボゾン、Z ボゾンの質量より非常に小さいので、相互作用はボゾンのプロパゲーターを無視した四点相互作用で近似する。粒子種 $i = \nu, e, e^+, p, n, t, A$ はそれぞれ、ニュートリノ、電子、陽電子、陽子、中性子、核子 (陽子又は中性子)、原子核を表す。また、粒子種 i の四元運動量 p_i はエネルギー E_i と三元運動量 \mathbf{p}_i を用いて $p_i^\mu = (E_i, \mathbf{p}_i)$ と表すこととするが、特にニュートリノの四元運動量として明示する場合はエネルギー ϵ と三元運動量 \mathbf{q} により $q^\mu = (\epsilon, \mathbf{q})$ と表すこととする。いま、

$$r = r(p_i + p_j \rightarrow p'_k + p'_l) \quad (4.225)$$

を単位時間、単位体積あたりの二体反応の反応率とする。ただし、初期状態に関してはスピン平均、終状態に関してはスピン和を取る。つまり、粒子 i (運動量 p_i) と j (運動量 p_j) が反応し、生成された粒子 k と l がそれぞれ運動量空間で p'_k, p'_l を中心とした微小体積 $d^3p'_k, d^3p'_l$ 中で発見される反応の単位体積あたりの反応率は

$$r f_i(p_i) f_j(p_j) (2s_i + 1) (2s_j + 1) \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'_k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'_l}{(2\pi)^3} \quad (4.226)$$

で与えられる。ただし、 $2s_i + 1$ と f_i はそれぞれ粒子種 i のスピン自由度と分布関数である。ニュートリノはスピン $s = 1/2$ のフェルミオンだが、左巻き粒子しか見つからないのでスピン自由度は 1 となることに注意すること。実際にはブロッッキング因子を考える必要があり、その場合は反応率は

$$r f_i(p_i) f_j(p_j) \{1 - f'_k(p'_k)\} \{1 - f'_l(p'_l)\} (2s_i + 1) (2s_j + 1) \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'_k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'_l}{(2\pi)^3} \quad (4.227)$$

となる。いまは超新星爆発を考えており、ニュートリノ以外の物質は局所熱平衡にあるので、ニュートリノ以外の粒子種 i の分布関数は Fermi-Dirac 分布

$$F_i(E_i) = \frac{1}{\exp((E_i - \mu_i)/T) + 1} \quad (4.228)$$

を考えてよい。 μ_i は粒子種 i の化学ポテンシャルである。ただし、 μ_i は静止質量も含むものとする。反応率 r は、反応の不変振幅 $|\mathcal{M}|^2$ によって

$$r = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_i 2E_j 2E'_k 2E'_l} (2\pi)^4 \delta(p_i + p_j - p'_k - p'_l) \quad (4.229)$$

で与えられる。また、正反応と逆反応の反応率は

$$(2s_i + 1) (2s_j + 1) r(p_i + p_j \rightarrow p'_k + p'_l) = (2s'_k + 1) (2s'_l + 1) r(p'_k + p'_l \rightarrow p_i + p_j) \quad (4.230)$$

という関係で結ばれる。

ここで、反応カーネル同士の関係をまず調べておく。電子捕獲反応 (4.116) の放出反応カーネル

R_{emis} はすなわち emissivity $j(\epsilon)$ であり、エネルギー ϵ のニュートリノの放出率として計算される。即ち、

$$\begin{aligned} R_{\text{emis}}(\epsilon, \Omega) &= j(\epsilon) \\ &= \int \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} 2F_p(E_p) \{1 - F_n(E_n)\} 2F_e(E_e) r(p_e + p_p \rightarrow p_n + q) \end{aligned} \quad (4.231)$$

となる。また、吸収反応カーネル R_{abs} はすなわち absorptivity χ であり、エネルギー ϵ のニュートリノの吸収率として計算される。absorptivity の逆数は吸収反応の平均自由行程 $\lambda(\epsilon)$ であり、

$$\begin{aligned} R_{\text{abs}}(\epsilon, \Omega) &= \frac{1}{\lambda(\epsilon)} \\ &= \int \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \{1 - F_p(E_p)\} 2F_n(E_n) \{1 - F_e(E_e)\} r(p_n + q \rightarrow p_e + p_p) \end{aligned} \quad (4.232)$$

となる。ここで、式 (4.230) から emissivity と absorptivity の間には

$$j(\epsilon) = \exp((\mu_p + \mu_e - \mu_n - \epsilon)/T) \frac{1}{\lambda(\epsilon)} \quad (4.233)$$

が成り立つ。 β 平衡が成立しているときは $\mu_p + \mu_e = \epsilon + \mu_n$ となるので、 $j(\epsilon) = 1/\lambda(\epsilon)$ が成立する。陽電子捕獲反応 (4.117) についても同様の式が成り立ち、

$$\begin{aligned} j(\epsilon) &= \exp((\mu_n + \mu_{e^+} - \mu_p - \epsilon)/T) \frac{1}{\lambda(\epsilon)} \\ &= \exp((\mu_n - \mu_e - \mu_p - \epsilon)/T) \frac{1}{\lambda(\epsilon)} \end{aligned} \quad (4.234)$$

となる。原子核への電子捕獲反応 (4.118) の場合は、核種を $A = (A, Z)$ (化学ポテンシャル μ_A)、 $A' = (A, Z + 1)$ (化学ポテンシャル $\mu_{A'}$) と略記することになると

$$j(\epsilon) = \exp((\mu_{A'} + \mu_e - \mu_A - \epsilon)/T) \frac{1}{\lambda(\epsilon)} \quad (4.235)$$

となる。

次に散乱反応 (4.119)、(4.120) の反応カーネルを考える。ひとまず、散乱によってエネルギー ϵ 、伝搬方向 Ω のニュートリノが生じる反応のカーネル $R_{\text{scat}}^{\text{in}}$ と消える反応のカーネル $R_{\text{scat}}^{\text{out}}$ を分けて考える。前者については

$$\begin{aligned} R_{\text{scat}}^{\text{in}}(\epsilon', \Omega'; \epsilon, \Omega) &= \int \frac{d^3 p_{t,A}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_{t,A}}{(2\pi)^3} \{1 - F_{t,A}(E_{t,A})\} 2F_{t,A}(E'_{t,A}) r(p'_{t,A} + q' \rightarrow p_{t,A} + q) \end{aligned} \quad (4.236)$$

であり、後者については

$$\begin{aligned} R_{\text{scat}}^{\text{out}}(\epsilon, \Omega; \epsilon', \Omega') &= \int \frac{d^3 p_{t,A}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_{t,A}}{(2\pi)^3} 2F_{t,A}(E_{t,A}) \{1 - F_{t,A}(E'_{t,A})\} r(p_{t,A} + q \rightarrow p'_{t,A} + q') \end{aligned} \quad (4.237)$$

となる。これらについても、式 (4.230) から

$$R_{\text{scat}}^{\text{in}}(\epsilon', \Omega'; \epsilon, \Omega) = \exp((\epsilon' - \epsilon)/T) R_{\text{scat}}^{\text{out}}(\epsilon, \Omega; \epsilon', \Omega') \quad (4.238)$$

となる。核子や原子核は非常に質量が大きいため散乱において反跳が無視できるので、反応前後でニュートリノのエネルギーは変わらず $\epsilon' = \epsilon$ となる。従って

$$R_{\text{scat}}^{\text{in}}(\epsilon', \Omega'; \epsilon, \Omega) = R_{\text{scat}}^{\text{out}}(\epsilon, \Omega; \epsilon', \Omega') = R_{\text{scat}}(\epsilon; \Omega, \Omega') \delta(\epsilon - \epsilon') \quad (4.239)$$

と書ける。

さらに、各反応カーネルを実際に求めていく。まず電子捕獲反応 (4.116) については、不変振幅 \mathcal{M} は

$$\mathcal{M} = \frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}} \{ \bar{u}_{\text{p}}(p_{\text{p}}) \gamma^{\mu} (g_{\text{V}} - g_{\text{A}} \gamma_5) u_{\text{n}}(p_{\text{n}}) \} \{ \bar{u}_{\text{e}}(p_{\text{e}}) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) u_{\nu_{\text{e}}}(q) \} \quad (4.240)$$

で表される。ただし、 G_{F} は Fermi 結合定数で $g_{\text{V}} = 1$ と $g_{\text{A}} = 1.26$ はそれぞれ核子とレプトンのベクトル結合定数と軸性ベクトル結合定数、 u_i は粒子 i の Dirac スピノル、 γ^{μ} は Dirac 行列で $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ である。この不変振幅から

$$\begin{aligned} r(p_{\text{e}} + p_{\text{p}} \rightarrow p_{\text{n}} + q) &= \frac{G_{\text{F}}^2}{\epsilon E_{\text{e}} E_{\text{p}} E_{\text{n}}} (2\pi)^4 \delta^4(q + p_{\text{n}} - p_{\text{e}} - p_{\text{p}}) \{ (g_{\text{V}} + g_{\text{A}})^2 (p_{\text{p}} \cdot p_{\text{e}}) (p_{\text{n}} \cdot q) \\ &+ (g_{\text{V}} - g_{\text{A}})^2 (p_{\text{n}} \cdot p_{\text{e}}) (p_{\text{p}} \cdot q) - (g_{\text{V}}^2 - g_{\text{A}}^2) m_{\text{n}} m_{\text{p}} (p_{\text{e}} \cdot q) \} \end{aligned} \quad (4.241)$$

となる。ただし m_{n} 、 m_{p} はそれぞれ中性子、陽子の質量である。さらに、absorptivity も計算する。核子の運動量移行を無視して上式のデルタ関数を $\delta(\mathbf{p}_{\text{p}} - \mathbf{p}_{\text{n}}) \delta(\epsilon + E_{\text{n}} - E_{\text{e}} - E_{\text{p}})$ に近似し、さらに $|\mathbf{p}_{\text{n}}| \ll m_{\text{n}}$ 及び $|\mathbf{p}_{\text{p}}| \ll m_{\text{p}}$ とすれば、

$$\frac{1}{\lambda(\epsilon)} = \frac{G_{\text{F}}^2}{\pi} \eta_{\text{np}} (g_{\text{V}}^2 + 3g_{\text{A}}^2) \{ 1 - F_{\text{e}}(\epsilon + Q) \} (\epsilon + Q)^2 \sqrt{1 - \frac{m_{\text{e}}^2}{(\epsilon + Q)^2}} \quad (4.242)$$

と計算できる。ただし $Q = m_{\text{n}} - m_{\text{p}}$ で、 m_{e} は電子質量である。さらに、 η_{np} は

$$\begin{aligned} \eta_{\text{np}} &= \int \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} F_{\text{n}}(E) \{ 1 - F_{\text{p}}(E) \} \\ &= \int \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\exp((E - \mu_{\text{n}})/T) - \exp((E - \mu_{\text{p}})/T)}{\exp((\mu_{\text{p}} - \mu_{\text{n}})/T) - 1} F_{\text{n}}(E) F_{\text{p}}(E) \\ &= \frac{1}{\exp((\mu_{\text{p}} - \mu_{\text{n}})/T) - 1} \int \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} \{ F_{\text{p}}(E) - F_{\text{n}}(E) \} \\ &= \frac{n_{\text{p}} - n_{\text{n}}}{\exp((\mu_{\text{p}}^0 - \mu_{\text{n}}^0)/T) - 1} \end{aligned} \quad (4.243)$$

である。ただし、 $n_{\text{p},\text{n}}$ は陽子、中性子の数密度、 μ_i^0 は粒子種 i の静止質量を含めない化学ポテンシャルで、最後の行では陽子と中性子の質量差を無視する近似をした。emissivity の計算には式 (4.233) を用いればよく、

$$j(\epsilon) = \frac{G_{\text{F}}^2}{\pi} \eta_{\text{pn}} (g_{\text{V}}^2 + 3g_{\text{A}}^2) F_{\text{e}}(\epsilon + Q) (\epsilon + Q)^2 \sqrt{1 - \frac{m_{\text{e}}^2}{(\epsilon + Q)^2}} \quad (4.244)$$

となる。

陽電子捕獲反応 (4.117) については、不変振幅が

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{u}_n(p_n) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) u_p(p_p) \} \{ \bar{v}_e(p_{e^+}) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}(q) \} \quad (4.245)$$

となることから、

$$\frac{1}{\lambda(\epsilon)} = \frac{G_F^2}{\pi} \eta_{pn} (g_V^2 + 3g_A^2) \{ 1 - F_{e^+}(\epsilon - Q) \} (\epsilon - Q)^2 \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{(\epsilon - Q)^2}} \Theta(\epsilon - Q - m_e) \quad (4.246)$$

および

$$j(\epsilon) = \frac{G_F^2}{\pi} \eta_{np} (g_V^2 + 3g_A^2) F_{e^+}(\epsilon - Q) (\epsilon - Q)^2 \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{(\epsilon - Q)^2}} \Theta(\epsilon - Q - m_e) \quad (4.247)$$

となる。ただし $\Theta(x)$ は Heaviside の階段関数。 Θ があることからわかるように、この反応が起こるニュートリノエネルギーには閾値 $Q + m_e$ がある。即ち、陽電子反応で生じる反電子ニュートリノは必ずこれ以上のエネルギーを持ち、逆にこれ以上のエネルギーを持った反電子ニュートリノがないと陽電子はこの反応では生成されない。

原子核への電子捕獲 (4.118) については、不変振幅は

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu \{ \bar{u}_\nu(q) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_e(p_e) \} \quad (4.248)$$

であり、

$$r(p_e + A' \rightarrow \nu_e + A) = \frac{G_F^2}{2} (2\pi)^4 \delta(p_e + p_{A'} - q - p_A) \frac{1}{2J_{A'} + 1} \times \sum_{m_A} \sum_{m_{A'}} \left\{ |J^0|^2 (1 + \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^2 \left(1 - \frac{1}{3} \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{q}} \right) \right\} \quad (4.249)$$

となる。ただし、 $\mathbf{v}_e = \mathbf{p}_e/E_e$ 、 $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/\epsilon$ で荷電核カレント J^μ は

$$J^\mu = \langle A | \hat{J}^\mu | A' \rangle = \langle A | \sum_{j=1}^A \gamma^{0(j)} \gamma^{\mu(j)} (g_V - g_A \gamma_5^{(j)}) \tau_-^{(j)} \exp(i(\mathbf{q} - \mathbf{p}_e) \cdot \mathbf{r}^{(j)}) | A' \rangle \simeq \begin{cases} \langle A | \sum_{j=1}^A g_V \tau_-^{(j)} | A' \rangle, & \mu = 0 \\ -\langle A | \sum_{j=1}^A g_A \sigma^{\mu(j)} \tau_-^{(j)} | A' \rangle, & \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4.250)$$

と表される。ここで、 τ_- はアイソスピン降下演算子、 $\sigma^\mu (\mu = 1, 2, 3)$ は Pauli のスピン演算子、 \mathbf{r} は原子核の重心からみた核子の位置座標であり、添字 (j) は j 番目の核子についての演算子であることを表す。最後の表式は許容遷移に対するものだけを考え、また $(\mathbf{q} - \mathbf{p}_e) \cdot \mathbf{r}^{(j)} \ll 1$ かつそれぞれの核子は非相対論的であると近似した。ここで、4.3.3 節でも同様の議論をしたが、実際の遷移として許容されるのは Gamow-Teller 型の遷移 (演算子 $\sigma^\mu \tau_-$ による遷移) のみで、核子軌道に関して $1f_{7/2} \rightarrow 1f_{5/2}$ という遷移の時に最も遷移確率が大きくなる。ただし、遷移した先の中性子の準位が既に存在している中性子に占められていた場合はこの遷移は起こらない。以上のことを考えると、

$$\frac{1}{2J_{A'} + 1} \sum_{m_A} \sum_{m_{A'}} \mathbf{J}^2 = \frac{N_p N_h}{2J_A + 1} \frac{12}{7} = \frac{2}{7} N_p N_h \quad (4.251)$$

と見積もられる。ただし、 $N_n = A - Z$ として

$$N_p(Z) = \begin{cases} 0, & Z < 20 \\ Z - 20, & 20 \leq Z \leq 28 \\ 8, & 28 < Z \end{cases} \quad (4.252)$$

$$N_h(N_n) = \begin{cases} 6, & N_n < 32(34) \\ 38(40) - N_n, & 32(34) \leq N_n \leq 38(40) \\ 0, & 38(40) < N_n \end{cases} \quad (4.253)$$

はそれぞれ $1f_{7/2}$ 準位にある陽子の数および $1f_{5/2}$ にまだ入ることができる中性子の数である。後者については、 $2p_{1/2}$ 準位が $1f_{5/2}$ 準位の上にあるときの値を括弧なし、下にある時の値を括弧ありで表している。以上から、原子核への電子捕獲反応によるニュートリノの emissivity は

$$j(\epsilon) = \frac{G_F^2}{\pi^2} n_{A'} g_A^2 \frac{2}{7} N_p(Z) N_h(N_n) F_e(\epsilon + Q') (\epsilon + Q')^2 \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{(\epsilon + Q')^2}} \quad (4.254)$$

となる。ただし、

$$Q' = M_{A'} - M_A + \Delta \simeq \mu_n - \mu_p + \Delta \quad (4.255)$$

で、 M_A は原子核 A の質量、 Δ は中性子の基底状態に対する $1f_{5/2}$ 準位のエネルギーで約 3 MeV である。さらに absorptivity は式 (4.235) から求めることができるが、 $\mu_A - \mu_{A'} = \mu_n - \mu_p$ であるから

$$\frac{1}{\lambda(\epsilon)} = \frac{G_F^2}{\pi^2} n_{A'} \exp((\mu_n - \mu_p - Q')/T) g_A^2 \frac{2}{7} N_p(Z) N_h(N_n) \{1 - F_e(\epsilon + Q')\} (\epsilon + Q')^2 \sqrt{1 - \frac{m_e^2}{(\epsilon + Q')^2}} \quad (4.256)$$

となる。

次に、核子とニュートリノの散乱反応 (4.120) を考える。この場合の不変振幅は

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{u}_t(p'_t) \gamma^\mu (h_V^t - h_A^t \gamma_5) u_t(p_t) \} \{ \bar{u}_\nu(q') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_\nu(q) \} \quad (4.257)$$

である。ただし、 $t = p, n$ であり、 h_V^t, h_A^t はそれぞれ核子 t とニュートリノのベクトル、軸性ベクトル結合定数で、 θ_W は Weinberg 角 $\sin^2 \theta_W = 0.22$ と $g_A = 1.26$ を用いてそれぞれ

$$h_V^p = \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W \quad (4.258)$$

$$h_A^p = \frac{1}{2} g_A \quad (4.259)$$

$$h_V^n = -\frac{1}{2} \quad (4.260)$$

$$h_A^n = -\frac{1}{2} g_A \quad (4.261)$$

と表せる。これを用いると、 r は

$$\begin{aligned} r(p_t + q \rightarrow p'_t + q') &= \frac{G_F^2}{\epsilon \epsilon' E_t E'_t} (2\pi)^4 \delta^4(q + p_t - q' - p'_t) [(h_V^t + h_A^t)^2 (p_t \cdot q) (p'_t \cdot q') \\ &+ (h_V^t - h_A^t)^2 (p'_t \cdot q) (p_t \cdot q') - \{(h_V^t)^2 - (h_A^t)^2\} m_t^2 (q \cdot q')] \end{aligned} \quad (4.262)$$

となる。電子捕獲の時と同様に核子の運動量移行を無視して $\delta^4(q+p_t-q'-p'_t) \simeq \delta(\mathbf{p}_t-\mathbf{p}'_t)\delta(\epsilon-\epsilon')$ と近似し、 $\mathbf{p}_t^2/E_t^2 \ll 1$ を仮定すると、散乱の反応カーネル R_{scat} は

$$\begin{aligned} R_{\text{scat}}(\epsilon; \Omega, \Omega')\delta(\epsilon - \epsilon') \\ = 2\pi G_{\text{F}}\eta_{tt} [(h_{\text{V}}^t)^2 + 3(h_{\text{A}}^t)^2 + \{(h_{\text{V}}^t)^2 - (h_{\text{A}}^t)^2\} \cos \theta] \delta(\epsilon - \epsilon') \end{aligned} \quad (4.263)$$

と計算される。ただし、 θ は二つの方向 Ω と Ω' のなす角で、また

$$\begin{aligned} \eta_{tt} &= \int \frac{2d^3p_t}{(2\pi)^3} F_t(E_t)\{1 - F_t(E_t)\} \\ &= \int \frac{2d^3p_t}{(2\pi)^3} \frac{\exp((E_t - \mu_t)/T)}{\{1 + \exp((E_t - \mu_t)/T)\}^2} \\ &= T \frac{\partial n_t}{\partial \mu_t} \end{aligned} \quad (4.264)$$

である。

原子核との散乱 (4.119) の場合は原子核への電子捕獲と同じように考えられるが、不変振幅はレプトンの運動量変数を $p_e \rightarrow q$ とし、電子の代わりにニュートリノを考えた場合のスピン和平均をとることから 2 をかけて、さらに荷電核カレント J^μ を中性核カレント J_Z^μ に取り替えればよい。従って

$$\begin{aligned} r(\nu_e + A \rightarrow \nu_e + A) &= G_{\text{F}}^2(2\pi)^4 \delta(q + p_A - q' - p'_A) \frac{1}{2J_A + 1} \\ &\quad \times \sum_{m_A} \sum_{m'_A} \left\{ |J_Z^0|^2 (1 + \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}') + \mathbf{J}^2 \left(1 - \frac{1}{3} \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{q}}' \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.265)$$

となる。ここで、中性核カレント J_Z^μ は

$$\begin{aligned} J_Z^\mu &= \langle A | J_Z^\mu | A \rangle \\ &= \langle A | \sum_{j=1}^A \gamma^{\mu(j)} \{ h_{\text{V}}^{t(j)}(s^2) - h_{\text{A}}^{t(j)}(s^2) \gamma_5^{(j)} \} \exp(i(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}^{(j)}) | A \rangle \\ &= \begin{cases} \langle A | \sum_{j=1}^A (C_{\text{V}0} + C_{\text{V}1} \tau_3^{(j)}) | A \rangle \exp(-bs^2) & \mu = 0 \\ \langle A | \sum_{j=1}^A (C_{\text{A}0} + C_{\text{A}1} \tau_3^{(j)}) \sigma^{\mu(j)} | A \rangle \exp(-bs^2) & \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.266)$$

である。ただし最後は (4.250) と同様の近似を行った。また、 $C_{x0} = (h_x^{\text{p}} + h_x^{\text{n}})/2$ 、 $C_{x1} = h_x^{\text{p}} - h_x^{\text{n}}$ ($x = \text{V}, \text{A}$)、 $s^2 = 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')$ で b は原子核の波動関数を表す Gaussian 形状因子 $b = \langle r^2 \rangle / 6 \simeq 4.8 \times 10^{-6} A^{2/3} \text{ MeV}^{-2}$ (Freedman 1974) である。 $\mu = 1, 2, 3$ 成分は (4.259), (4.261) から $C_{\text{A}0} = 0$ であり、二項併せても $\mu = 0$ の場合に比べて無視できるとする近似を行う。すると、散乱カーネルは

$$\begin{aligned} R_{\text{scat}}(\epsilon; \Omega, \Omega')\delta(\epsilon - \epsilon') &= 2\pi G_{\text{F}}^2 n_A A^2 \left(C_{\text{V}0} + \frac{1}{2} \frac{N - Z}{A} C_{\text{V}1} \right)^2 (1 - \cos \theta) \\ &\quad \times \exp(-4b\epsilon^2(1 - \cos \theta))\delta(\epsilon - \epsilon') \end{aligned} \quad (4.267)$$

となる。ただし θ は前述の通り。

以上のように反応カーネルを求め、衝突項を計算する。特に直接解法では、これを陰的に評価し、Boltzmann 方程式全体を解く。ここで載せなかった (4.122) や (4.123) などについては Bruenn

(1985) や Burrows et al. (2006b) などに詳しい。ただし、非線形反応である (4.124) や (4.125)、エネルギー変化を扱わなければならない (4.121) などは計算上取扱いが難しく、現在のシミュレーションではなかなか取り入れられていないのが現状である。

第5章 観測的兆候

ここでは、ニュートリノ加熱メカニズムが実際に働いているとしたら、観測にどのような兆候が現れるかを議論する。このメカニズムは星の奥深くで起こるので、光学観測よりニュートリノや重力波による観測の方がより直接的な情報を取り出せる。それゆえ、ここではニュートリノと重力波に限って議論する。また、この章でも簡単のため $c = G = \hbar = 1$ という単位系をとる。

5.1 ニュートリノ観測

超新星の内部の情報を探る上で、透過力の高いニュートリノを観測することは有用である。この手法に関しては、大マゼラン雲で爆発した SN1987A からのニュートリノを捉えたカミオカンデ II (Hirata et al. 1987) 及び IMB 実験 (Bionta et al. 1987) の結果がその有用性を示している。3.1 節で述べたとおり超新星内部でニュートリノ閉じ込めが起こっていることは、これらの観測から示されたのである。他にも、検出された信号から放出されたニュートリノの全エネルギーや、Fermi-Dirac 分布を仮定した場合の温度を求めることができる。例えば、Spergel et al. (1987) で推定されたエネルギーを、六種類のニュートリノ全てが同じエネルギーを持っているとして換算すれば $\simeq 3.7 \times 10^{53}$ erg となり、また温度は $\simeq 4.2$ MeV と推定された。このとき、SN1987A までの距離は 50 kpc とした。これはここまで説明してきた超新星の標準的な描像と一致する。また、ニュートリノ加熱メカニズムが正しいとすれば、爆発の前にニュートリノが大量に放出されることになる。これを地上のニュートリノ検出器で検出して、望遠鏡でフォローアップ観測ができれば、超新星爆発の特に始めのフェーズに関して重要な観測結果を得ることができるであろう。

IceCube やカミオカンデなどのニュートリノ検出器では、ニュートリノ反応によってエネルギーを得た荷電粒子からの Cherenkov 光を光電子増倍管で検出する。このとき、荷電粒子は電子散乱 (4.121) 及び逆 β 崩壊 (4.117) によってエネルギーを得るが、逆 β 崩壊の断面積は電子散乱の断面積より約 100 倍大きいので、主として逆 β 反応で生じる陽電子を考えればよい。単純には、ニュートリノフラックスと反応断面積、及び検出器の設計からカウントレートがわかり、逆にカウントレートから超新星ニュートリノフラックスを求められる。このニュートリノフラックスをシミュレーションからの結果と比較することでニュートリノ加熱メカニズムなどをテストすることができるが、実際上では超新星から検出器までニュートリノが伝搬してくる効果を考える必要がある。

ニュートリノが伝搬する間には、ニュートリノ振動現象によってニュートリノのフレーバーが変わってしまう。ニュートリノ振動自体はスーパーカミオカンデによる大気ニュートリノの観測によって 1998 年に確認された。ニュートリノ振動は、ニュートリノに質量が存在することを示し、弱い相互作用の固有状態と質量の固有状態が一致しないことで起こると考えられている。まず簡単のため、Fukugita and Yanagida (2003) と同様にして二つのフレーバーのニュートリノ間の振動を考える。

いま、弱い相互作用の固有状態 $|\nu_e\rangle$ 、 $|\nu_\mu\rangle$ および質量の固有状態 $|\nu_1\rangle$ 、 $|\nu_2\rangle$ を考える。固有状態 $|\nu_1\rangle$ および $|\nu_2\rangle$ の質量はそれぞれ m_1 、 m_2 とし、 $m_1 < m_2$ とする。これらの固有状態はそれぞれ

同じ空間の別の基底なので、ユニタリ行列 U を用いて

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (5.1)$$

と書ける。ただし弱い相互作用の固有状態は添字 $\alpha = e, \mu$ で表し、質量の固有状態は添字 $i = 1, 2$ で表した。この 2×2 のユニタリ行列は実数 θ を用いて

$$U \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

と表せる。すなわち、

$$|\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \quad (5.3)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin \theta |\nu_1\rangle + \cos \theta |\nu_2\rangle \quad (5.4)$$

である。いま、ニュートリノの状態 $|\nu(t)\rangle = \nu_e(t)|\nu_e\rangle + \nu_\mu(t)|\nu_\mu\rangle = \nu_1(t)|\nu_1\rangle + \nu_2(t)|\nu_2\rangle$ に関する Schrödinger 方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu(t)\rangle = (H_0 + V) |\nu(t)\rangle \quad (5.5)$$

である。ただし、 H_0 は自由粒子の Hamiltonian で V は相互作用によるポテンシャル。基底状態として弱い相互作用の固有状態を選ぶと

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \left\{ U \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_e & 0 \\ 0 & V_\mu \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

となる。ただし、 V_e は弱い相互作用によって電子ニュートリノが感じるポテンシャルで、 V_μ は μ ニュートリノに対するポテンシャルであり、 E_i は質量固有状態 $|\nu_i\rangle$ ($i = 1, 2$) のエネルギーである。ここで、ニュートリノの質量が十分小さいとすると $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + m_i^2/2p \simeq E + m_i^2/2E$ となる。ただし p はニュートリノの運動量である。この場合、 $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ として Hamiltonian 全体 $H \equiv H_0 + V$ は

$$\begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + V_{\text{NC}} & 0 \\ 0 & E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + V_{\text{NC}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + V_{\text{CC}} & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

となる。ただし $V_e = V_{\text{CC}} + V_{\text{NC}}$ 、 $V_\mu = V_{\text{NC}}$ と分解しており、 V_{CC} は荷電カレントによるポテンシャル、 V_{NC} は中性カレントによるポテンシャルである。

いま、真空中でのニュートリノ振動を考えると、 $V_e = V_\mu = 0$ であるから、

$$\begin{pmatrix} \nu_e'(t) \\ \nu_\mu'(t) \end{pmatrix} = \exp \left(i \left(E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) t \right) \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

と置くと、Schrödinger 方程式は

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e'(t) \\ \nu_\mu'(t) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_e'(t) \\ \nu_\mu'(t) \end{pmatrix}, \quad H = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

となり、この解は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_e'(t) \\ \nu_\mu'(t) \end{pmatrix} &= \exp(-iHt) \begin{pmatrix} \nu_e'(0) \\ \nu_\mu'(0) \end{pmatrix} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\Delta m^2 t}{4E}\right) - i \sin\left(\frac{\Delta m^2 t}{4E}\right) \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \nu_e'(0) \\ \nu_\mu'(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。例えば、 $t = 0$ において電子ニュートリノであったとすると、 $\nu_e'(0) = 1$ 、 $\nu_\mu'(0) = 0$ となるから、一般の時刻においては (5.8) も用いて

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\left(E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E}\right)t\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\Delta m^2 t}{4E} + i \sin\frac{\Delta m^2 t}{4E} \cos 2\theta \\ -i \sin\frac{\Delta m^2 t}{4E} \sin 2\theta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

となり、振動の結果フレーバーが ν_e から ν_μ に変換される確率

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \equiv |\nu_\mu(t)|^2 = \sin^2 \frac{\Delta m^2 t}{4E} \sin^2 2\theta \quad (5.12)$$

および、変換されない確率

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 \frac{\Delta m^2 t}{4E} \sin^2 2\theta \quad (5.13)$$

を得る。すなわち、観測確率は周期的に変動する。ここで、ニュートリノを観測するまでの時間 t はニュートリノが発生した場所から観測点までの距離を光速で割ったものになるので、距離 $4\pi E/\Delta m^2 = 2.48 \text{ m}(E/1 \text{ MeV})(\Delta m^2/1 \text{ eV})^{-1}$ 進むごとにあるフレーバーとして観測される確率が振動するのである。この距離のことを振動長と呼ぶ。

また、物質中でのニュートリノ振動を考える。(5.7)に見られるように、中性カレントによるポテンシャル V_{NC} は $|\nu_e\rangle$ と $|\nu_\mu\rangle$ の両方に同様に寄与するので、(5.8) で $E + (m_1^2 + m_2^2)/4E$ に V_{NC} を加えることになる以外の影響はない。一方で、荷電カレントによるポテンシャル V_{CC} は $|\nu_e\rangle$ にしか影響しないので、二つのフレーバー間の相対位相を変えるのに影響する。いま、荷電カレントが関わる実効的な Lagrangian \mathcal{L}_{CC} は、 ψ_{ν_e} 、 ψ_e をそれぞれ電子ニュートリノ、電子の Dirac スピノルとして

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CC}} &= -\frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_e)(\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_{\nu_e}) \\ &= -\frac{G_{\text{F}}}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\psi_{\nu_e})(\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_e) \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。ただし Fierz 変換を用いた。ここで、ニュートリノにとって電子を相互作用する外部の系と考え物質静止系で期待値を取ると、右巻き電子と左巻き電子が同数存在するとして

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = -\sqrt{2}G_{\text{F}}n_e\bar{\psi}_{\nu_e,L}\gamma_0\psi_{\nu_e,L} \quad (5.15)$$

となる。ただし、 n_e は電子の数密度であり、 $\psi_{\nu_e,L}$ はニュートリノを表すスピノルの左巻き成分である。現在のところ弱い相互作用をするのは左巻きニュートリノだけで右巻きニュートリノは見つかっていないため、ここでも左巻き成分だけを考える。ここから $V_{\text{CC}} = \sqrt{2}G_{\text{F}}n_e$ を得る。これを用いると先ほど議論した真空中のニュートリノ振動の諸式は変更される。特に Hamiltonian H

を対角化するユニタリ行列が変化し、

$$U_m \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \quad \text{w/} \quad \tan 2\theta_m \equiv \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta - 2\sqrt{2}G_F n_e E} \quad (5.16)$$

となる。これにより、

$$U_m^\dagger H U_m = \begin{pmatrix} E_{m1} & 0 \\ 0 & E_{m2} \end{pmatrix} \quad \text{w/} \quad E_{m1,2} \equiv E + \frac{m_{m1,2}^2}{2E} + V_{\text{NC}} \quad (5.17)$$

ただし、添字の 1, 2 はそれぞれ複号の $-$, $+$ に対応させて

$$m_{m1,2}^2 \equiv \left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \sqrt{2}G_F n_e E \mp \frac{1}{2}\Delta m_m^2 \right) \quad (5.18)$$

であり、また

$$\Delta m_m^2 \equiv \sqrt{(2\sqrt{2}G_F n_e E - \Delta m^2 \cos 2\theta)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2} \quad (5.19)$$

である。この場合、弱い相互作用の固有状態とエネルギー固有状態との混合角が物質の密度によって変わる。特に、 $\theta_m = \pi/4$ となる

$$n_e = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E} \quad (5.20)$$

という状況を共鳴という。質量密度にすると

$$\rho = 1.3 \times 10^7 \text{ g/cm}^3 \left(\frac{Y_e}{0.5} \right)^{-1} \left(\frac{\Delta m^2}{1 \text{ eV}^2} \right) \left(\frac{E}{1 \text{ MeV}} \right)^{-1} \cos 2\theta \quad (5.21)$$

となる。超新星のニュートリノ球の密度は $\sim 10^{11} \text{ g/cm}^3$ なので、ニュートリノは原始中性子星から放出され超新星から脱出するまでの間にこの共鳴点を通ることがわかる。

エネルギー固有状態の時間発展を調べると

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = U_m \begin{pmatrix} \nu_{m1}(t) \\ \nu_{m2}(t) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

であるから、Schrödinger 方程式は

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_{m1}(t) \\ \nu_{m2}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_{m1} & -i\dot{\theta}_m \\ i\dot{\theta}_m & E_{m2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{m1}(t) \\ \nu_{m2}(t) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{E_{m1} + E_{m2}}{2} + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m_m^2}{4E} & -i\dot{\theta}_m \\ i\dot{\theta}_m & \frac{\Delta m_m^2}{4E} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \nu_{m1}(t) \\ \nu_{m2}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる。ここで、もし非対角成分が対角成分より十分小さければエネルギー固有状態は混ざり合わずに時間発展し、フレーバーの振動は真空中と同じように記述されるが、そうでない場合はさらにエネルギー固有状態同士の間での遷移も起こるようになる。エネルギー固有状態が変化しないということを断熱的であるというが、この断熱条件は共鳴点で $\Delta m_m^2/4E \gg |\dot{\theta}_m|$ であり、

$$\gamma \equiv \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta} \frac{n_e}{dn_e/dr} \gg 1 \quad (5.24)$$

とも書ける。断熱的でない場合は、 $\exp(-\pi\gamma/2)$ の確率でエネルギー固有状態間の遷移が起こる。

ここまでは簡単のためニュートリノのフレーバーを二つとしてきたが、以下では標準的に信じられている三世代の場合を考える。荷電カレントによるポテンシャル $\sqrt{2}G_{\text{F}}n_e$ も考えると、フレーバーの時間発展の方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \nu_e' \\ \nu_\mu' \\ \nu_\tau' \end{pmatrix} = \left(U_{\text{MNS}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta E_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta E_{31} \end{pmatrix} U_{\text{MNS}}^\dagger + \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_{\text{F}}n_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \nu_e' \\ \nu_\mu' \\ \nu_\tau' \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

となる。ただし、

$$\Delta E_{ij} = \frac{m_i^2 - m_j^2}{2E} \quad (5.26)$$

であり、式 (5.8) のように全てのニュートリノに共通する位相因子を取り込んだ波動関数 ν_e' 、 ν_μ' 、 ν_τ' を用いた。 U_{MNS} は MNS(牧・中川・坂田) 行列であり (Maki et al. 1962)、

$$U_{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & e^{-i\phi}\sin\theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -e^{i\phi}\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

と三つの混合角 θ_{12} 、 θ_{13} 、 θ_{23} で表される。 ϕ は CP 対称性の破れを表すパラメータであるが、0 として扱われることが多い。

ここで扱ったいくつかのパラメータは実験的に決められたものもあるが、すべてわかっているわけではない。特に、質量の階層性が $m_1 < m_2 < m_3$ なのか、 $m_3 < m_1 < m_2$ なのかはまだ不明である。前者を質量順階層、後者を質量逆階層という。もし順階層であれば、 $\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2 > 0$ かつ $\Delta m_{32}^2 = m_3^2 - m_2^2 > 0$ なので、式 (5.20) と同様に共鳴が起こる密度を考えるとそれは正となる。また、 $\Delta m_{21}^2 = 7.6 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 < |\Delta m_{23}^2| = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ (Nakamura and Particle Data Group 2010) であるから、質量固有状態 ν_2 と ν_3 の間の共鳴は ν_1 と ν_2 の間の共鳴よりも高密度側で起こる。一方で、質量逆階層の場合は ν_2 と ν_3 の間の共鳴が起こる密度は式 (5.20) では負になってしまうため、共鳴が起こらない。ただし、ここまでの議論は正粒子の場合であり、反粒子を考える場合にはポテンシャルの符号を変える必要がある。すなわち、質量逆階層では $\Delta m_{12}^2 > 0$ であることは順階層と変わらないので正粒子の ν_1 と ν_2 の間で共鳴振動が起こるが、 $\Delta m_{23}^2 < 0$ となるので反粒子の間での振動に共鳴が起こる。ここで重要なのはエネルギー固有値がより近い $\bar{\nu}_1$ と $\bar{\nu}_3$ との間の振動であり、共鳴が起こると全ての反電子ニュートリノは $\bar{\nu}_3$ に変化する。一方、質量順階層の場合は反電子ニュートリノのうち $\cos^2\theta_{12} \simeq 0.70$ の割合は変換されずに残る。

結局、検出器で観測されるニュートリノはほとんどが反電子ニュートリノであり、質量逆階層の場合はそれはすべて反 μ 、 τ ニュートリノが変換されたもので、質量順階層の場合はそれは超新星で作られた反電子ニュートリノ 70%、反 μ 、 τ ニュートリノ 30% の混合物である。

超新星ニュートリノは原始中性子星で作られたものが超新星物質を通り抜けて伝搬し、最終的に地上で検出されることになるが、この過程の多くは球対称的である。すなわち、重力崩壊が始まってからバウンス衝撃波が停滞するまでは球対称を仮定した計算でも十分な精度があるし、爆発後に原始中性子星がニュートリノを放出しつつ冷却していく状態も球対称計算で調べられる。このことを利用して、衝撃波停滞までと爆発後のそれぞれについての球対称ニュートリノ放出計算をつなげることで超新星ニュートリノを推測する研究もなされている (Nakazato et al. 2013)。

その一方で、最新の三次元シミュレーションから超新星ニュートリノを予測しようという研究もある (Tamborra et al. 2013, 2014)。ここで使っているシミュレーションはニュートリノ輸送を

可変 Eddington 因子法かつ RbR+近似で扱ったものだが、爆発には至らなかった。しかしながら、親星モデルに応じて対流不安定性や SASI が発生することはわかっており、そのような流体不安定性が放出される超新星ニュートリノにどのような影響を及ぼすかを調べることはできる。その結果、対流不安定性はニュートリノ光度に明確な痕跡を示さないが、SASI は観測者の方向によっては SASI のタイムスケールを周期とし、比較的大きな振幅でニュートリノ光度を振動させる可能性が示唆された。特に、SASI のタイムスケールは数 10 ms であるが、IceCube の検出器の不感時間は $\sim 250 \mu\text{s}$ なので、バックグラウンドに観測を邪魔される可能性を考えても十分振動を分解するだけの時間分解能がある。

以上に示した超新星ニュートリノの観測に関する研究はほんの一部に過ぎず、前者は球対称を仮定している点、後者は爆発しないシミュレーションから信号を予測しようとしている点で妥当性は慎重に考えなければならないが、超新星爆発メカニズムの観測的な証拠を与えるためには、多様な方法で観測量である超新星ニュートリノを調べるのが重要である。

5.2 重力波観測

本節では超新星から放射される重力波について議論するが、まず簡単に重力波そのものについて議論する (e.g. 中村 et al. 1998)。計量 $g_{\mu\nu}$ を Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とそこからの微小なずれ $h_{\mu\nu}$ によって $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ に分解する。Einstein 方程式 (4.4) を $h_{\mu\nu}$ の一次の項までで線形化すると、 $h \equiv h_{\alpha}^{\alpha}$ として

$$-\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}h + \partial_{\alpha}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\alpha}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}(-\partial_{\lambda}\partial^{\lambda}h + \partial^{\beta}\partial^{\alpha}h_{\alpha\beta}) = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (5.28)$$

となり、さらに

$$\psi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (5.29)$$

という新しい変数を用い、かつ Lorentz ゲージ $\partial_{\nu}\psi^{\mu\nu} = 0$ を取ると上式は

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\psi_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (5.30)$$

となる。真空中では

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\psi_{\mu\nu} = 0 \quad (5.31)$$

となるが、これはソース項なしの波動方程式で一般解は $h_{\mu\nu}$ で書けば

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(ik_{\lambda}x^{\lambda}) \quad (5.32)$$

となる。これが重力波であり、 $e_{\mu\nu}$ は重力波の偏極テンソルである。簡単のため、 z 方向に伝搬する重力波を考え、 $k^1 = k^2 = 0$ 、 $k^0 = k^3 = k$ とする。この場合に、Lorentz ゲージ条件は

$$k_{\nu}e_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}k_{\mu}e_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (5.33)$$

であるが、Lorentz ゲージを満たす範囲で、 $e_{00} = e_{0i} = 0$ となるように座標を選べるので、

$$ke_{3\mu} - \frac{1}{2}k_{\mu}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = 0 \quad (5.34)$$

となり、

$$e_{11} + e_{22} = 0, \quad e_{3l} = 0 \quad (5.35)$$

となる。このようなゲージの取り方を TT ゲージ (Transverse-Traceless ゲージ) と呼ぶ。計量の摂動の空間成分を考えると

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

となるが、ここに示した二つの自由度 h_+ 、 h_\times は重力波の二つの偏極を表し、それぞれ重力波のプラスモード、クロスモードと呼ぶ。

いま、超新星から放射される重力波を考える (e.g. 中村 et al. 1998)。(5.30) をグリーン関数

$$\mathcal{G}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (5.37)$$

を用いて解くと

$$\psi_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4 \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (5.38)$$

となる。ただし真空解は自由に加えられるが、ここではそれは無視する。いま、 \mathbf{x}' は重力波源に関する座標であるが、波源 $T_{\mu\nu}$ が 0 でない領域はせいぜい ~ 1000 km 程度であるのに対して超新星から観測者までの距離は短くとも ~ 10 kpc スケールなので、 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'$ と展開できる。ただし $r = |\mathbf{x}|$ で $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ である。さらに、この方程式の TT 成分を取り出すことにすれば

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^{\text{TT}} = h_{ij}^{\text{TT}} &\simeq \frac{4}{r} \int d^3x' T_{ij}^{\text{TT}}(t - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}', \mathbf{x}') \\ &\simeq \frac{4}{r} \int d^3x' T_{ij}^{\text{TT}}(t - r, \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (5.39)$$

となる。また、二行目では $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'$ に関する零次の項までを取った。ここで、

$$\int T_{ij} d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x \rho x_i x_j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{ij} \quad (5.40)$$

と計算できる。 I_{ij} は質量四重極モーメントであるが、TT 成分をとったものは還元質量四重極モーメントと呼び、

$$I_{ij}^{\text{TT}} \equiv \int d^3x \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{x}^2 \right) \quad (5.41)$$

となる。これらにより、重力波の四重極公式

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{ij}^{\text{TT}}(t - r) \quad (5.42)$$

を得る。ただし、最後だけ $c = G = 1$ としていた単位系を戻した。もし超新星が球対称である場合には、四重極モーメントは存在しないので、重力波も発生しないことになる。ニュートリノ加熱メカニズムでは流体不安定性によって球対称性は破れているが、例えば軸対称の時の極軸方向のように系が対称に見える方向には重力波は放出されない。従って、観測者の方向によって重力波の強弱は変わる。また、四重極公式をシミュレーションでの典型的な値からオーダーで評価す

ると

$$\begin{aligned}
h &\sim \frac{2G}{c^4 D} \frac{M_{\text{PNS}} R_{\text{PNS}}^2}{t_{\text{dyn}}^2} \epsilon_{\text{asym}} \\
&\sim 2 \times 10^{-21} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1} \left(\frac{M_{\text{PNS}}}{1.4 M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\text{PNS}}}{10 \text{ km}} \right)^2 \left(\frac{t_{\text{dyn}}}{1 \text{ ms}} \right)^{-2} \left(\frac{\epsilon_{\text{asym}}}{0.1} \right) \quad (5.43)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 ϵ_{asym} は系の非対称性を表すパラメータで上限値をとっており (e.g. Müller et al. 2012a)、 D は観測者から超新星までの距離で、 t_{dyn} は系の力学的タイムスケールである。

さらに、超新星ニュートリノ由来の重力波を考える。いま、Epstein (1978) に従ってニュートリノのエネルギー運動量テンソルを

$$T_{\nu,ij}(t, \mathbf{x}) = n_i n_j \frac{L_{\nu}(t-r)}{r^2} f(\Omega, t-r) = n_i n_j r^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' L_{\nu}(t') f(\Omega, t') \delta(t-t'-r) \quad (5.44)$$

とする。ただし f はニュートリノ放射の非等方性を表すもので、 $\int d\Omega f = 1$ と規格化される。ニュートリノ起源の重力波の TT 成分 $h_{\nu,ij}^{\text{TT}}$ は

$$h_{\nu,ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = 4 \int \frac{T_{\nu,ij}^{\text{TT}}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (5.45)$$

となるが、いま、デルタ関数の性質 $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(x - a_i) / |f'(a_i)|$ (ただし a_i は関数 $f(x)$ の零点) などをいれれば

$$h_{\nu,ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = 4 \int_{-\infty}^{t-r} dt' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{(n_i n_j)^{\text{TT}} L_{\nu}(t') f(\Omega', t')}{t - t' - r \cos \theta'} \quad (5.46)$$

となる。この表式から、ニュートリノ由来の重力波はニュートリノ光度の時間積分を含むため、コアからのニュートリノ放射が終わっても重力波は消えない。これをメモリー効果という。ここで、ニュートリノ輻射の非等方性が重力波に及ぼす影響を

$$\alpha_{ij}(t', \mathbf{x}) \equiv 2 \int_{4\pi} d\Omega' \frac{(n_i n_j)^{\text{TT}} f(\Omega', t')}{\frac{t-t'}{r} - \cos \theta'} \quad (5.47)$$

としてまとめると、

$$h_{\nu,ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \int_0^{t-r} dt' L_{\nu}(t') \alpha_{ij}(t', \mathbf{x}) \quad (5.48)$$

と書ける。こちらについてもシミュレーションの値からオーダー評価すると

$$\begin{aligned}
h_{\nu} &\sim \frac{2G}{c^4 D} L_{\nu} \Delta t \alpha \\
&\sim 5 \times 10^{-21} \left(\frac{D}{10 \text{ kpc}} \right)^{-1} \left(\frac{L_{\nu}}{10^{52} \text{ erg/s}} \right) \left(\frac{\Delta t}{1 \text{ s}} \right) \left(\frac{\alpha}{0.1} \right) \quad (5.49)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 α は式 (5.47) の典型的な値で上限値を取っており (e.g. Tamborra et al. 2014)、 Δt はニュートリノ輻射の継続時間である。

ニュートリノ由来の重力波は式 (5.43) で評価した物質由来の重力波と同程度の大きさなので、超新星からの重力波は物質由来のものとニュートリノ由来のもの両方を考える必要がある。しかしながら、その振る舞いには違いがある。Müller et al. (2004) の図 3 などに典型的な重力波の例が載っているが、物質由来の重力波は非常に細かい振動を示すのに対し、ニュートリノ由来の重力波は比較的ゆっくりとした変動を示す。従って、超新星からの重力波は高周波成分は物質由

来が、低周波成分はニュートリノ由来が支配的である。また、同様に Müller et al. (2004) によると、親星モデルによる重力波の信号は Advanced LIGO (Fritschel 2003) で検出できる可能性がある。また、Müller et al. (2004) では LIGO、Advanced LIGO の観測しか考えていないが、日本の次世代重力波検出器 KAGRA (Somiya 2012) の感度は Advanced LIGO と大きくは変わらず、Müller et al. (2004) で計算された重力波信号は KAGRA でも同様に検出できる可能性がある。

ニュートリノ加熱メカニズムで爆発する場合、流体不安定性が重要であり、対流や SASI に伴う重力波が重要となる。これは、比較的長時間続き、スペクトルも広いものになる。その一方で、3.4.2 節で述べた磁気流体メカニズム、正確にはそれに不可欠な高速回転する星の重力崩壊では、また違った重力波が得られる。回転が無視できる場合にはバウンスは球対称に起こるため重力波は発生しないが、親星が高速回転していると重力崩壊とそれに伴うバウンスは球対称からずれ、それによって重力波が発生するのである。これをバウンス重力波といい、バウンスの瞬間に非常に強い重力波を出してその後減衰していく。この様子は Shibata et al. (2006) などで見られる。また、音響メカニズムで爆発する場合には物質由来の重力波はニュートリノ加熱メカニズムの場合より若干大きくなり、ニュートリノ由来の重力波は 1/5 程度に小さくなるというシミュレーション結果がある (Ott et al. 2006)。特に、物質由来の重力波は Advanced LIGO だけでなく現行の LIGO でも検出できるという。さらに、Ott et al. (2006) で直接調べられているわけではないが、Advanced LIGO と同程度の感度を持つ KAGRA でも検出できると考えられる。

以上のように、重力波はメカニズムによって放出される波形が変わると考えられるので、重力崩壊型超新星爆発のメカニズムを調べる上では非常に有用な手段である。しかしながら、一般相対論の力学に対する影響は TOV monopole 法や共形平坦近似を用いて近似的に扱って重力波は四重極公式 (5.43) などから計算するシミュレーションも多く、信頼できる結果を得るには数値相対論を用いた三次元シミュレーションを行う必要がある。爆発するかどうかを判定できるほど長時間ではないが、Kuroda et al. (2014) ではそのようなシミュレーションがバウンス後 ~ 50 ms 程度まで行われている。そこでは LIGO、Advanced LIGO、そして KAGRA での重力波観測可能性が物質由来のものに限って議論されており、10 kpc 離れた超新星からの重力波は KAGRA と Advanced LIGO で検出できる可能性が示されている。ニュートリノ由来の重力波は Kuroda et al. (2014) がシミュレーションしている時間範囲では振幅が小さいままだが、メモリー効果によりさらに時間が経った後の重力波振幅は大きくなっている可能性もあるため、KAGRA などでも検出できないかどうかはわからない。

第6章 まとめと展望

超新星爆発は大質量星の最期の姿であり、特に II 型及び Ib/c 型として観測される重力崩壊型超新星爆発はその爆発メカニズムが初期のシミュレーションから約 50 年に渡って調べられてきた。中心に鉄コアを作るような大質量星は鉄の光分解や電子捕獲によって重力崩壊を起こし、中心部の密度が非常に大きくなっていく。そこではニュートリノが散乱反応によって閉じ込められ、また中性子化とそれに伴う中性子ドリップによる圧力上昇を抑えることで、最終的にコアは原子核程度の密度になるまで潰れていく。その段階で、強い核力によって崩壊は止められ、亜音速で収縮する内部コアと超音速で落下する外部コアの間にバウンス衝撃波を形成する。このバウンス衝撃波は外側に伝搬するにつれ、降着物質を核子に分解したり、ニュートリノを放出することによってエネルギーを失い、やがて停滞する。バウンス後に中心に形成された原始中性子星は解放された重力エネルギーをニュートリノとして放出し、その一部は衝撃波背面のゲイン領域で吸収され物質を加熱する。このニュートリノ加熱は、さらに対流や SASI などの非球対称流体不安定性によって効率が高くなる。こうして加熱された結果十分なエネルギーを獲得すれば、停滞していた衝撃波は復活し、やがて爆発に至る。これが現在重力崩壊型超新星爆発のメカニズムとしてもっとも有力視されている、ニュートリノ加熱メカニズムである。このメカニズムを確かめるためには流体力学方程式系とニュートリノ輸送 Boltzmann 方程式を組み合わせた一般相対論的な三次元シミュレーションを行うことが必要である。しかしながら、これは非常に計算コストがかかるため、流体に関しては一般相対論的效果を完全に無視する Newtonian 近似、重力のモノポール項だけを置き換えるモノポール近似、空間計量を平坦空間に比例させる共形平坦近似などが使われる。また、核物質の状態方程式はまだ不定性が大きく、現実的なものとして Lattimer & Swesty の状態方程式や Shen の状態方程式などがよく用いられるが、どのような状態方程式が自然をうまく表しているかはよくわかっていない。さらに、Boltzmann 方程式を解くにはモーメント法や IDSA などの近似で解く方法がよく用いられ、またニュートリノ輸送以外の物理が与える影響を系統的に調べるためにニュートリノ輸送を手で与えるライトバルブ近似などが使われる。

超新星爆発シミュレーションは日本、Max Planck 研究所、Princeton 大学、Oak Ridge 国立研究所などといったいくつかのグループによって行われている。各グループでニュートリノ輸送の近似法や状態方程式などの入力物理は違い、結果は必ずしも一致しない。二次元シミュレーションでは、日本は Newtonian 極限重力-LS (Lattimer & Swesty) 状態方程式-IDSA ニュートリノ輸送で爆発し (Takiwaki et al. 2014)、Max Planck 研究所は共形平坦近似-LS 状態方程式-可変 Eddington 因子法ニュートリノ輸送で爆発 (Müller et al. 2012b)、Princeton 大学は Newtonian 極限重力-Shen 状態方程式-マルチグループ FLD ニュートリノ輸送で爆発しない (Dolence et al. 2014) が音響メカニズムで爆発 (Burrows et al. 2007b)、Oak Ridge 国立研究所は TOV monopole 法重力-LS 状態方程式-マルチグループ FLD ニュートリノ輸送法で爆発している (Bruenn et al. 2013)。このようなグループ間の違いは、親星が同じモデルの場合でも存在する。これは 3.2 節でも述べたように、ニュートリノ加熱メカニズムでは 10^{53} erg のニュートリノエネルギーのうち数%を物質の加熱に用いるため、この数%を解像できる非常に高い精度のシミュレーションが必要であるが、近似法や入力物理の違いによって結果がそれだけずれてしまうからである。そのような状況である以上、

現在いくつも存在している不定性をなるべく少なくしていくことが必要である。状態方程式などの入力物理の不定性は取り除くのに時間がかかり、現在ではどのモデルを考えればよいかは簡単にわかることではないが、近似法は近似前の方程式に立ち返れば確実により現実的な計算に近づくと考えられる。そこで、著者は一般相対論的 Boltzmann 方程式及び流体力学方程式系を解くにあたっての近似を排することを目標にしていく。特に、Boltzmann 方程式は直接解法により、移流に関して離散化以外の近似を取り除く。多次元シミュレーションで使われているニュートリノ輸送はどれも Boltzmann 方程式を直接解くものではなく、比較によってそれぞれの近似法の相対的な傾向は調べられても¹、最も基本的な Boltzmann 方程式の解をどの程度よく再現できるかを調べることは難しい。それゆえ、近似法が結果にどのように影響するかを調べ、決定的な結果を与えるためには Boltzmann 方程式を直接解く必要があるのである。また、単に Boltzmann 方程式の直接解法を目指すだけではなく、一般相対論的 Boltzmann 方程式を考えるのは、一般相対論的効果が与える影響も無視するわけにはいかないからである。一般相対論的効果を大雑把に見積ると、超新星の典型的な長さスケールである中性子星半径 ~ 10 km に対して中性子星質量 $\sim 1.5 M_{\odot}$ の Schwarzschild 半径が ~ 4 km なので、シミュレーション結果の諸量には $\sim 10\%$ 程度の違いが出ると考えられる。前述の通り、この程度の違いでも爆発するかどうかが変わる可能性があるため、一般相対論的効果も考える必要があるのである。

本論文 4.3.7 節では Boltzmann 方程式の直接解法は Newtonian 極限に限って議論したが、現在の最先端としては特殊相対論的 Boltzmann 方程式の直接解法が Nagakura et al. (2014) で開発されている。例えば、モーメント法 (4.3.5 節) については特殊相対論的効果を $\mathcal{O}(v/c)$ の一次の項までで取り入れていたが、特殊相対論的 direct 解法はそのような微小量の一次の展開ではなく、全ての次数を考慮した定式化になっている。これは流体静止系と慣性系の二つの座標系を用意し、その間で実際に Lorentz 変換を行うことによって達成されている。一般相対論的 Boltzmann 方程式を解く計算コードは、この特殊相対論的 Boltzmann コードを基礎として構成する。また、計量を発展させる Einstein 方程式を解くコードは開発されており (Baumgarte and Shapiro 1999, Shibata and Nakamura 1995)、特殊相対論的流体力学方程式系のシミュレーションコードも開発されている (Nagakura et al. 2011) ので、一般相対論的流体力学方程式系もこれらを組み合わせる。さらに開発したコードを組み合わせることで、一般相対論的 Boltzmann-流体シミュレーションを実行していく。Boltzmann 方程式の解を得るのに近似法を使う大きな理由は、計算コストがかかることである。直接解法は多少の計算コストがかかることは許容する代わりに適用した解像度の範囲で信頼できる計算結果を得ることを目的とするが、それでも三次元シミュレーションは現実的ではない。しかしながら、京コンピュータのような巨大スーパーコンピュータを用い、シミュレーションの空間次元を二次元軸対称に限定すれば可能であると考えられる。いま、必要な計算量を見積もる。計算メッシュとしては、半径 5000 km の球を動径方向に $N_r = 256$ 個、角度方向には $N_{\theta} = 64$ 個のメッシュに分割し、また運動量空間についてはエネルギー 300 MeV までの球をエネルギーの大きさについて $N_{\epsilon} = 20$ 個、角度方向については $N_{\theta_{\nu}} = 10$ 個、 $N_{\phi_{\nu}} = 6$ 個に分割する。この場合、電子散乱まで考えると衝突項に関する行列反転は衝突前後の二つの bin のカップリングを考えるので $(N_{\epsilon} \times N_{\theta_{\nu}} \times N_{\phi_{\nu}})^2$ に比例する演算量が必要で、配位空間に関する行列反転には疎行列の反転計算のため $N_r \times N_{\theta}$ に比例する演算量がかかる。すると、時間ステップ一回につき $N_r \times N_{\theta} \times (N_{\epsilon} \times N_{\theta_{\nu}} \times N_{\phi_{\nu}})^2$ に比例する演算量になる。さらに、爆発が起こる典型的なタイムスケールは ~ 1 s であるが、ひとまずバウンス後 0.5 秒間程度計算するには、時間ステップ幅を 5×10^{-7} s とすると 10^6 回程度の計算ステップが必要となる。京コンピュータを 1000 ノード

¹各グループは計算コードを公開していないため、近似法同士の比較も実際には簡単ではない。

使った場合の演算性能は約 100 TFLOPS であるが、並列化しても効率は必ずしも並列数に比例しないことなどを考えると、以上の設定で特殊相対論的 Boltzmann-流体シミュレーションを実行するには約 40 日かかる。一般相対論的な場合は計算量が約 2 倍程度になると考えれば、約 80 日と比較的長時間ではあるが現実的な時間で計算できることになる。アルゴリズム次第で数倍のファクターがかかる可能性なども考えるとこの通りの計算量になるとは限らないが、必要に応じて多少解像度を落とすことで計算可能であると見積もれる。以上の一般相対論的 Boltzmann 方程式直接解法シミュレーションによって、各々の近似法の利点と欠点をきちんと調べ、また二次元の場合に決定的な結果を与えることが、今後の目標である。

謝辞

本論文は、東京大学理学系研究科物理学専攻宇宙理論研究室修士課程二年の原田了が作成しました。指導教員である吉田直紀教授にはご専門ではないのにも拘らず温かく見守っていただいたり、研究の方針の相談に乗っていただいたり等、非常にお世話になりました。大変感謝しております。また、東京大学宇宙理論研究室の須藤靖教授、東京大学ビッグバン宇宙国際研究センターの横山順一教授、茂山俊和准教授には折にふれて教育的で有益なコメントを多く頂いたことをここに感謝いたします。さらに、須藤靖教授に超新星の専門家である山田章一教授、鈴木英之教授を紹介していただいたお陰で、今後の研究の上で非常に重要な機会を得ることができました。非常に感謝しております。早稲田大学高エネルギー天体物理学研究室の山田章一教授には超新星分野の専門家として様々なことをご指導いただいたほか、研究テーマを決めるうえで非常に大きなアドバイスを下さり、さらに今後共同研究者として研究をサポートして下さることなど、手厚い援助を頂きました。ここに、深く感謝いたします。東京理科大学工学部の鈴木英之教授には超新星爆発のニュートリノ関連の様々な状況を教えていただきました。また、本論文は多くの部分に渡って福岡大学理学部の固武慶准教授と鈴木英之教授が共著で書かれた「計算科学による素粒子・原子核・宇宙の融合レクチャーシリーズ第三回 高エネルギー天体物理の基礎」の講義ノートである「重力崩壊型超新星爆発の物理」を参考にさせていただきました。非常にわかりやすい資料を書いていただき、深く感謝しております。沼津高等専門学校に住吉光介氏、高エネルギー加速器研究機構の松古栄夫助教には議論をしていただいたり、計算機環境を整えるサポートをして下さったり等、お世話になりました。また、細川隆助教、千秋元氏をはじめとした東京大学宇宙理論研究室の皆様や岩上わかな氏、高橋和也氏、山本佑氏をはじめとした早稲田大学高エネルギー天体物理学研究室の皆様、理化学研究所長瀧ビッグバン天体研究室の滝脇知也氏には多くの議論をしていただいたり、温かく励ましていただいたりなど、非常にお世話になりました。さらに著者は研究中、東京大学フotonサイエンス・リーディング大学院および副指導教員である山内薫教授の指導と援助を受けました。研究に多様な視点を持ち込めたり、援助のおかげで研究に集中できたり等、大変感謝しております。

最後に、大学院での研究を興味深く聞き、応援して下さった祖父、生活と研究を心身ともに様々な面で支えてくれた家族と最愛の人に、深く感謝します。

参考文献

- S. Akiyama, J. C. Wheeler, D. L. Meier, and I. Lichtenstadt. The Magnetorotational Instability in Core-Collapse Supernova Explosions. *ApJ*, 584:954–970, February 2003. doi: 10.1086/344135.
- W. D. Arnett. A Possible Model of Supernovae: Detonation of ^{12}C . *Ap&SS*, 5:180–212, October 1969. doi: 10.1007/BF00650291.
- R. Arnowitt, S. Deser, and C.-W. Misner. *Gravitation: an Introduction to current research*. Wiley, New York, 1962.
- W. Baade and F. Zwicky. On Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 20: 254–259, May 1934. doi: 10.1073/pnas.20.5.254.
- R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro. Numerical integration of Einstein’s field equations. *Phys. Rev. D*, 59(2):024007, January 1999. doi: 10.1103/PhysRevD.59.024007.
- H. A. Bethe, G. E. Brown, J. Applegate, and J. M. Lattimer. Equation of state in the gravitational collapse of stars. *Nuclear Physics A*, 324:487–533, July 1979. doi: 10.1016/0375-9474(79)90596-7.
- R. M. Bionta, G. Blewitt, C. B. Bratton, D. Casper, and A. Ciocio. Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud. *Physical Review Letters*, 58:1494–1496, April 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.1494.
- J. M. Blondin and A. Mezzacappa. Pulsar spins from an instability in the accretion shock of supernovae. *Nature*, 445:58–60, January 2007. doi: 10.1038/nature05428.
- J. M. Blondin, A. Mezzacappa, and C. DeMarino. Stability of Standing Accretion Shocks, with an Eye toward Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 584:971–980, February 2003. doi: 10.1086/345812.
- S. W. Bruenn. Stellar core collapse - Numerical model and infall epoch. *ApJS*, 58:771–841, August 1985. doi: 10.1086/191056.
- S. W. Bruenn, A. Mezzacappa, W. R. Hix, E. J. Lentz, O. E. Bronson Messer, E. J. Lingerfelt, J. M. Blondin, E. Endeve, P. Marronetti, and K. N. Yakunin. Axisymmetric Ab Initio Core-collapse Supernova Simulations of 12-25 M_{sun} Stars. *ApJ*, 767:L6, April 2013. doi: 10.1088/2041-8205/767/1/L6.

- R. Buras, M. Rampp, H.-T. Janka, and K. Kifonidis. Two-dimensional hydrodynamic core-collapse supernova simulations with spectral neutrino transport. I. Numerical method and results for a $15 M_{\odot}$ star. *A&A*, 447:1049–1092, March 2006. doi: 10.1051/0004-6361:20053783.
- E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler, and F. Hoyle. Synthesis of the Elements in Stars. *Reviews of Modern Physics*, 29:547–650, 1957. doi: 10.1103/RevModPhys.29.547.
- A. Burrows, E. Livne, L. Dessart, C. D. Ott, and J. Murphy. A New Mechanism for Core-Collapse Supernova Explosions. *ApJ*, 640:878–890, April 2006a. doi: 10.1086/500174.
- A. Burrows, S. Reddy, and T. A. Thompson. Neutrino opacities in nuclear matter. *Nuclear Physics A*, 777:356–394, October 2006b. doi: 10.1016/j.nuclphysa.2004.06.012.
- A. Burrows, L. Dessart, C. D. Ott, and E. Livne. Multi-dimensional explorations in supernova theory. *Phys. Rep.*, 442:23–37, April 2007a. doi: 10.1016/j.physrep.2007.02.001.
- A. Burrows, E. Livne, L. Dessart, C. D. Ott, and J. Murphy. Features of the Acoustic Mechanism of Core-Collapse Supernova Explosions. *ApJ*, 655:416–433, January 2007b. doi: 10.1086/509773.
- J. Cernohorsky and S. A. Bludman. Maximum entropy distribution and closure for Bose-Einstein and Fermi-Dirac radiation transport. *ApJ*, 433:250–255, September 1994. doi: 10.1086/174640.
- S. Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases. an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*. Cambridge: University Press, 3rd ed. edition, 1970.
- S. A. Colgate and R. H. White. The Hydrodynamic Behavior of Supernovae Explosions. *ApJ*, 143:626, March 1966. doi: 10.1086/148549.
- S. A. Colgate, W. H. Grasberger, and R. H. White. The Dynamics of Supernova Explosions. *AJ*, 66:280, March 1961. doi: 10.1086/108573.
- S. M. Couch. The Dependence of the Neutrino Mechanism of Core-collapse Supernovae on the Equation of State. *ApJ*, 765:29, March 2013. doi: 10.1088/0004-637X/765/1/29.
- P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, and J. W. T. Hessels. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. *Nature*, 467:1081–1083, October 2010. doi: 10.1038/nature09466.
- R. Di Stefano. The Progenitors of Type Ia Supernovae. I. Are they Supersoft Sources? *ApJ*, 712:728–733, March 2010. doi: 10.1088/0004-637X/712/1/728.
- H. Dimmelmeier, J. Novak, J. A. Font, J. M. Ibáñez, and E. Müller. Combining spectral and shock-capturing methods: A new numerical approach for 3D relativistic core collapse simulations. *Phys. Rev. D*, 71(6):064023, March 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.064023.
- J. C. Dolence, A. Burrows, and W. Zhang. Two-Dimensional Core-Collapse Supernova Models with Multi-Dimensional Transport. *ArXiv e-prints*, March 2014.

- R. Epstein. The generation of gravitational radiation by escaping supernova neutrinos. *ApJ*, 223:1037–1045, August 1978. doi: 10.1086/156337.
- R. I. Epstein and C. J. Pethick. Lepton loss and entropy generation in stellar collapse. *ApJ*, 243:1003–1012, February 1981. doi: 10.1086/158665.
- A. V. Filippenko. Optical observations of Type II supernovae. In S. S. Holt and W. W. Zhang, editors, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 522 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 123–140, June 2000. doi: 10.1063/1.1291705.
- T. Foglizzo. Non-radial instabilities of isothermal Bondi accretion with a shock: Vortical-acoustic cycle vs. post-shock acceleration. *A&A*, 392:353–368, September 2002. doi: 10.1051/0004-6361:20020912.
- T. Foglizzo. A Simple Toy Model of the Advective-Acoustic Instability. I. Perturbative Approach. *ApJ*, 694:820–832, April 2009. doi: 10.1088/0004-637X/694/2/820.
- T. Foglizzo and M. Tagger. Entropic-acoustic instability in shocked accretion flows. *A&A*, 363:174–183, November 2000.
- T. Foglizzo, L. Scheck, and H.-T. Janka. Neutrino-driven Convection versus Advection in Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 652:1436–1450, December 2006. doi: 10.1086/508443.
- Daniel Z. Freedman. Coherent effects of a weak neutral current. *Phys. Rev. D*, 9:1389–1392, Mar 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.9.1389. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.1389>.
- P. Fritschel. Second generation instruments for the Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (LIGO). In M. Cruise and P. Saulson, editors, *Gravitational-Wave Detection*, volume 4856 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pages 282–291, March 2003. doi: 10.1117/12.459090.
- M. Fukugita and T. Yanagida. *Physics of neutrinos and applications to astrophysics*. Springer, 2003.
- S. Furusawa, K. Sumiyoshi, S. Yamada, and H. Suzuki. New Equations of State Based on the Liquid Drop Model of Heavy Nuclei and Quantum Approach to Light Nuclei for Core-collapse Supernova Simulations. *ApJ*, 772:95, August 2013. doi: 10.1088/0004-637X/772/2/95.
- V. N. Gamezo, A. M. Khokhlov, E. S. Oran, A. Y. Chtchelkanova, and R. O. Rosenberg. Thermonuclear Supernovae: Simulations of the Deflagration Stage and Their Implications. *Science*, 299:77–81, January 2003. doi: 10.1126/science.299.5603.77.
- V. N. Gamezo, A. M. Khokhlov, and E. S. Oran. Three-dimensional Delayed-Detonation Model of Type Ia Supernovae. *ApJ*, 623:337–346, April 2005. doi: 10.1086/428767.
- M. González and E. Audit. HERACLES: a new, parallelized, multi-geometry, three dimensional radiation hydrodynamics code. In F. Casoli, T. Contini, J. M. Hameury, and L. Pagani, editors, *SF2A-2005: Semaine de l’Astrophysique Francaise*, page 751, December 2005.

- F. Hanke, B. Müller, A. Wongwathanarat, A. Marek, and H.-T. Janka. SASI Activity in Three-dimensional Neutrino-hydrodynamics Simulations of Supernova Cores. *ApJ*, 770:66, June 2013. doi: 10.1088/0004-637X/770/1/66.
- A. Heger, S. E. Woosley, and H. C. Spruit. Presupernova Evolution of Differentially Rotating Massive Stars Including Magnetic Fields. *ApJ*, 626:350–363, June 2005. doi: 10.1086/429868.
- M. Hempel, T. Fischer, J. Schaffner-Bielich, and M. Liebendörfer. New Equations of State in Simulations of Core-collapse Supernovae. *ApJ*, 748:70, March 2012. doi: 10.1088/0004-637X/748/1/70.
- M. Herant, W. Benz, and S. Colgate. Postcollapse hydrodynamics of SN 1987A - Two-dimensional simulations of the early evolution. *ApJ*, 395:642–653, August 1992. doi: 10.1086/171685.
- K. Hirata, T. Kajita, M. Koshiba, M. Nakahata, and Y. Oyama. Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A. *Physical Review Letters*, 58:1490–1493, April 1987. doi: 10.1103/PhysRevLett.58.1490.
- D. A. Howell. Type Ia supernovae as stellar endpoints and cosmological tools. *Nature Communications*, 2:350, June 2011. doi: 10.1038/ncomms1344.
- I. Iben, Jr. and A. V. Tutukov. Supernovae of type I as end products of the evolution of binaries with components of moderate initial mass (M not greater than about 9 solar masses). *ApJS*, 54:335–372, February 1984. doi: 10.1086/190932.
- J. A. Isenberg. Waveless Approximation Theories of Gravity. *International Journal of Modern Physics D*, 17:265–273, 2008. doi: 10.1142/S0218271808011997.
- W. Iwakami, H. Nagakura, and S. Yamada. Parametric Study of Flow Patterns behind the Standing Accretion Shock Wave for Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 786:118, May 2014. doi: 10.1088/0004-637X/786/2/118.
- H.-T. Janka. Conditions for shock revival by neutrino heating in core-collapse supernovae. *A&A*, 368:527–560, March 2001. doi: 10.1051/0004-6361:20010012.
- H.-T. Janka. Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62:407–451, November 2012. doi: 10.1146/annurev-nucl-102711-094901.
- H.-T. Janka, R. Buras, F. S. Kitaura Joyanes, A. Marek, M. Rampp, and L. Scheck. Neutrino-driven supernovae: An accretion instability in a nuclear physics controlled environment. *Nuclear Physics A*, 758:19–26, July 2005. doi: 10.1016/j.nuclphysa.2005.05.008.
- F. S. Kitaura, H.-T. Janka, and W. Hillebrandt. Explosions of O-Ne-Mg cores, the Crab supernova, and subluminescent type II-P supernovae. *A&A*, 450:345–350, April 2006. doi: 10.1051/0004-6361:20054703.
- K. Kotake, S. Yamada, and K. Sato. Anisotropic Neutrino Radiation in Rotational Core Collapse. *ApJ*, 595:304–316, September 2003. doi: 10.1086/377196.

- K. Kotake, H. Sawai, S. Yamada, and K. Sato. Magnetorotational Effects on Anisotropic Neutrino Emission and Convection in Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 608:391–404, June 2004. doi: 10.1086/392530.
- T. Kuroda, K. Kotake, and T. Takiwaki. Fully General Relativistic Simulations of Core-collapse Supernovae with an Approximate Neutrino Transport. *ApJ*, 755:11, August 2012. doi: 10.1088/0004-637X/755/1/11.
- T. Kuroda, T. Takiwaki, and K. Kotake. Gravitational wave signatures from low-mode spiral instabilities in rapidly rotating supernova cores. *Phys. Rev. D*, 89(4):044011, February 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.89.044011.
- J. M. Lattimer and F. D. Swesty. A generalized equation of state for hot, dense matter. *Nuclear Physics A*, 535:331–376, December 1991. doi: 10.1016/0375-9474(91)90452-C.
- C. D. Levermore. Relating Eddington factors to flux limiters. *J. Quant. Spec. Radiat. Transf.*, 31:149–160, February 1984. doi: 10.1016/0022-4073(84)90112-2.
- C. D. Levermore and G. C. Pomraning. A flux-limited diffusion theory. *ApJ*, 248:321–334, August 1981. doi: 10.1086/159157.
- M. Liebendörfer. A Simple Parameterization of the Consequences of Deleptonization for Simulations of Stellar Core Collapse. *ApJ*, 633:1042–1051, November 2005. doi: 10.1086/466517.
- M. Liebendörfer, A. Mezzacappa, F.-K. Thielemann, O. E. Messer, W. R. Hix, and S. W. Bruenn. Probing the gravitational well: No supernova explosion in spherical symmetry with general relativistic Boltzmann neutrino transport. *Phys. Rev. D*, 63(10):103004, May 2001. doi: 10.1103/PhysRevD.63.103004.
- M. Liebendörfer, S. C. Whitehouse, and T. Fischer. The Isotropic Diffusion Source Approximation for Supernova Neutrino Transport. *ApJ*, 698:1174–1190, June 2009. doi: 10.1088/0004-637X/698/2/1174.
- Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata. Remarks on the Unified Model of Elementary Particles. *Progress of Theoretical Physics*, 28:870–880, November 1962. doi: 10.1143/PTP.28.870.
- A. Marek and H.-T. Janka. Delayed Neutrino-Driven Supernova Explosions Aided by the Standing Accretion-Shock Instability. *ApJ*, 694:664–696, March 2009. doi: 10.1088/0004-637X/694/1/664.
- A. Marek, H. Dimmelmeier, H.-T. Janka, E. Müller, and R. Buras. Exploring the relativistic regime with Newtonian hydrodynamics: an improved effective gravitational potential for supernova simulations. *A&A*, 445:273–289, January 2006. doi: 10.1051/0004-6361:20052840.
- R. W. Mayle. *Physical processes in collapse driven supernova*. PhD thesis, California Univ., Berkeley., 1985.
- D. L. Meier, R. I. Epstein, W. D. Arnett, and D. N. Schramm. Magnetohydrodynamic phenomena in collapsing stellar cores. *ApJ*, 204:869–878, March 1976. doi: 10.1086/154235.

- B. Müller, H.-T. Janka, and H. Dimmellemeier. A New Multi-dimensional General Relativistic Neutrino Hydrodynamic Code for Core-collapse Supernovae. I. Method and Code Tests in Spherical Symmetry. *ApJS*, 189:104–133, July 2010. doi: 10.1088/0067-0049/189/1/104.
- B. Müller, H.-T. Janka, and A. Heger. New Two-dimensional Models of Supernova Explosions by the Neutrino-heating Mechanism: Evidence for Different Instability Regimes in Collapsing Stellar Cores. *ApJ*, 761:72, December 2012a. doi: 10.1088/0004-637X/761/1/72.
- B. Müller, H.-T. Janka, and A. Marek. A New Multi-dimensional General Relativistic Neutrino Hydrodynamics Code for Core-collapse Supernovae. II. Relativistic Explosion Models of Core-collapse Supernovae. *ApJ*, 756:84, September 2012b. doi: 10.1088/0004-637X/756/1/84.
- E. Müller, M. Rampp, R. Buras, H.-T. Janka, and D. H. Shoemaker. Toward Gravitational Wave Signals from Realistic Core-Collapse Supernova Models. *ApJ*, 603:221–230, March 2004. doi: 10.1086/381360.
- J. W. Murphy and A. Burrows. Criteria for Core-Collapse Supernova Explosions by the Neutrino Mechanism. *ApJ*, 688:1159–1175, December 2008. doi: 10.1086/592214.
- J. W. Murphy, C. D. Ott, and A. Burrows. A Model for Gravitational Wave Emission from Neutrino-Driven Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 707:1173–1190, December 2009. doi: 10.1088/0004-637X/707/2/1173.
- J. W. Murphy, J. C. Dolence, and A. Burrows. The Dominance of Neutrino-driven Convection in Core-collapse Supernovae. *ApJ*, 771:52, July 2013. doi: 10.1088/0004-637X/771/1/52.
- H. Nagakura, H. Ito, K. Kiuchi, and S. Yamada. Jet Propagations, Breakouts, and Photospheric Emissions in Collapsing Massive Progenitors of Long-duration Gamma-ray Bursts. *ApJ*, 731:80, April 2011. doi: 10.1088/0004-637X/731/2/80.
- H. Nagakura, K. Sumiyoshi, and S. Yamada. Three-dimensional Boltzmann Hydro Code for Core Collapse in Massive Stars. I. Special Relativistic Treatments. *ApJS*, 214:16, October 2014. doi: 10.1088/0067-0049/214/2/16.
- K. Nakamura and Particle Data Group. Review of Particle Physics. *Journal of Physics G Nuclear Physics*, 37(7):075021, July 2010. doi: 10.1088/0954-3899/37/7A/075021.
- K. Nakazato, K. Sumiyoshi, H. Suzuki, T. Totani, H. Umeda, and S. Yamada. Supernova Neutrino Light Curves and Spectra for Various Progenitor Stars: From Core Collapse to Proto-neutron Star Cooling. *ApJS*, 205:2, March 2013. doi: 10.1088/0067-0049/205/1/2.
- K. Nomoto and M. Hashimoto. Presupernova evolution of massive stars. *Phys. Rep.*, 163:13–36, 1988. doi: 10.1016/0370-1573(88)90032-4.
- K. Nomoto, F.-K. Thielemann, and K. Yokoi. Accreting white dwarf models of Type I supernovae. III - Carbon deflagration supernovae. *ApJ*, 286:644–658, November 1984. doi: 10.1086/162639.

- K. Nomoto, N. Tominaga, H. Umeda, C. Kobayashi, and K. Maeda. Nucleosynthesis yields of core-collapse supernovae and hypernovae, and galactic chemical evolution. *Nuclear Physics A*, 777:424–458, October 2006. doi: 10.1016/j.nuclphysa.2006.05.008.
- E. O’Connor and C. D. Ott. Black Hole Formation in Failing Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 730:70, April 2011. doi: 10.1088/0004-637X/730/2/70.
- C. D. Ott, A. Burrows, L. Dessart, and E. Livne. A New Mechanism for Gravitational-Wave Emission in Core-Collapse Supernovae. *Physical Review Letters*, 96(20):201102, May 2006. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.201102.
- K. Oyamatsu. Nuclear shapes in the inner crust of a neutron star. *Nuclear Physics A*, 561: 431–452, August 1993. doi: 10.1016/0375-9474(93)90020-X.
- R. Pakmor, M. Kromer, F. K. Röpkke, S. A. Sim, A. J. Ruiter, and W. Hillebrandt. Sub-luminous type Ia supernovae from the mergers of equal-mass white dwarfs with mass $\sim 0.9M_{\text{solar}}$. *Nature*, 463:61–64, January 2010. doi: 10.1038/nature08642.
- A. J. T. Poelarends, F. Herwig, N. Langer, and A. Heger. The Supernova Channel of Super-AGB Stars. *ApJ*, 675:614–625, March 2008. doi: 10.1086/520872.
- M. Rampp and H.-T. Janka. Spherically Symmetric Simulation with Boltzmann Neutrino Transport of Core Collapse and Postbounce Evolution of a $15 M_{\text{solar}}$ Star. *ApJ*, 539:L33–L36, August 2000. doi: 10.1086/312837.
- M. Rampp and H.-T. Janka. Radiation hydrodynamics with neutrinos. Variable Eddington factor method for core-collapse supernova simulations. *A&A*, 396:361–392, December 2002. doi: 10.1051/0004-6361:20021398.
- G. B. Rybicki and A. P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. Wiley-VCH, June 1986.
- H. Saio and K. Nomoto. Evolution of a merging pair of C + O white dwarfs to form a single neutron star. *A&A*, 150:L21–L23, September 1985.
- K. Sato. Supernova explosion and neutral currents of weak interaction. *Progress of Theoretical Physics*, 54:1325–1338, November 1975. doi: 10.1143/PTP.54.1325.
- L. Scheck, H.-T. Janka, T. Foglizzo, and K. Kifonidis. Multidimensional supernova simulations with approximative neutrino transport. II. Convection and the advective-acoustic cycle in the supernova core. *A&A*, 477:931–952, January 2008. doi: 10.1051/0004-6361:20077701.
- H. Shen, H. Toki, K. Oyamatsu, and K. Sumiyoshi. Relativistic equation of state of nuclear matter for supernova and neutron star. *Nuclear Physics A*, 637:435–450, July 1998. doi: 10.1016/S0375-9474(98)00236-X.
- H. Shen, H. Toki, K. Oyamatsu, and K. Sumiyoshi. Relativistic Equation of State for Core-collapse Supernova Simulations. *ApJS*, 197:20, December 2011. doi: 10.1088/0067-0049/197/2/20.

- M. Shibata and T. Nakamura. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D*, 52:5428–5444, November 1995. doi: 10.1103/PhysRevD.52.5428.
- M. Shibata and Y.-I. Sekiguchi. Gravitational waves from axisymmetric rotating stellar core collapse to a neutron star in full general relativity. *Phys. Rev. D*, 69(8):084024, April 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.69.084024.
- M. Shibata, Y. T. Liu, S. L. Shapiro, and B. C. Stephens. Magnetorotational collapse of massive stellar cores to neutron stars: Simulations in full general relativity. *Phys. Rev. D*, 74(10):104026, November 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.104026.
- K. Somiya. Detector configuration of KAGRA-the Japanese cryogenic gravitational-wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, 29(12):124007, June 2012. doi: 10.1088/0264-9381/29/12/124007.
- D. N. Spergel, A. Loeb, J. Goodman, J. N. Bahcall, and T. Piran. A simple model for neutrino cooling of the Large Magellanic Cloud supernova. *Science*, 237:1471–1473, September 1987. doi: 10.1126/science.237.4821.1471.
- K. Sumiyoshi and S. Yamada. Neutrino Transfer in Three Dimensions for Core-collapse Supernovae. I. Static Configurations. *ApJS*, 199:17, March 2012. doi: 10.1088/0067-0049/199/1/17.
- K. Sumiyoshi, S. Yamada, H. Suzuki, H. Shen, S. Chiba, and H. Toki. Postbounce Evolution of Core-Collapse Supernovae: Long-Term Effects of the Equation of State. *ApJ*, 629:922–932, August 2005. doi: 10.1086/431788.
- Y. Suwa, K. Kotake, T. Takiwaki, S. C. Whitehouse, M. Liebendörfer, and K. Sato. Explosion Geometry of a Rotating $13M_{sun}$ Star Driven by the SASI-Aided Neutrino-Heating Supernova Mechanism. *PASJ*, 62:L49, December 2010. doi: 10.1093/pasj/62.6.L49.
- Y. Suwa, T. Takiwaki, K. Kotake, T. Fischer, M. Liebendörfer, and K. Sato. On the Importance of the Equation of State for the Neutrino-driven Supernova Explosion Mechanism. *ApJ*, 764:99, February 2013. doi: 10.1088/0004-637X/764/1/99.
- T. Takiwaki, K. Kotake, and Y. Suwa. Three-dimensional Hydrodynamic Core-collapse Supernova Simulations for an $11.2 M_{\odot}$ Star with Spectral Neutrino Transport. *ApJ*, 749:98, April 2012. doi: 10.1088/0004-637X/749/2/98.
- T. Takiwaki, K. Kotake, and Y. Suwa. A Comparison of Two- and Three-dimensional Neutrino-hydrodynamics Simulations of Core-collapse Supernovae. *ApJ*, 786:83, May 2014. doi: 10.1088/0004-637X/786/2/83.
- I. Tamborra, F. Hanke, B. Müller, H.-T. Janka, and G. Raffelt. Neutrino Signature of Supernova Hydrodynamical Instabilities in Three Dimensions. *Physical Review Letters*, 111(12):121104, September 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.111.121104.
- I. Tamborra, G. Raffelt, F. Hanke, H.-T. Janka, and B. Müller. Neutrino emission characteristics and detection opportunities based on three-dimensional supernova simulations. *Phys. Rev. D*, 90(4):045032, August 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.90.045032.

- T. A. Thompson, A. Burrows, and P. A. Pinto. Shock Breakout in Core-Collapse Supernovae and Its Neutrino Signature. *ApJ*, 592:434–456, July 2003. doi: 10.1086/375701.
- V. Trimble. Supernovae. Part I: the events. *Reviews of Modern Physics*, 54:1183–1224, October 1982. doi: 10.1103/RevModPhys.54.1183.
- K. A. van Riper and J. M. Lattimer. Stellar core collapse. I - Infall epoch. *ApJ*, 249:270–289, October 1981. doi: 10.1086/159285.
- R. F. Webbink. Double white dwarfs as progenitors of R Coronae Borealis stars and Type I supernovae. *ApJ*, 277:355–360, February 1984. doi: 10.1086/161701.
- J. Whelan and I. Iben, Jr. Binaries and Supernovae of Type I. *ApJ*, 186:1007–1014, December 1973. doi: 10.1086/152565.
- J. R. Wilson. Supernovae and Post-Collapse Behavior. In J. M. Centrella, J. M. Leblanc, and R. L. Bowers, editors, *Numerical Astrophysics*, page 422, 1985.
- J. R. Wilson, G. J. Mathews, and P. Marronetti. Relativistic numerical model for close neutron-star binaries. *Phys. Rev. D*, 54:1317–1331, July 1996. doi: 10.1103/PhysRevD.54.1317.
- S. E. Woosley and A. Heger. Nucleosynthesis and remnants in massive stars of solar metallicity. *Phys. Rep.*, 442:269–283, April 2007. doi: 10.1016/j.physrep.2007.02.009.
- S. E. Woosley and T. A. Weaver. The Evolution and Explosion of Massive Stars. II. Explosive Hydrodynamics and Nucleosynthesis. *ApJS*, 101:181, November 1995. doi: 10.1086/192237.
- S. E. Woosley, A. Heger, and T. A. Weaver. The evolution and explosion of massive stars. *Reviews of Modern Physics*, 74:1015–1071, November 2002. doi: 10.1103/RevModPhys.74.1015.
- A. Yahil. Self-similar stellar collapse. *ApJ*, 265:1047–1055, February 1983. doi: 10.1086/160746.
- T. Yamasaki and T. Foglizzo. Effect of Rotation on the Stability of a Stalled Cylindrical Shock and Its Consequences for Core-Collapse Supernovae. *ApJ*, 679:607–615, May 2008. doi: 10.1086/587732.
- H. W. Yorke. Numerical solution of the equation of radiation transfer in spherical geometry. *A&A*, 86:286–294, June 1980.
- 卓史 中村, 典克 三尾, and 正健 大橋. 重力波をとらえる—存在の証明から検出へ. 京都大学学術出版会, 1998.
- 憲一 野本, 晃三 定金, and 勝彦 佐藤. 恒星. Number 7 in シリーズ現代の天文学. 日本評論社, 2009. URL <http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA90711972>.