

平成26年度 修士論文

初期宇宙における超大質量星形成と
超巨大ブラックホール

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻

学籍番号 35-136047

櫻井 祐也

指導教員

吉田 直紀 教授

平成27年2月4日

概要

赤方偏移 $z \gtrsim 6$ において、 $\sim 10^9 M_{\odot}$ の超巨大ブラックホールが存在していることが、近年の観測により知られている。しかしながらその起源については謎が多い。理論ではいくつかの超巨大ブラックホール形成シナリオが提唱されており、direct collapse シナリオはその中でも有力視されている。この direct collapse シナリオは、 $\sim 10^5 M_{\odot}$ もの大きな質量を持つ超大質量星が重力崩壊して同質量程度のブラックホールができ、これが超巨大ブラックホールの種となる、というシナリオである。

宇宙初期の星形成で形成された初代星の集団が放出する紫外線を浴びて、効率的な冷却源である水素分子が壊されたために、水素原子の輝線で冷却するハローを atomic-cooling halo と呼ぶ。この atomic-cooling halo はその存在が理論研究で予言されており、通常のハローと比べ、星形成が起きると降着段階において高い降着率が実現される。そのため、atomic-cooling halo 中では超大質量星ができると考えられている。この atomic-cooling halo 中で超大質量星が形成される過程は詳細に知られていない。

まず通常の初代星の形成について考える。降着段階にある通常の初代星は、進化の過程で多量の紫外線を放出し、周辺ガスを電離して降着を抑制し星の成長を止めてしまうことが複数の理論研究により知られている。これは輻射フィードバックとして知られている。また、星の進化の過程で形成される円盤の重力不安定によって、降着率のバーストが起きることも3次元流体シミュレーションにより知られている。一方 atomic-cooling halo 中の星形成過程では、降着段階で降着率 $\gtrsim 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ が一定の場合については、輻射フィードバックが効かないことが知られている。しかしながらこの場合も円盤の不安定性によってバースト降着が起きることが3次元流体シミュレーションにより示唆されており、この場合に星の進化過程で輻射フィードバックが効くかどうかは明らかにされていない。

本研究では、バースト降着が起きる atomic-cooling halo 中の星形成過程での輻射フィードバックの影響を明らかにする目的で、1次元の星の進化計算を行った。主に平均降着率が $\sim 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合で、バースト時の降着率、降着率が低い時期の降着率を固定して、バーストの間隔とバーストの継続時間を変化させたモデルについて議論を行った。一定降着率の場合、 $\sim 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の降着率では星は単調に膨張していき、収縮することはなく放出される紫外線量も多くなかった。しかしバースト降着を考えた場合は、低降着率期が長いほど降着率が低い時期に星が収縮しやすく、その際星の有効温度が上がって紫外線も大量に放出されることが分かった。すなわち、低降着率期が長いほど輻射フィードバックが効く可能性が高くなる。本論文では、低降着率期が $\sim 10^3 \text{ yr}$ より長くなると、輻射フィードバックが重要になると結論づけた。実際に atomic-cooling halo 中の星形成降着段階でどのような降着率が実現されるかについてはよく知られていない。より詳細な研究を行うには、3次元流体シミュレーションから atomic-cooling halo 中での星へのガス降着率を知り、その結果を用いて星の進化計算をする必要がある。

謝辞

筆者は、多くの議論と助言を下さった吉田直紀教授、細川隆史助教に感謝する。吉田教授は、筆者に超巨大ブラックホールの起源に関する研究テーマを与えて下さった。また研究の方針について幾度もご指導頂いた。学会や研究会に行く際にも多くの助言を頂き、補助までして頂いた。フォトンサイエンス・リーディング大学院（ALPS）や日本学術振興会特別研究員に応募する際の書類の添削をして下さった。学会・研究会での研究発表以外の発表を行う際にも、大変お世話になった。細川助教は、本研究を行う上で必要であった計算コードを提供して下さい、さらにその使い方について幾度もご教示して下さい。筆者の未熟さ故に研究で行き詰まった時には適切な助言をして頂いた。日々の議論では熱心に対応して下さい、貴重な発見をすることもあった。研究発表をする時には多くの助言を頂いた。日本学術振興会特別研究員に応募する時には書類の添削をして頂いた。

また、本研究を行う上で用いた計算コードの開発者である Harold J. Yorke 氏に感謝する。

修士論文を提出する上で、副査として多くの助言を下さった満田和久教授、山崎典子准教授に感謝する。

博士課程教育リーディングプログラムの関係者にも感謝しなければならない。筆者はALPSコースに応募し、2013年10月からALPSのコース生となった。コース生となったことで、自らの専門分野に閉じこもらず、広い視点で学問の世界全体を見渡す姿勢を強く持つようになった。2014年1月に行われた博士課程教育リーディングプログラムフォーラム2013のネクストビジョナリーに参加し、実際に自身の研究と直接的に関係しない事柄について深く考える機会を得た。さらには研究者として人類社会に貢献していく方法について深く考えるようになった。筆者はALPSコース生になったことで、今後の研究を行う上でも重要となる広い視野を持つ姿勢を身に付けたと考えている。

修士1年の前半で、天文夏の学校に参加する際の準備のために行った宇宙論ゼミでお世話になった岡アキラ氏に感謝する。夏の学校で発表を行う際には多くの助言を頂いた。岡氏はALPSコース生に応募する際の書類の添削もして下さい。

最後に、修士課程の2年間に筆者は複数のゼミに参加したが、その際議論を行って下さった研究室の皆様方に感謝する。

目次

第1章	序論	1
1.1	初期宇宙に存在する超巨大ブラックホール	1
1.2	初期宇宙に存在する超巨大ブラックホールの起源	2
1.2.1	初期宇宙での超巨大ブラックホール形成の問題点	2
1.2.2	Direct collapse モデルと超大質量星	3
1.2.3	時間変動する降着率：バースト降着	4
1.3	本研究の目的	5
第2章	星の構造と進化の一般論	6
2.1	基礎方程式	6
2.1.1	質量保存の式	6
2.1.2	運動量保存の式	8
2.1.3	エネルギー保存の式	10
2.1.4	エネルギー輸送の式	12
2.1.5	物質の組成変化の式	24
2.1.6	初期条件と境界条件	26
2.2	ヘニエイ法	29
2.3	星の物質の性質	34
2.3.1	状態方程式	34
2.3.2	吸収係数	37
2.3.3	核反応	42
2.4	簡単な場合の解：ポリトロープ	54
2.4.1	レーン・エムデン方程式とその解	54
2.4.2	ポリトロープ星	55
2.4.3	内部エネルギーと重力エネルギー	56
2.5	超大質量星の安定性	58
2.5.1	一般相対論の補正を考慮しない場合	58
2.5.2	一般相対論の補正を考慮した場合	60
第3章	研究方法・手法	67
3.1	数値計算方法	67
3.2	バースト降着のモデル化	69

第 4 章	結果	71
4.1	一定降着のもとでの星の進化	71
4.1.1	$\dot{M}_* < 4 \times 10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ の場合	71
4.1.2	$\dot{M}_* > 4 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ の場合	72
4.1.3	$4 \times 10^{-3} M_\odot/\text{yr} < \dot{M}_* < 4 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ の場合	76
4.2	バースト降着のもとでの星の進化	77
4.2.1	平均降着率が $10^{-1} M_\odot/\text{yr}$ の場合	77
4.2.2	平均降着率が $10^{-1} M_\odot/\text{yr}$ 未満の場合	84
第 5 章	議論	86
5.1	輻射フィードバックが起きる可能性	86
5.2	Atomic-cooling halo における降着史	87
5.3	星の進化の過程で重力崩壊を起こす可能性	88
第 6 章	結論	89
第 7 章	今後の研究	91
7.1	基礎方程式の定式化の変更	91
7.1.1	慣性項の導入	91
7.1.2	状態方程式の変更	91
付 録 A	活動銀河核の観測と超巨大ブラックホールの質量推定	92
A.1	活動銀河核の構造	92
A.2	質量推定の手法	93
A.2.1	光反響マッピングによる質量推定	93
A.2.2	BLR 半径と光度の相関を利用した質量推定	93
付 録 B	熱力学関係の導出	95
付 録 C	カルダノ法による (2.106) の解法	99
付 録 D	電子・イオン気体の数密度・圧力・内部エネルギー	101
D.1	縮退電子気体	101
D.2	イオン気体	104
付 録 E	電離光子放出率の計算方法	106
付 録 F	KH 収縮に対するフィッティング関数の導出	107

第1章 序論

本論文では、宇宙論モデルとして flat な Λ CDM モデルを考える。赤方偏移と宇宙年齢の変換をする際、Planck の best fit (Planck Collaboration et al. 2014 : 表 2) で得られた宇宙論パラメータを用い、 $\Omega_m = 0.3175$ 、 $\Omega_\Lambda = 0.6825$ 、ハッブルパラメータ $H_0 = 67.11 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ とする。

1.1 初期宇宙に存在する超巨大ブラックホール

今日の宇宙物理学では、宇宙にあまねく存在している銀河の中心に、超巨大ブラックホール (SuperMassive Black Hole : SMBH) があると考えられている。特に活動銀河核と呼ばれる、SMBH を含む天体は、非常に明るく光るため、遠方の観測が可能である。近年の可視光・赤外光観測により、広い赤方偏移範囲で多くの活動銀河核中の SMBH が見つかっている。Marziani & Sulentic (2012) の図 9 に基づき、観測で見つかっている質量 $M_{\text{BH}} \gtrsim 10^5 M_\odot$ の SMBH について、 z と M_{BH} の関係を図 1.1 に示した。この図には赤方偏移に対応する宇宙年齢も示している。

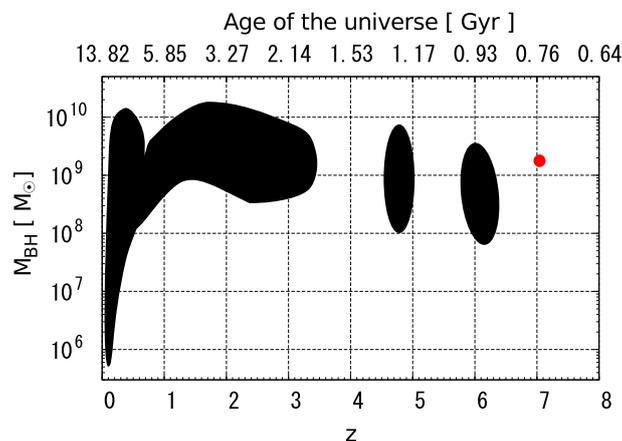


図 1.1: 観測されている SMBH の z と M_{BH} の関係。赤方偏移に対応する宇宙年齢も示した。黒の領域は複数の SMBH が見つかっている領域である。赤の点は Mortlock et al. (2011) で報告された、 $z = 7.085$ において質量が $2 \times 10^9 M_\odot$ の SMBH である。

この図から、 $z \gtrsim 6$ 、すなわち宇宙年齢 $\lesssim 0.93 \text{ Gyr}$ において、既に $\gtrsim 10^9 M_\odot$ の SMBH が存在していることが分かる。特に $z = 7.085$ 、宇宙年齢 0.75 Gyr において、質量が $2 \times 10^9 M_\odot$ の SMBH が存在する (Mortlock et al. 2011)。

活動銀河核の観測と SMBH の質量推定についての詳しい内容は付録 A にまとめている。

1.2 初期宇宙に存在する超巨大ブラックホールの起源

1.2.1 初期宇宙での超巨大ブラックホール形成の問題点

赤方偏移 $z \gtrsim 6$ の SMBH の起源を解明するための研究は盛んに行われているが、未だに解決されていない。

SMBH は、より小さなブラックホールを種として形成されたと考えられている。シミュレーション研究で知られている、 $z \gtrsim 20$ の初期宇宙で形成される初代星の質量が $\gtrsim 100 M_\odot$ である (Abel et al. 2002、Bromm et al. 2002、Yoshida et al. 2006) ことと、質量が $\gtrsim 260 M_\odot$ の星は最後には全て $\gtrsim 100 M_\odot$ のブラックホールになる (Heger & Woosley 2002) ということから、その種としてよく考えられるのは、質量が $\sim 100 M_\odot$ のブラックホールである (Madau & Rees 2001、Schneider et al. 2002)。しかしこのようなブラックホールを種として SMBH を形成することは困難であることが近年指摘されている。

まず、ブラックホールが質量を増やす成長時間に関して問題がある。初期宇宙に存在する初期質量 $M_{\text{ini}} = 100 M_\odot$ のブラックホールが、 $M_{\text{fin}} = 2 \times 10^9 M_\odot$ の SMBH になるまでに必要な時間を見積もってみよう (Madau et al. 2014)。ブラックホール質量 M の成長は、方程式

$$\frac{dM}{dt} = (1 - \epsilon)\dot{m} = \left(\frac{1 - \epsilon}{\epsilon}\right) \left(\frac{L}{L_E}\right) \frac{M}{t_E} \quad (1.1)$$

により支配される。ここで ϵ は、降着ガスの重力エネルギーが輻射エネルギーに変換される効率であり、ガスのブラックホールへの降着率 \dot{m} と輻射光度 L 、光速 c を用いて

$$\epsilon = \frac{L}{\dot{m}c^2} \quad (1.2)$$

と表される。ここで考えた輻射エネルギーは、ブラックホールの外側に逃げる分のみを考えたものである。またエディントン光度 L_E は、重力と輻射圧が釣り合う時の輻射光度として、

$$L_E = \frac{4\pi GM\mu_e m_p c}{\sigma_T} \quad (1.3)$$

と表される。 G は重力定数、 m_p は陽子質量、 σ_T はトムソン散乱断面積である。1 電子当たりの分子量 μ_e は、原子番号 Z_i の原子の分子量 μ_i と割合 X_i を用いて $\mu_e = (\sum_i Z_i X_i / \mu_i)^{-1}$ と表される。エディントン時間スケール t_E は、ブラックホール質量によらない量として $t_E \equiv Mc^2/L_E = c\sigma_T/4\pi G\mu_e m_p = 0.45\mu_e^{-1}$ と書ける。これにより、ブラックホールの成長時間スケール t_{acc} は、

$$t_{\text{acc}} = \left(\frac{\epsilon}{1 - \epsilon}\right) \left(\frac{L_E}{L}\right) t_E = (4.4 \times 10^7 \text{ yr}) \left(\frac{L_E}{L}\right) \quad (1.4)$$

となる。最後の式は、宇宙初期の組成を想定して、水素約 75 %、ヘリウム約 25 % を含むガスを考えて $\mu_e \simeq 1.14$ とし、さらに輻射効率として典型的な値 $\epsilon = 0.1$ を用いて計算した。エディントン降着を想定し、 $L = L_E$ とすると、ブラックホールの質量が $M_{\text{ini}} = 100 M_\odot$ から $M_{\text{fin}} = 2 \times 10^9 M_\odot$ となるまでに必要な時間は $t_{\text{acc}} \ln(M_{\text{fin}}/M_{\text{ini}}) = 0.74 \text{ Gyr}$ となる。Mortlock et al. (2011) で報告された 0.75 Gyr に存在する SMBH が $z = 20$ で宇宙年齢

0.18 Gyr において形成されたブラックホールを種として出来たとすると、成長にかかった時間は $\sim 0.57 \text{ Gyr} < 0.74 \text{ Gyr}$ である。この SMBH が質量 $100 M_{\odot}$ のブラックホールから出来たと考えると、成長時間が足りないことが分かる。

さらにはブラックホールへガスが降着する際に、外部に放出される輻射が周囲のガスを電離してしまい、それによってガスが外に吹き飛ばされ降着を抑制してしまう、輻射フィードバックが起きることが問題視されている (Jeon et al. 2012)。このフィードバックが効くと、エディントン降着を維持できないために、ブラックホールの成長時間が上の議論で考えたよりも長くなってしまう。

1.2.2 Direct collapse モデルと超大質量星

この問題を解消する理論の一つとして、 $\sim 10^5 M_{\odot}$ の超大質量星から、SMBH の種となる同質量程度のブラックホールが直接崩壊によりできるという direct collapse モデルが考えられている (Bromm & Loeb 2003、Regan & Haehnelt 2009)。この理論では種ブラックホールとして $M_{\text{ini}} \simeq 10^5 M_{\odot}$ のものを考える。この質量は中心で水素燃焼を起こす星 (主系列星) が安定な構造を維持できる最大の質量程度に対応する (2.5.2 節)。この場合、 $M_{\text{fin}} = 2 \times 10^9 M_{\odot}$ の SMBH まで成長するのにかかる時間が前節に述べたの条件のもとで $t_{\text{acc}} \ln(M_{\text{fin}}/M_{\text{ini}}) = 0.43 \text{ Gyr}$ に短縮される。ブラックホールの成長過程で輻射フィードバックが効いて降着がエディントン降着以下になったとしても、降着率がエディントン降着の 0.76 倍程度以上を維持できれば、 $\sim 0.57 \text{ Gyr}$ の間に種ブラックホールは $2 \times 10^9 M_{\odot}$ まで大きく成長でき、Mortlock et al. (2011) で見つかった SMBH の存在を説明できる。

ここで登場した超大質量星は、通常の初代星が形成されるガス雲とは異なる、特殊なガス雲から形成されると考えられている (Omukai 2001、Bromm & Loeb 2003、Shang et al. 2010)。

まず通常の初代星形成について簡単に説明する。通常の初代星形成は、ピリアル温度 (重力束縛された系の温度) が $\lesssim 3000 \text{ K}$ の重元素を含まないダークマターハロー (重力束縛された系) 中のガス雲において起きる。この温度領域では、豊富に存在する水素原子からの水素分子形成が促進されるため、水素分子の振動・回転準位からの脱励起による放射冷却が支配的となる。水素分子冷却によりガスが圧力を失っていき、ガス雲が重力崩壊するため、中心領域に質量 $\sim 10^{-3} M_{\odot}$ の原始星コアが形成される。この原始星コアに、周囲のガスが降着していくことにより、初代星ができる。この降着段階での星へのガス降着率は、降着ガスの温度に依存しており、

$$\dot{M}_* = \frac{c_s^3}{G} = 2 \times 10^{-1} \left(\frac{\mu}{1}\right)^{-3/2} \left(\frac{T_{\text{vir}}}{10^4}\right)^{3/2} M_{\odot}/\text{yr} \quad (1.5)$$

と書ける。ここで $c_s = \sqrt{k_B T_{\text{vir}} / \mu m_p}$ は音速で、 k_B はボルツマン定数である。1 粒子当たりの分子量 μ は電離度などに依存するが、 $\mathcal{O}(1)$ の量である。初代星のできる典型的なガス雲のピリアル温度は数 100 K であるので、降着率は $\sim 10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ となる。これは現在の宇宙での星形成降着過程における典型的な降着率よりも 2 桁ほど大きい。そのため、初代星の最終的な質量も現在の星の質量 $\sim 1 M_{\odot}$ に比べて大きく、 $\gtrsim 100 M_{\odot}$ であると考えられている (Abel et al. 2002、Bromm et al. 2002、Yoshida et al. 2006)。星の最終

質量は、星から放出される紫外線が強くなる時期の星の質量で決まる。これは、星からの紫外線が強くなると、星へ降着する周辺ガスが電離されて圧力が高まり、外へ掃き出されることにより、星へのガス降着が止まってしまうからである（輻射フィードバック）。

一方超大質量星形成は、ピリアル温度が $\gtrsim 10^4$ K の重元素を含まない、ダークマターハロー中の熱いガス雲で起きると考えられている。ハローがこの温度になるには、水素分子が紫外線背景輻射によって壊され、水素分子冷却が抑えられる必要がある。紫外線背景輻射は、周辺ハローの星形成領域中の星の輻射によってできると考えられる。この場合、より非効率的な冷却過程である水素原子による冷却が支配的になる。このようなハローは atomic-cooling halo と呼ばれる。

Atomic-cooling halo ができるためには、紫外線背景輻射強度がある臨界値 J_{cr} より強く、水素分子の形成よりも解離の方が速くならなければならない。 J_{cr} の値については多くの議論がなされており、考えているハローの熱的状況により値が大きく変化するなど、不定性が大きい。最近では $J_{\text{cr},21} \sim 400 - 1500$ であると考えられている (Latif et al. 2014)。ここで $J_{\text{cr},21}$ は、 $J_{21} = 10^{-21} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ を単位とした J_{cr} である。実際の初期宇宙で atomic-cooling halo がどの程度多くできるかという問題は、direct collapse モデルで初期宇宙に存在する SMBH の量を上手く説明できるかに直接関わる問題であるため、議論がなされているが、そのような議論は臨界値 $J_{\text{cr},21}$ に大きく依存しているため、はっきりとした結論は出されていない。

Atomic-cooling halo が出来たとしよう。このハロー中でガス雲が重力崩壊して通常よりも大きめの $\sim 0.03 M_{\odot}$ の原始星ができ、降着段階に入ると、ガスの温度が高いために降着率が通常よりも大きく $\gtrsim 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ まで達する ((1.5) で $T_{\text{vir}} \gtrsim 10^4$ K)。このような速い降着率のもとで星形成が起きると、最終的な星の質量は通常の初代星の質量よりもずっと大きくなると予想され、超大質量星ができると考えられている。しかしながら、実際にどのくらいの質量の星が形成されるかについてはよく知られていない。前述したように、星の最終質量を決めるのは、星からの紫外線によるフィードバックである。Atomic-cooling halo 中での星形成を想定し、高い降着率のもとで、輻射フィードバックがどの時期に起きて、最終的にどの程度の質量の星ができるかについて明らかにする目的で、従来も星の 1 次元の進化計算が行われ、研究がなされている (Hosokawa et al. 2012, 2013)。Hosokawa et al. (2012) では、降着率が $\gtrsim 4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ のもとでの、星が質量を増やしていく成長過程は、より低い降着率のもとでの成長過程と定性的に異なることが示された。また Hosokawa et al. (2013) では、降着率が $\gtrsim 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ のもとで星が進化する場合には、星の質量が $\sim 10^5 M_{\odot}$ になるまで、星からの紫外線強度がフィードバックが起きるほど強くないことが示唆された。しかしながらこれらの研究では、降着率を常に一定として星の進化の計算を行っている。

1.2.3 時間変動する降着率：バースト降着

現実的には、星へのガス降着率は時間変動すると考えられる。Atomic-cooling halo 中の降着段階にある星について、降着率が時間変動する場合に、どの時期に輻射フィードバックが効き、最終的にどのくらいの質量の星が出来るのかについては、未だ詳しい議論はな

されていない。降着率が時間変動する原因は複数あるが、特に本論文で後で詳しく考える時間変動降着は、バースト降着と呼ばれるものである。

ガス雲から出来た原始星は、降着段階に入ると、降着円盤を周囲に形成する。星への降着は、主にこの円盤からのガスの降着によるものである。この降着円盤は、周辺ガスからの降着により質量を増していく。円盤が重くなってくると、円盤の自己重力が大きくなり、重力不安定になると円盤内で重力が大きい部分にガスが集中してくる。これにより、円盤内にガスの分裂片ができる。この分裂片は、質量を多く含みつつ星へ落ち込んでいき降着する。この時、星への降着率が急激に上昇する。これがバースト降着である。バースト降着は、現在の宇宙での降着段階にある星においてその徴候が見られており（オリオン座FU型星）、さらに星形成の2次元シミュレーションにおいても起きることが確認されている（Vorobyov & Basu 2006）。さらに、宇宙初期の星形成を想定した重元素のない始原ガス中においても、バースト降着が起きることが2次元の流体シミュレーションにより示されている（Vorobyov et al. 2013）。Atomic-cooling halo 中の星形成においては、降着率のバーストが起きることが直接示されたわけではないが、円盤の分裂が起きることは3次元の流体シミュレーションにより示されている（Regan et al. 2014）。

1.3 本研究の目的

そこで本研究では、atomic-cooling halo 中の降着段階にある、平均降着率が高い星の成長過程が、バースト降着が起きる場合に一定降着率の場合と比較してどのように変わるか、特に星の質量が $\sim 10^5 M_{\odot}$ となる前に輻射フィードバックが効いて周辺ガスの降着が抑制されてしまうかどうか明らかにする目的で、星の進化を1次元計算により追った。

本論文の構成は以下のとおりである。まず第2章において、本研究の計算を行う上で必要な知識となる、星の構造と進化の一般論についてレビューする。ここではまず、計算の支配方程式となる式と、境界条件・初期条件について説明する。続いて星の進化の数値計算を行う上で必要となる数値手法である、ヘニエイ法について説明する。その後、考慮すべき星の物質の性質を述べ、簡単な場合の星の構造の解を示す。また、超大質量星の安定性についても説明する。第3章において、研究方法と手法を説明する。特に数値計算方法と、バースト降着のモデル化について説明する。第4章では、計算結果について説明する。この章では、一定降着率の場合の星進化の結果を示し、加えてバースト降着が起きる場合の星進化についての結果を示す。一定降着率の場合は星の進化の振る舞いが異なる降着率の範囲ごとに説明する。またバースト降着の場合は、atomic-cooling halo 中の典型的な降着率であると考えられる平均降着率が $10^{-1} M_{\odot}$ の場合と、それ以外の降着率の場合とに分けて説明する。第5章では、計算結果を踏まえて議論を行う。まず輻射フィードバックが星の成長過程で効くかどうかについて議論を行う。続いて、atomic-cooling halo 中で実現されると考えられる降着史について議論する。さらに、星が進化の過程で重力崩壊に対して安定であるかどうか議論する。第6章では、本論文の結論をまとめる。第7章では、今後の研究について述べる。

第2章 星の構造と進化の一般論

本章では、研究を行う上で必要となる知識である、星の構造と進化について、宇宙初期に限定せずに一般論をレビューする。本研究の計算では星が全て球対称であることを仮定しているため、球対称の場合に話を限定する。この章では、“Stellar structure and evolution” (2012)、“Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects” (1983)、『シリーズ現代の天文学 恒星』(2009)を参考にした。

2.1 基礎方程式

球対称な星の構造と進化を支配する基礎方程式について説明する。これらは、質量保存の式、運動量保存の式、エネルギー保存の式、エネルギー輸送の式、物質の組成変化の式である。これらの式に初期条件・境界条件を与えることで、星の構造と進化が決まる。

2.1.1 質量保存の式

星が球状であることから、星の中心からの距離 r の関数として星内部の諸量を考える。星の中心を $r = 0$ とし、星の表面で $r = R_*$ とする。ここで R_* は星の半径である。さらに星の時間進化を考える場合には、それらの諸量は時刻 t にも依存する。すなわち、独立変数は (r, t) であり、他の量はこの2つで表される。例えば密度は $\rho = \rho(r, t)$ となる。

星内部の質量分布を記述するため、時刻 t に半径 r 以内にある星の質量 $m(r, t)$ を定義する。中心 $r = 0$ においては $m = 0$ で、表面 $r = R_*$ においては $m = M_*$ である。ここで M_* は星の全質量である。図 2.1 に星内部での r と m の関係を示した。星の微小部分 dr における質量 dm の空間・時間変化は

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho v dt \quad (2.1)$$

と書ける。右辺第1項は、時刻 t を固定した時の、 dr に含まれる質量を表している。第2項は、 r を固定した時、物質が外向きに動径速度 v で動いている場合に、時刻 dt の間に半径 r 内に含まれる質量 m がどのくらい減少するかを表している。この式を r と t について微分すると、それぞれ

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v \quad (2.3)$$

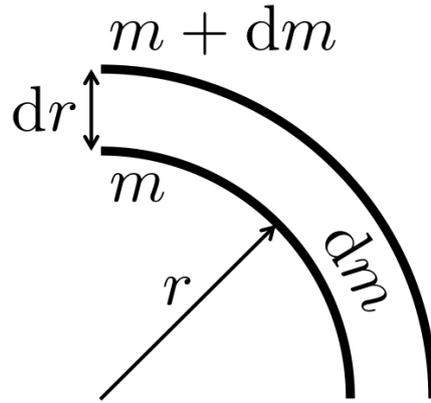


図 2.1: 星内部での半径 r と質量 m の関係。

という式を得る。(2.2) は基礎方程式の 1 つであり、(2.3) と合わせて質量保存の式とみなすことができる。これは、(2.2) を t で微分し、(2.3) を r で微分し、両者を等しいとすることで、球対称な場合の連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v)}{\partial r} \quad (2.4)$$

を得ることから分かる。

上で行ったように、 r を独立変数として方程式を記述する形式をオイラー形式と呼ぶ。一方、独立変数を m として方程式を記述する形式もあり、これをラグランジュ形式と呼ぶ。ラグランジュ形式は、物質の動きに合わせて物理量を考えていることに相当し、オイラー形式よりも方程式が簡潔になる。すなわち、半径 r の代わりに質量 m を独立変数として方程式を表したほうがよい。独立変数として m を使った場合、 $r = r(m, t)$ となる。変数変換 $(r, t) \rightarrow (m, t)$ を行うと、微分は

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_m = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_m \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \quad (2.6)$$

となる。(2.5) の微分を m に作用させ、(2.2) を用いると、

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2.7)$$

を得る。これがラグランジュ形式で表した質量保存の式である。ラグランジュ形式の場合は、(2.3) に相当する式は

$$\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_m = 0 \quad (2.8)$$

となり、物質の動きに合わせて考えた質量 m は時間変化しないことが分かる。これは m を独立変数としたことから分かる。ここで注意すべきことは、オイラー形式では 2 つ

の式に分かれていた質量保存の式 (2.2) と (2.3) が、ラグランジュ形式では実質的に (2.7) の1つにまとめられたことである。このことからラグランジュ形式の利点が見て取れる。(2.5) と (2.7) から、独立変数の変換則

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.9)$$

を得る。星が球対称の場合、ラグランジュ形式を用いるのが一般的であり、本論文の計算でもラグランジュ形式を採用する。

2.1.2 運動量保存の式

ここでは回転や磁場などが無い場合を考えて、重力と圧力勾配による力のみが存在する状況を考える。

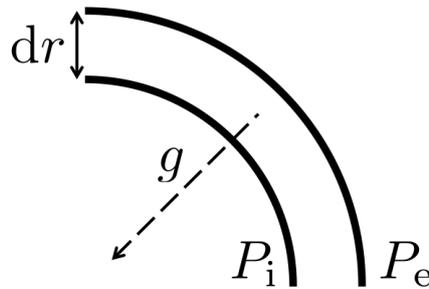


図 2.2: 星内部の微小部分 dr の物質にかかる圧力と重力。

多くの星の内部物質はほとんど加速されずに、働く力が釣り合った状態にある。この力学平衡は静水圧平衡と呼ばれる。まず静水圧平衡にある星を想定して、星内部の薄皮 dr 部分に働く単位面積当たりの力の釣り合いを考える。図 2.2 に微小部分 dr における物質にかかる圧力と重力の様子を示した。重力加速度 $g (> 0)$ を使うと、重力は外向きの力を正として $-\rho g dr$ となる。また圧力は、薄皮 dr の外側の圧力 P_e と内側の圧力 P_i を使って、

$$P_i - P_e = -\frac{\partial P}{\partial r} dr \quad (2.10)$$

となる。これらが釣り合うことから

$$\frac{\partial P}{\partial r} + g\rho = 0 \quad (2.11)$$

を得る。

ここで球対称の星を考えた場合の重力加速度 g について考える。重力ポテンシャル Φ から、重力加速度 $g = (-g, 0, 0)$ は $g = -\nabla\Phi$ と書けるので

$$g = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (2.12)$$

となる。Φ はポアソン方程式

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.13)$$

により決まるので、球対称の場合には、 g を決める方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 g) = 4\pi G\rho \quad (2.14)$$

となる。この式を (2.2) を利用して積分することにより

$$g = \frac{Gm}{r^2} \quad (2.15)$$

を得る。

(2.15) と (2.11) により、運動量保存の式

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \quad (2.16)$$

を得る。これが2つ目の基礎方程式である。(2.9) を用いて独立変数を r から m に変換し、ラグランジュ形式に直すと

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.17)$$

を得る。

次に、静水圧平衡が保たれていない状況を考える。この場合には星の質量要素の慣性を考慮に入れなければならない、(2.16) や (2.17) に追加の項が現れる。ここではラグランジュ形式に限って考える。図 2.1 で、質量要素 dm にかかる圧力 f_P は、(2.10) で考えたことと同様にして

$$f_P = -\frac{\partial P}{\partial m} dm \quad (2.18)$$

となる。単位面積当たりの重力 f_g は、(2.15) を用いて

$$f_g = -\frac{g dm}{4\pi r^2} = -\frac{Gm}{r^2} \frac{dm}{4\pi r^2} \quad (2.19)$$

となる。もし圧力と重力が釣り合っていないければ、質量要素は加速され、

$$\frac{dm}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = f_P + f_g \quad (2.20)$$

となる。(2.18) と (2.19) を使えば、

$$\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial m} - \frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.21)$$

を得る。

物質の加速がなく左辺が0であれば、(2.21) は (2.17) に一致する。(2.21) の左辺が厳密には0ではなくても、他の項と比較して十分小さければ、静水圧平衡を仮定することは良い近似である。観測されている太陽のような通常の星は、ほぼ静水圧平衡にあると考えられる。星の進化のモデル化をする場合には、加速項が重要となる時間スケールは無視でき

るほど短く影響が小さいため、静水圧平衡を仮定して良いと考えられる。実際に加速項による系の応答の時間スケールがどの程度になるかを見積もってみよう。まずは重力が圧力よりも重要である状況を考える。加速項を $|\partial^2 r / \partial t^2| = R_* / \tau_{\text{ff}}^2$ と書き換えると、(2.21) から $R_* / \tau_{\text{ff}}^2 \simeq g$ 、すなわち

$$\tau_{\text{ff}} \simeq \left(\frac{R_*}{g} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

が分かる。ここでの g は星の平均的な重力加速度を考えている。これは自由落下時間スケールと考えることができる。一方重力よりも圧力が重要な場合を考えると、星の平均的な圧力 P と密度 ρ を用いて $4\pi r^2 (\partial P / \partial m) = (\partial P / \partial r) / \rho$ として $R_* / \tau_{\text{expl}}^2 = P / \rho R$ となることから

$$\tau_{\text{expl}} \simeq R_* \left(\frac{\rho}{P} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

となる。 $(P/\rho)^{1/2}$ は星内部の音速程度の量である。これは音波が星の中心から表面に到達するまでにかかる時間スケールと考えることができる。静水圧平衡に近い場合には、(2.21) の右辺の2つの項の絶対値が近い値となり、 $\tau_{\text{ff}} \simeq \tau_{\text{expl}}$ となる。そのためこの場合には両時間スケールを同じとして τ_{hydr} と書く。これは、静水圧平衡から少しずれた星が元に戻ろうとするときの反応の時間スケールである。重力加速度として $g \simeq GM_* / R_*^2$ を用いると

$$\tau_{\text{hydr}} \simeq \left(\frac{R_*^3}{GM_*} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

となり、太陽の場合には $\tau_{\text{hydr}} \simeq 27$ 分となる。これは星の進化の時間スケール(数100年から数100億年)と比較してずっと短い。そのため星の長時間の進化に興味がある場合には、静水圧平衡を仮定するのが妥当である。本論文における計算は、全て静水圧平衡を仮定して行う。

2.1.3 エネルギー保存の式

星の内部のエネルギーの流れを考えるために、星の中心からの半径 r の部分を、外側に単位時間に流れるエネルギー $l(r, t)$ を考える。星の中心 $r = 0$ においてはエネルギー源がないため、 $l(r = 0) = 0$ である。また星の表面 $r = R_*$ においては、 l は星の全光度 L_* に一致する。星の中間領域においては、エネルギーの湧き出し・吸い込み機構により、 l は複雑な関数となる。

関数 l は輻射、熱伝導、対流によるエネルギーの輸送を意味する(2.1.4節)。太陽のような通常の星の内部ではニュートリノは物質と相互作用しないため、 l にはニュートリノの寄与は含まれない。すなわち l で考慮されている流れは、温度勾配をつくるような流れだけである。

図2.3に星内部半径 r 、厚さ dr 、質量 dm の球殻を示した。この球殻を横切るエネルギー流を考える。球殻の内側を横切る単位時間あたりのエネルギーを l 、外側を横切るものを $l + dl$ とする。球殻を横切って増減したエネルギー dl は、核反応や球殻の膨張・収縮、ニュートリノ冷却によって与えられる。まずは定常状態を考えて、核反応の寄与のみ

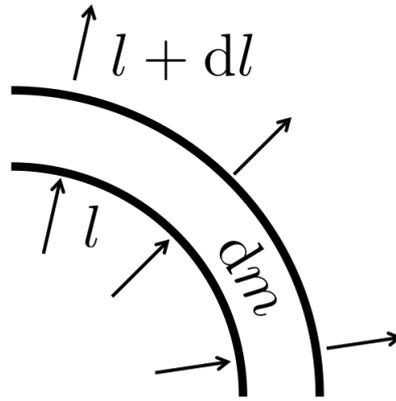


図 2.3: 星内部の質量要素 dm を横切るエネルギー流。

がある場合を考える。単位質量単位時間あたりに放出される核反応によるエネルギーを ε とすると

$$dl = 4\pi r^2 \rho \varepsilon dr = \varepsilon dm \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon \quad (2.26)$$

となる。一般に、 ε は温度と密度、核反応を起こす核種の量に依存する (2.3.3 節)。

次に時間依存する場合を考える。この場合、球殻の内部エネルギーは変化し、更に隣接球殻との間の仕事のやりとりがある。時間 dt の間に球殻内に加えられる単位質量あたりの熱 dq は

$$dq = \left(\varepsilon - \frac{\partial l}{\partial m} \right) dt \quad (2.27)$$

となる。これを T を温度、 s を比エントロピー、 u を比内部エネルギー、 $v = \rho^{-1}$ を比体積として、熱力学第一法則

$$dq = T ds = du + P dv \quad (2.28)$$

を使って書き換えると、

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - \frac{\partial u}{\partial t} - P \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.29)$$

$$= \varepsilon - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.30)$$

となる。これを P と T を使って書き換えると、 c_p を単位質量当たりの定圧比熱、 $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_P$ を圧力一定とした時の温度で測った密度勾配を表す量として

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.31)$$

となる（詳細は付録 B を参照）。これが 3 つ目の基礎方程式である。右辺の最後の 2 つの項は、しばしば合わせて考えられ

$$\varepsilon_g = -T \frac{\partial s}{\partial t} \quad (2.32)$$

$$= -c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.33)$$

とされる。

さらに既に述べたように、ニュートリノによるエネルギー損失についても考慮しなければならない。超高密度 ($\gtrsim 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$) の天体を考えるのでなければ、ニュートリノは星の物質に対して透明であるので、核反応などにより生成されるニュートリノはエネルギーの吸い込みとして振る舞う。ニュートリノが持ち出す単位時間・単位質量当たりのエネルギーを $\varepsilon_\nu (> 0)$ とすると、(2.31) は

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g \quad (2.34)$$

となる。

2.1.4 エネルギー輸送の式

星の内部におけるエネルギーの輸送は、局所的な物理状況に依存して、主に輻射・熱伝導・対流によりなされる。この 3 つのを考えた場合に、エネルギー輸送の式を考えていく。

輻射によるエネルギーの輸送

まず物質中を通過する光の強度がどのように変化するかを記述する方程式を導く。輻射場を考えるために、位置 r 、進行方向 \mathbf{n} 、時刻 t 、振動数 ν における輻射の比強度 $I_\nu(r, \mathbf{n}, t)$ を考える。この量は、 $I_\nu(r, \mathbf{n}, t) d\nu d\Omega$ が、振動数が ν から $\nu + d\nu$ で、単位面積を通過して方向 \mathbf{n} まわりの立体角 $d\Omega$ に単位時間あたりに入っていく光子のエネルギーを表す量として構成された量である。単位は cgs 単位系で $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ である。光が厚さ ds 、密度 ρ 、吸収係数 κ_ν の物質の層を横切る時の I_ν の変化は $dI_\nu = -I_\nu \kappa_\nu \rho ds$ と書ける。吸収係数 κ_ν は、振動数が ν の光子に対する単位質量あたりの物質の断面積であり、単位は cgs 単位系で $\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$ である。一方物質からの光子放射の寄与は、放射係数を j_ν として $dI_\nu = j_\nu \rho ds$ と書ける。源泉関数を $S_\nu \equiv j_\nu / \kappa_\nu$ と定義すると、吸収・放射の両方を考慮して $dI_\nu = -\kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) ds$ と書ける。これにより、(定常な) 輻射輸送方程式は

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = -\kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) \quad (2.35)$$

となる。光の進む方向 \mathbf{n} を使って s の微分を書き直すと

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = -\kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) \quad (2.36)$$

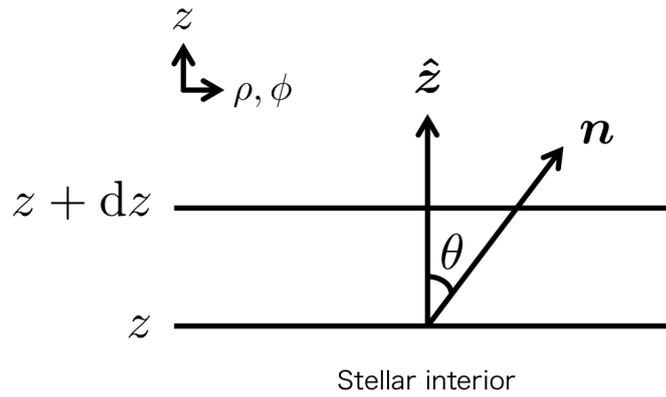


図 2.4: 星内部の幅 dz の層。この厚みが星の半径よりずっと小さく、層は平面であるという近似を使う。ベクトル \hat{z} は星の外側を向く単位ベクトルで、 n は光子の進行方向を向く単位ベクトル。両者は角度 θ をなす。

となる。輻射場が時間変化することを考慮すると、左辺に I_ν の時間微分の項が入る。しかし星の内部を考える際には輻射場の時間変化は十分ゆっくりで、その変化はガスの温度や密度などの時間変化によって記述することができるので、ここではその項を入れない。図 2.4 のように、星内部の幅 dz の層を考え、 dz が星半径よりもずっと小さいとし、層を平面と捉える近似をする。星の外を向く単位ベクトル \hat{z} と n のなす角を θ とすると (θ は空間座標ではないことに注意)、星が球対称であることから I_ν の空間変化は z 方向のみであることに注意して

$$\mathbf{n} \cdot \nabla = \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.37)$$

となる。ここで図 2.4 から分かるように $n_z = \cos \theta$ であることを用いた。(2.37) を使い、 $\cos \theta = \mu$ を定義して (2.36) を書き換えると

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -\kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) \quad (2.38)$$

となる。ここでさらに、光学的厚み τ_ν を、星の内部へ行くほど τ_ν が大きくなるように符号をとって $d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho dz$ により定義すると

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \quad (2.39)$$

を得る。

(2.39) の形式解は、 μ の正負で場合分けして

$$I(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S(\tau'_\nu) \exp \left[\frac{-(\tau'_\nu - \tau_\nu)}{\mu} \right] \frac{d\tau'_\nu}{\mu} \quad (\mu > 0) \quad (2.40)$$

$$I(\tau_\nu, \mu) = \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu) \exp \left[\frac{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)}{-\mu} \right] \frac{d\tau'_\nu}{-\mu} \quad (\mu < 0) \quad (2.41)$$

となる。これは直接 (2.39) に代入することで確認できる。前者は $\tau_\nu \rightarrow \infty$ となる星の十分内側においては外側に向かう光子の強度が無視できるという境界条件を課した。また、後者は $\tau_\nu \rightarrow 0$ となる星の表面において、星の外からの光子の入射はないという境界条件を課した。

星の内部は、平均自由行程が星の大きさよりずっと短く光学的に厚いために、輻射場がほぼ等方的になっている。この場合、輻射輸送方程式は、拡散近似という近似によりもっと簡単な形で書くことができる。実際に星内部が光学的に厚く、輻射場がほぼ等方的であることを見よう。まず太陽のような星の内部における光子の平均自由行程

$$\ell_{\text{ph}} = \frac{1}{\kappa\rho} \quad (2.42)$$

を見積もる。ここで κ は振動数について平均した吸収係数である。星内部における平均的な値は $\kappa \simeq 1 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ で、星内部のイオン化水素を考えた場合には下限は電子散乱の値で決まり、 $\kappa \simeq 0.4 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ である。これと太陽の平均密度 $\bar{\rho}_\odot = 3M_\odot/4\pi R_\odot^3 = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$ を用いると

$$\ell_{\text{ph}} = 2 \text{ cm} \quad (2.43)$$

を得る。従って、星の内部は光学的に厚い。続いてこの場合に輻射場がほぼ等方的であることを見る。星内部の典型的な温度勾配は、大雑把に星中心の温度 ($T_c \simeq 10^7 \text{ K}$) と星表面の温度 ($T_0 \simeq 10^4 \text{ K}$) から得られ

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} \simeq \frac{T_c - T_0}{R_\odot} \simeq 1.4 \times 10^{-4} \text{ K cm}^{-1} \quad (2.44)$$

である。光子の平均自由行程程度の距離での温度勾配は $\Delta T = \ell_{\text{ph}}(dT/dr) \simeq 3 \times 10^{-4} \text{ K}$ である。その距離での輻射場の非等方性は、光子のエネルギー密度が $u \propto T^4$ であることから、 $T = 10^7 \text{ K}$ とすると

$$\frac{\Delta u}{u} = 4 \frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-10} \quad (2.45)$$

となる。そのため、輻射場はほぼ等方的である。

実際に拡散近似を使って、星の内部の輻射輸送方程式を導く。光学的厚みが十分大きい場合には、 $\tau_\nu (\gg 1)$ の近傍において源泉関数は

$$S(\tau'_\nu) \simeq B_\nu(\tau_\nu) + \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu}(\tau'_\nu - \tau_\nu) \quad (2.46)$$

と展開できる。ここで B_ν は黒体輻射の場合の比強度であり

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (2.47)$$

である。(2.46) を形式解 (2.40) と (2.41) に代入すると

$$I_\nu \simeq B_\nu + \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \quad (\mu > 0) \quad (2.48)$$

$$I_\nu \simeq B_\nu + \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} + \mathcal{O}(e^{-\tau_\nu/|\mu|}) \quad (\mu < 0) \quad (2.49)$$

を得る。光学的厚み τ_ν が大きいので、後者の $e^{-\tau_\nu/|\mu|}$ に比例する項は無視できる。星内部の比フラックスは I_ν を用いて

$$F_\nu = \int_{4\pi} I_\nu n d\Omega \quad (2.50)$$

と計算できる。光の進行方向は円筒座標系で書くと、図 2.4 から $\mathbf{n} = \sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\hat{z}$ と書ける。ここで $\hat{\rho}$ は動径座標方向の単位ベクトルである。これを使うと比フラックスは、 z 成分のみ残ることが分かり

$$F_\nu = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \quad (2.51)$$

$$= -\frac{c}{3\kappa_\nu\rho} \frac{\partial u_\nu}{\partial z} \quad (2.52)$$

となる。2つ目の行は、 τ_ν を z で書き換え、光速を c として比エネルギー密度が $u_\nu = 4\pi B_\nu/c$ と書けることを用いた。この式は

$$F_\nu = -D_\nu \nabla u_\nu \quad (2.53)$$

の形で書ける。ここで

$$D_\nu = \frac{1}{3} c l_\nu = \frac{c}{3\kappa_\nu\rho} \quad (2.54)$$

は拡散係数である。吸収係数の振動数平均を

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} (\partial u_\nu / \partial T) d\nu}{\int_0^\infty (\partial u_\nu / \partial T) d\nu} \quad (2.55)$$

とする。これはロスランド平均 (Rosseland mean) と呼ばれる。これと、黒体放射のエネルギー密度

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = aT^4 \quad (2.56)$$

$$a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} = 7.57 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad (2.57)$$

を用いると、(2.52) のフラックスは

$$F = -\frac{c}{3\rho\kappa} 4aT^3 \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.58)$$

となる。ここで a は放射密度定数、 h はプランク定数である。この式は熱伝導の基本法則であるフーリエの法則の形であり

$$F = -k_{\text{rad}} \nabla T \quad (2.59)$$

と書ける。ここで

$$k_{\text{rad}} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa\rho} \quad (2.60)$$

は輻射輸送についての伝導係数 k_{rad} である。(2.58) を、 z を r と見なし、フラックスと光度 l の関係 $F = l/4\pi r^2$ を使って整理すると、輻射輸送についての基礎方程式

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3}{16\pi ac} \frac{\kappa \rho l}{r^2 T^3} \quad (2.61)$$

を得る。ラグランジュ形式に直すと

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\kappa l}{r^4 T^3} \quad (2.62)$$

となる。

熱伝導によるエネルギーの輸送

熱伝導では、エネルギーは物質の熱運動により起きる衝突を通して輸送される。太陽のような通常の星では、物質の平均自由行程は光子と比べてずっと短く速度も光子に比べて遅い。そのため、拡散係数は(2.54)にあるように速度と平均自由行程に比例するが、熱伝導の拡散係数は光子のものと比べてずっと小さい。これは(2.53)から分かるように、熱伝導のフラックスが光子のものと比べてずっと小さいことを意味する。そのため、白色矮星の内部のような物質(電子)の平均自由行程が長くなる状況を考えない限りは、熱伝導によるエネルギー輸送は輻射による輸送と比べて重要ではない。

熱伝導は輻射と同じ式で記述できるため、まとめて取り扱うことができる。熱伝導はフーリエの法則

$$\mathbf{F}_{\text{cd}} = -k_{\text{cd}} \nabla T \quad (2.63)$$

によって記述される。輻射のフラックス F_{rad} を(2.59)により定義すると、熱伝導と合わせてフラックスは

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{rad}} + \mathbf{F}_{\text{cd}} = -(k_{\text{rad}} + k_{\text{cd}}) \nabla T \quad (2.64)$$

となる。ここで出てきた熱伝導の伝導係数を、(2.60)の輻射のものと同じ形

$$k_{\text{cd}} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa_{\text{cd}} \rho} \quad (2.65)$$

に書くことで、熱伝導の吸収係数 κ_{cd} を定義すると、(2.64)は

$$\mathbf{F} = -\frac{4ac T^3}{3 \rho} \left(\frac{1}{\kappa_{\text{rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cd}}} \right) \nabla T \quad (2.66)$$

となる。輻射と熱伝導両方合わせた吸収係数 κ を

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{\text{rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cd}}} \quad (2.67)$$

とすると、(2.66)から、輸送方程式は輻射のみの場合と同じ形(2.62)に書ける。

(2.62)は後々のために便利な形に書き換えられる。静水圧平衡を仮定して(2.17)を用いると、(2.62)は

$$\frac{\partial T / \partial m}{\partial P / \partial m} = \frac{3}{16\pi ac G} \frac{\kappa l}{m T^3} \quad (2.68)$$

となる。この左辺は $(dT/dP)_{\text{rad}}$ と書かれ、静水圧平衡にありかつエネルギーが輻射（と熱伝導）により輸送される星の場合には、内部の深さを星の内へ行くほど単調に大きくなる圧力で表した場合の温度勾配を意味する。慣習的に使われる

$$\nabla_{\text{rad}} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{rad}} \quad (2.69)$$

という量を用いると、(2.68) は

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa l P}{m T^4} \quad (2.70)$$

となる。これは系が断熱的と仮定した場合に実現される温度勾配

$$\nabla_{\text{ad}} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_s \quad (2.71)$$

とは異なることに注意（付録 B の (B.21)）。

∇_{rad} はもっと一般的な場合にも使われる。すなわち、次に説明する対流によるエネルギー輸送がある場合や、静水圧平衡を仮定できない場合にも使われる。この場合 ∇_{rad} は、星が静水圧平衡にあってかつエネルギー輸送が輻射と熱伝導のみによって起きるとした場合に実現される温度勾配という意味になり、もはや星内部の実際の温度勾配を意味するのではないことに注意。

対流によるエネルギーの輸送

対流では、エネルギーは温度の高い物質と低い物質が混ぜ合わさることで輸送される。これによるエネルギーの輸送は対流不安定性の条件を満たした時に重要となる。

まずは不安定性が起きる条件について考える。対流を考える際に重要である不安定性は力学不安定性である。これは動いている質量要素が周囲と熱を交換する時間がなく断熱的に動く場合を考えた時に起きる不安定性である。星内部の局所的な部分の物理量 A の揺らぎを考えるために、断熱的に動いている質量要素（添字 e : element）の物理量 A_e と周囲（添字 s : surroundings）の同じ物理量 A_s の差を

$$DA \equiv A_e - A_s \quad (2.72)$$

と表す。例えば質量要素が、周囲と平衡状態にある部分から、周囲が少し熱い部分に動いたとすると、 $DT > 0$ となる。この場合には圧力の差 $DP > 0$ も生じると予想されるが、質量要素は音速程度の速さで膨張し、これは普通は他の変化と比べてずっと速い。そのため、質量要素は周囲と常に圧力が釣り合っている状態であるとして

$$DP = 0 \quad (2.73)$$

と仮定する。

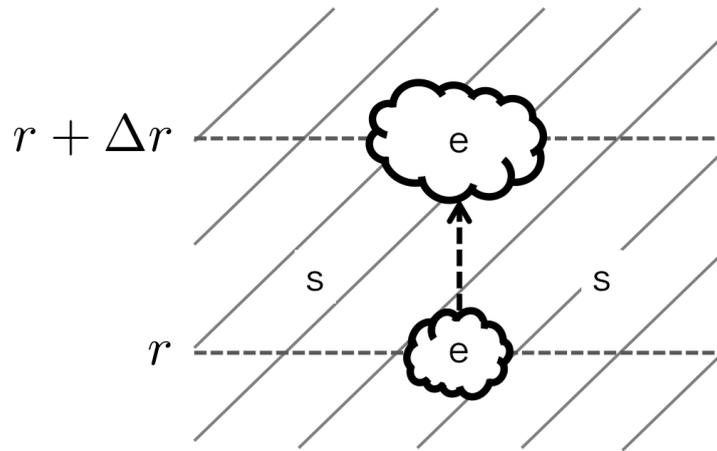


図 2.5: 周囲の層の安定性を調べるために、質量要素が r から $r + \Delta r$ に持ち上げられる状況を考える。

安定性を調べるために、摂動として、質量要素が周囲と平衡にある位置 r から $\Delta r (r > 0)$ だけ動いたとする (図 2.5)。一般に質量要素の密度は周囲とは

$$D\rho = \left[\left(\frac{d\rho}{dr} \right)_e - \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_s \right] \Delta r \quad (2.74)$$

だけ異なる。第 1 項は要素に関する密度勾配で、第 2 項は周囲に関する密度勾配である。要素に対する単位体積あたりの浮力は、重力加速度の絶対値を g として $K_r = -gD\rho$ となる。もし $D\rho > 0$ であれば、要素は周囲より重いためにもとの位置に戻るよう動く。逆に $D\rho < 0$ であれば、要素は周囲より軽くさらに上に動いていく。前者の場合は安定で、後者の場合は不安定である。従って、安定性の条件は

$$\left(\frac{d\rho}{dr} \right)_e - \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_s > 0 \quad (\text{stable}) \quad (2.75)$$

となる。以下ではこの式をより扱いやすい形に変形する。簡単のため、ここでは質量要素が周囲とエネルギーの交換をせず、断熱的に動いたと仮定する。これは星内部深いところの状況に近い。密度の勾配を温度勾配に書き換えるために、状態方程式を $\rho = \rho(P, T, \mu)$ とすると、微分の形では

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T} + \varphi \frac{d\mu}{\mu} \quad (2.76)$$

と書ける。ここでは化学組成の変化を許し、それが平均分子量 μ で表せるとした。係数は

$$\alpha \equiv \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_{T, \mu}, \quad \delta \equiv - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{P, \mu}, \quad \varphi \equiv \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{P, T} \quad (2.77)$$

と定義される。理想気体の場合 $\rho \sim P\mu/T$ では $\alpha = \delta = \varphi = 1$ である。ここでは μ の変化は核種の変化のみを表すとした。電離度による μ の変化は T と P でよく記述できることが知られているため、この効果は α と δ に含まれていると考える。従って動いている要素については、もとの化学組成を保っているので $d\mu = 0$ であり、周囲については要素が動

く間に化学組成が変化する可能性があるので一般に $d\mu \neq 0$ である。このことから (2.75) は、(2.76) を用いて

$$\left(\frac{\alpha dP}{P dr}\right)_e - \left(\frac{\delta dT}{T dr}\right)_e - \left(\frac{\alpha dP}{P dr}\right)_s + \left(\frac{\delta dT}{T dr}\right)_s - \left(\frac{\varphi d\mu}{\mu dr}\right)_s > 0 \quad (2.78)$$

と書ける。2つの圧力勾配の項は、(2.73) から打ち消し合う。そのためこの式は、圧力のスケールハイト

$$H_P \equiv -\frac{dr}{d \ln P} = -P \frac{dr}{dP} \quad (2.79)$$

を掛けて（圧力は星の外に向かって小さくなるので $H_P > 0$ ）

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_s < \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_e + \frac{\varphi}{\delta} \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P}\right)_s \quad (2.80)$$

となる。前に出てきた ∇_{rad} や ∇_{ad} と同様に、周囲についての温度勾配 ∇ 、要素についての温度勾配 ∇_e 、化学組成の勾配 ∇_μ を

$$\nabla \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_s, \quad \nabla_e \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_e, \quad \nabla_\mu \equiv \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P}\right)_s \quad (2.81)$$

を定義すると、(2.80) は

$$\nabla < \nabla_e + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_\mu \quad (\text{stable}) \quad (2.82)$$

となる。周囲の温度勾配 ∇ は、星の内部の実際の温度勾配に対応する。全てのエネルギーが輻射によって輸送されていれば、実際の温度勾配 ∇ は (2.70) にある ∇_{rad} に一致する。そのような層で、要素が断熱的に動いているとして $\nabla_e = \nabla_{\text{ad}}$ として安定性をテストすると

$$\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_\mu \quad (\text{stable}) \quad (2.83)$$

となる。これは力学安定性に対するルドゥー臨界 (Ledoux criterion) と呼ばれる。化学組成が一様で $\nabla_\mu = 0$ に対する領域では、これはシュバルツシルト臨界 (Schwarzschild criterion)

$$\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}} \quad (\text{stable}) \quad (2.84)$$

になる。

もし安定性条件が満たされていれば、対流は起こらず、全てのフラックスは輻射によって運ばれ、 $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ となる。逆の場合対流不安定性が起きて、一部のフラックスは対流によって運ばれ、実際の温度勾配 ∇ はのちに述べる混合距離理論 (mixing length theory) によって求められる。

(2.83) や (2.84) は、要素が動いている間に周囲とエネルギーをやりとりする場合にも適用できる。これは星の表面付近の状況に対応する。これを説明するために、一様な化学組成の層で、対流不安定が起きている状況を考えよう。この場合 $\nabla_\mu = 0$ であり、(2.82) から $\nabla > \nabla_e$ である。一部のフラックスは対流によって運ばれるので、実際の温度勾配 ∇ は全てのフラックスが輻射によって運ばれた時に実現される温度勾配 ∇_{rad} よりも小さく、 $\nabla < \nabla_{\text{rad}}$ である。要素が、圧力が小さく温度が低い領域の方向に動くと、要素の熱は動

いている間に周囲に奪われ冷える。すなわち、要素は断熱的であった場合よりも速く冷える。これは $\nabla_e > \nabla_{\text{ad}}$ を意味する。全てをまとめると、対流不安定が起きている時は常に

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_e > \nabla_{\text{ad}} \quad (2.85)$$

が満たされている。従って $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$ である時は $\nabla > \nabla_e$ も同時に満たされていると言える。そのため、要素が断熱的に動いていない時にも (2.84) を安定性の判定に使える。化学組成が変化する場合 ($\nabla_\mu \neq 0$) も同様である。

本研究では化学組成が大きく変化する状況は考えないため、シュバルツシルト臨界で対流不安定性を判断する。化学組成が大きく変化する場合にシュバルツシルト臨界を用いても、星の進化の振る舞いは、詳細を除いて大きく変わらない。

続いて対流が重要となる場合にエネルギー輸送の式がどのようになるかを見ていく。対流の効果は通常、混合距離理論という標準的に使われている理論を用いて取り入れられる。この理論は厳密ではないが、星の進化の観測をよく説明できることで知られている。この理論では、対流でエネルギーを輸送する「粒子」はマクロな質量要素であり、それらの平均自由行程は要素が周囲に溶け込むまでの混合距離 (mixing length) であると考えられる。以下では静水圧平衡を仮定する。

全フラックス $l/4\pi r^2$ は、輻射のフラックス (熱伝導含む) F_{rad} と、対流のフラックス F_{con} の和である。この和は (2.70) の ∇_{rad} を用いて

$$\begin{aligned} F_{\text{rad}} + F_{\text{con}} &= \frac{l}{4\pi r^2} \\ &= \frac{4acG}{3} \frac{T^4 m}{\kappa P r^2} \nabla_{\text{rad}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

と書き換えることができる。一方輻射フラックスは静水圧平衡の式 (2.16) と (2.58) を用いて

$$F_{\text{rad}} = \frac{4acG}{3} \frac{T^4 m}{\kappa P r^2} \nabla \quad (2.87)$$

と書ける。温度勾配 ∇ はこの時点では未知数である。

温度が周囲と DT だけ違う質量要素を考える。これが速度 v で動いていて、圧力は (2.73) で考えたように周囲と釣り合っていて $DP = 0$ とする。これにより対流による局所的なフラックスは、単位質量当たりの定圧比熱 c_p (付録 B の (B.5)) を用いて

$$F_{\text{con}} = \rho v c_p DT \quad (2.88)$$

と書ける。星の半径 r における対流のフラックスを求めるには、その半径において vDT を平均化したものを考えることになる。この平均化が、混合距離理論において対流を厳密に取り扱うことを困難にする部分である。

全ての質量要素が運動の初期に $DT \simeq 0$ 、 $v_0 \simeq 0$ であったとする。それぞれの要素は浮力を受けるため、上昇又は下降するとともに DT 、 v の絶対値は大きくなり、混合距離 l_m だけ動いた後に周囲と混ざり合う。ある瞬間に半径 r の球面を横切る多くの要素は、既に距離 l_m だけ運動したのもあれば、その半径で運動を始めるものもあるため、異なる

DT 、 v の値を持つ。それらの要素が球面を横切る前に平均的に $\ell_m/2$ だけ動いていたとすると、平均的な DT は

$$\begin{aligned} DT &= \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)_e - \left(\frac{dT}{dr} \right)_s \right] \Delta r \\ &= -\frac{T}{H_P} (\nabla_e - \nabla) \Delta r \end{aligned} \quad (2.89)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \frac{DT}{T} &= \frac{1}{T} \frac{\partial(DT)}{\partial r} \frac{\ell_m}{2} \\ &= (\nabla - \nabla_e) \frac{\ell_m}{2} \frac{1}{H_P} \end{aligned} \quad (2.90)$$

となる。密度の差は ($DP = D\mu = 0$ で) $D\rho/\rho = -\delta DT/T$ であるので、単位質量当たりの浮力は $k_r = -gD\rho/\rho$ となる。平均的にはこの半分の値の浮力が、 $\ell_m/2$ だけ進んでいる時の要素にかかっていたとして、要素になされた単位質量当たりの仕事は

$$\frac{1}{2} k_r \frac{\ell_m}{2} = g\delta (\nabla - \nabla_e) \frac{\ell_m^2}{8H_P} \quad (2.91)$$

となる。この仕事の半分が運動エネルギーに、残り半分が周囲に運ばれたとすると、球面を横切る要素の平均的な速度は

$$v^2 = g\delta (\nabla - \nabla_e) \frac{\ell_m^2}{8H_P} \quad (2.92)$$

となる。これと (2.90) を (2.88) に代入して

$$F_{\text{con}} = \rho c_P T \sqrt{g\delta} \frac{\ell_m^2}{4\sqrt{2}} H_P^{-3/2} (\nabla - \nabla_e)^{3/2} \quad (2.93)$$

を得る。最後に、動いている間の要素の内部温度の変化を考える。これは要素の断熱膨張・収縮や、輻射エネルギーの交換によって起きる。要素が直径 d 、表面積 S 、体積 V を持つと考える。単位時間あたりに輻射により失う全エネルギーを λ とすると、これに対応する、単位長さ要素が動いて減少する温度は $\lambda/\rho V c_P v$ であり、単位長さあたりの要素の温度変化は断熱膨張・収縮の効果も合わせて

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_e = \left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{ad}} - \frac{\lambda}{\rho V c_P v} \quad (2.94)$$

となる。これに H_P/T を掛けると

$$\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} = \frac{\lambda H_P}{\rho V c_P v T} \quad (2.95)$$

を得る。要素と周囲との間の温度勾配を $|\nabla T| \approx 2DT/d$ として輻射輸送の式 (2.59) を考えると、 λ は、表面積 S から出るフラックス f の総量と考えることが出来て

$$\lambda = S f = \frac{8acT^3}{3\kappa\rho} DT \frac{S}{d} \quad (2.96)$$

となる。これを (2.90) を用いて書き換え、(2.95) に代入すると

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla - \nabla_e} = \frac{4 S \ell_m}{3 V d} \frac{acT^3}{\kappa \rho^2 c_P v} \quad (2.97)$$

となる。ここで出てきた $S \ell_m / V d$ は、直径 ℓ_m の球を考えると $6/\ell_m$ となる。文献ではしばしば

$$\frac{S \ell_m}{V d} = \frac{9/2}{\ell_m} \quad (2.98)$$

が用いられる。ここではこれを使うことにすると (2.97) は

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla - \nabla_e} = \frac{6acT^3}{\kappa \rho^2 c_P \ell_m v} \quad (2.99)$$

となる。

ここでの取り扱いでは、混合距離 ℓ_m を決める物理を考えていないことに注意。そのため、 ℓ_m はパラメータとして扱われる。通常、この値は H_P 程度であるとされる。

ここまでで、 P 、 T 、 ρ 、 l 、 m 、 c_P 、 ∇_{ad} 、 ∇_{rad} 、 g が与えられれば F_{rad} 、 F_{con} 、 v 、 ∇_e 、 ∇ が決まる5つの方程式 (2.86)、(2.87)、(2.92)、(2.93)、(2.99) を得た。まず (2.99) の v を (2.92) を使って置き換えると

$$\nabla_e - \nabla_{\text{ad}} = 2U \sqrt{\nabla - \nabla_e} \quad (2.100)$$

を得る。ここで無次元量

$$U \equiv \frac{3acT^3}{c_P \rho^2 \kappa \ell_m^2} \sqrt{\frac{8H_P}{g\delta}} \quad (2.101)$$

を定義した。スケールハイトの式 (2.79) を静水圧平衡の式 (2.16) を使って

$$H_P = \frac{Pr^2}{Gm\rho} \quad (2.102)$$

と書き換えると、(2.86) と、(2.87) と (2.93) の和が等しいことから

$$(\nabla - \nabla_e)^{3/2} = \frac{8}{9} U (\nabla_{\text{rad}} - \nabla) \quad (2.103)$$

を得る。ここまでで未知数 F_{rad} 、 F_{con} 、 v を消去した2つの式 (2.100) と (2.103) を得たことになる。さらに未知数 ∇_e を消去するために、(2.100) の左辺を $(\nabla - \nabla_{\text{ad}}) - (\nabla - \nabla_e)$ の形にして、 $\sqrt{\nabla - \nabla_e}$ についての2次方程式を解くと

$$\sqrt{\nabla - \nabla_e} = -U + \xi \quad (2.104)$$

を得る。ここで

$$\xi = \sqrt{\nabla - \nabla_{\text{ad}} + U^2} \quad (2.105)$$

である。(2.103) の左辺に (2.104) を代入し、右辺の ∇ を (2.105) を使って ξ で置き換えて、 ξ についての3次方程式

$$(\xi - U)^3 + \frac{8U}{9} (\xi^2 - U^2 - W) = 0 \quad (2.106)$$

を得る。ここで無次元量

$$W \equiv \nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} \quad (2.107)$$

を定義した。(2.106)の解法は付録 C にまとめられている。以上により、対流が起きている場合についての実際の温度勾配 ∇ を計算できる。

(2.101)の U は (2.87) を $F_{\text{rad}} = \sigma_{\text{rad}} \nabla$ 、(2.93) を $F_{\text{con}} = \sigma_{\text{con}} (\nabla - \nabla_e)^{3/2}$ と書くと、 $\sigma_{\text{rad}}/\sigma_{\text{con}} = 8U/9$ であることから、物理的には輻射の伝導率と対流の伝導率の比であると解釈できる。ここで温度勾配 ∇ が極限的な場合にどのようなようになるか見てみよう。

$U \rightarrow 0$ の場合、(2.100) から $\nabla_e \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ が分かる。さらに (2.103) から、 $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ が分かる。この極限は星の内部深いところでの対流領域に対応する。この場合混合距離理論から ∇ を決める必要はなく $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ としてよく、この理論による不定性は出てこない。

$U \rightarrow \infty$ の場合、(2.103)の左辺は有限でなければいけないので、 $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{rad}}$ となる。この場合対流は起きず、輻射によってエネルギーが運ばれる。この極限は星の表面近い領域に対応する。この場合も混合距離理論から ∇ を決定する必要はないため、理論の不定性は関係しない。

この2つの極限の間では、状況が難しくなる。星表面付近で対流が起きる場合は $\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_{\text{ad}}$ となることがあり、この領域は超断熱 (superadiabatic) 領域と呼ばれる。

エネルギー輸送の式は (2.106) の解である (C.13) と、静水圧平衡の式 (2.17) を用いて

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{T}{P} \frac{Gm}{4\pi r^4} \nabla \quad (2.108)$$

となる。

エネルギー輸送の式のまとめ

既に述べたように、シュバルツシルトの安定性条件 (2.84) が満たされている時には、エネルギー輸送は輻射的となり、エネルギー輸送の式はラグランジュ形式で (2.62) と書ける。安定性条件が破れている時にはエネルギー輸送は対流的となり、エネルギー輸送の式は (2.108) となる。(2.108) は $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ と置けば輻射輸送の式になるので、両者の場合のエネルギー輸送の式と考えることができる。

しかしながら (2.108) は星が静水圧平衡の時にのみ正しいので、星が静水圧平衡でない時には修正される必要がある。輻射輸送の場合には、(2.62) を導く際に静水圧平衡を仮定しなかったため、これをそのまま用いればよい。一方対流輸送の場合には、 ∇ を求める際に静水圧平衡を考えていたので、3次方程式 (2.106) をそのまま使うことはできない。しかし静水圧平衡の場合、(C.13) から計算される星の内部の対流層での温度勾配は、星の表面付近の対流領域を除き $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ となっている。そのため、静水圧平衡でない場合も対流層の温度勾配は多くの場合断熱温度勾配であると予想される。この断熱温度勾配の表式 (B.21) は静水圧平衡を仮定していない。そのため、(2.106) をそのまま使うことによる影響は小さいと考えられる。結局静水圧平衡を仮定しない場合には、エネルギー輸送の式は (2.108) の代わりに

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{T}{P} \left(\frac{Gm}{4\pi r^4} + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right) \nabla \quad (2.109)$$

となる。

2.1.5 物質の組成変化の式

星の物質の化学組成は、輻射の吸収や核反応によるエネルギー生成などの性質に影響するため、重要である。星内部において物質の化学組成が大きく変化するのは、核反応が起きる時と対流が起きるときである。拡散によっても化学組成は変わりうるが、他の2つに比べて組成変化への影響は小さいことが知られている。ここでは輻射領域と対流領域における物質の組成変化についてそれぞれ説明する。前者の場合はほとんど核反応のみによって組成変化が決まる。後者の場合は核反応と対流の両方が組成変化を決める。

それぞれの化学組成変化を説明する前に、少し前置きをする。星内部は高温・高圧であるために、化合物はなくほとんどの物質は電離している。そのため化学組成の変化を見る時、異なる核種のそれぞれの割合を見て、それらがどのように変化していくかを追えば十分である。

核種 i の質量比を X_i とする。規格化条件は

$$\sum_i X_i = 1 \quad (2.110)$$

である。時刻 t 、質量座標 m における化学組成は $X_i(m, t)$ で記述される。

核種 i の数密度が n_i で、質量が m_i であるとする、質量比 X_i との関係は

$$X_i = \frac{m_i n_i}{\rho} \quad (2.111)$$

である。

通常、多くの核種の組成 X_i を特定する必要はない。これは、ほとんどの核種は少なく、星の進化に影響を与えないためである。進化の過程にある星の中でもっとも豊富に存在する2つの組成は水素とヘリウムである。そのため多くの場合、水素・ヘリウムとその他の元素を別に取り扱い、質量比をそれぞれ

$$X \equiv X_{\text{H}}, \quad Y \equiv X_{\text{He}}, \quad Z \equiv 1 - X - Y \quad (2.112)$$

と定義して考える。さらに炭素・窒素・酸素は水素燃焼で重要であるため、 Z の中でもこれらの組成は分けて考えられる。

輻射領域での組成変化の式

エネルギー輸送が輻射的であり拡散が無視できる場合、異なる質量座標間での物質の交換はない。そのため、その質量座標における核反応が核種 i を生成又は破壊することを通してのみ X_i は変化する。

核種 l を核種 m に変換する反応の、単位体積、単位時間あたりの反応数を r_{lm} とする。これは反応率と呼ばれる。一般に核種 i は同時に多くの反応に影響される。いくつかの反応は反応率 r_{ji} で核種 i を生成し、またいくつかの反応は反応率 r_{ik} で核種 i を破壊する。これらの反応率は直接的に数密度 n_i の単位時間あたりの変化量を与える。そのため (2.111) より、反応に関係する I 個の各核種 i について、 X_i の時間変化は

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), \quad i = 1, \dots, I \quad (2.113)$$

となる。これが輻射領域における物質の組成変化の式である。ここで、1回の反応で反応する核種 i の個数が複数個である場合には、和の中の反応率は核種 i が反応する個数で規格化されなければならない。

対流領域での組成変化の式

エネルギー輸送が対流的である場合、その領域での組成は混ざり合う。核反応の時間スケールよりも対流の時間スケールはずっと短いため、対流領域は常に組成が一様であると考えられ

$$\frac{\partial X_i}{\partial m} = 0 \quad (2.114)$$

とすることができる。これが満たされるためには、核反応によって新たに生成された核だけでなく、全ての核種が混ざり合うことが必要である。

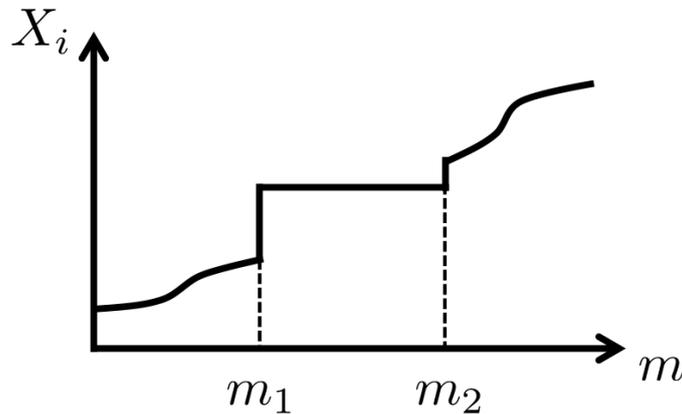


図 2.6: 対流領域 m_1 から m_2 までにおいて組成 X_i はならされる。境界で組成は不連続になる。

対流領域が図 2.6 のように m_1 から m_2 まで広がっているとしよう。その領域では全ての核種 i について組成 $X_i = \bar{X}_i$ は一定である。その両境界では組成 X_i は一般に不連続となっていて、対流領域の外側における組成 X_{i1} 、 X_{i2} は \bar{X}_i とは異なる値である。このことと、境界での質量座標 m_1 と m_2 が時間とともに変化することから、対流領域における組成の時間変化は

$$\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial t} = \frac{1}{m_2 - m_1} \left[\int_{m_1}^{m_2} \frac{\partial X_i}{\partial t} dm + (m_2 \text{ が動いた分の寄与}) - (m_1 \text{ が動いた分の寄与}) \right] \quad (2.115)$$

となる。大括弧の中の積分は、対流領域における核反応の寄与を表している。

実際の計算では、まず星の全領域で核反応による組成の変化を計算した後、対流領域における組成を平均化することで、対流領域の組成変化を考える。

2.1.6 初期条件と境界条件

ここまでで、星の物質の性質を表す関数 ρ 、 ε 、 ε_ν 、 κ 、 c_P 、 ∇_{ad} 、 δ 、 r_{ij} が P 、 T 、 X_i の関数として与えられていれば、 r 、 P 、 l 、 T と $X_i (i = 1, \dots, I)$ の $4 + I$ 個の未知数を求めることができる $4 + I$ 個の方程式、すなわち

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - \varepsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.118)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{T}{P} \frac{Gm}{4\pi r^4} \nabla \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), \quad i = 1, \dots, I \quad (2.120)$$

を得た。エネルギー輸送の式は、温度勾配として輻射領域では (2.70) の ∇_{rad} 、対流領域では混合距離理論から計算される (C.13) の ∇ を用いる。物質の組成変化の式は対流領域の場合には (2.115) を用いる。

これらの方程式を解くためには、更に初期条件と境界条件を課さなければならない。初期条件については、時間微分がかかっている変数について与えれば良い。すなわち初期時刻 t_0 において、 $r = r(m, t_0)$ 、 $\dot{r} = \dot{r}(m, t_0)$ 、 $T = T(m, t_0)$ 、 $P = P(m, t_0)$ 、 $X_i = X_i(m, t_0)$ を与えれば良い。エネルギー方程式 (2.118) に現れる圧力と温度の時間微分は、もともとエントロピーの時間微分 (2.32) で与えられていたので、温度と圧力の初期条件を与える代わりに、エントロピーの初期条件 $s = s(m, t_0)$ を与えても良い。

境界条件は r 、 P 、 l 、 T について課す。物理的に合理的な境界条件について以下で考える。

星の中心においては、半径が 0 であつエネルギー源が有限であるという条件

$$r = 0, \quad l = 0, \quad (m = 0) \quad (2.121)$$

を課す。星の中心における圧力 P_c と温度 T_c は、第一原理的に知ることは出来ないため、これらの量に中心での境界条件を与えることは出来ない。

時刻固定で、中心付近 $m \rightarrow 0$ における r 、 l 、 P 、 T の振る舞いを知ることは後々便利である。質量保存の式 (2.116) は

$$d(r^3) = \frac{3}{4\pi\rho} dm \quad (2.122)$$

と変形できる。十分小さい領域では密度は中心での値からずれず、 $\rho = \rho_c$ と考えて良い。このことから

$$r = \left(\frac{3}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3} m^{1/3} \quad (2.123)$$

を得る。エネルギー保存の式は中心付近では

$$l = \left(\varepsilon - \varepsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \right)_c m \quad (2.124)$$

となる。どちらの場合も、境界条件 (2.121) を考慮して積分定数を 0 としている。運動量保存の式 (2.117) で、静水圧平衡を仮定した場合の式は、(2.123) を用いると

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{G}{4\pi} \left(\frac{4\pi\rho_c}{3} \right)^{4/3} m^{-1/3} \quad (2.125)$$

となる。これを積分することで、中心領域における圧力の式

$$P = P_c - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G \rho_c^{4/3} m^{2/3} \quad (2.126)$$

を得る。エネルギー輸送の式 (2.119) は、まず輻射領域において

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\kappa l}{r^4 T^3} \quad (2.127)$$

と書けていた。吸収係数 κ は中心において κ_c であるとし、これに (2.123) と (2.124) を代入して積分すると

$$T = T_c - \frac{\kappa_c \varepsilon_c}{8acT_c^3} \rho_c^{4/3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} m^{2/3} \quad (2.128)$$

となる。ここで m は十分小さいとした。また、 $\varepsilon_c = \{ \varepsilon - \varepsilon_\nu - c_P (\partial T / \partial t) + (\delta / \rho) (\partial P / \partial t) \}_c$ と略した。さらにこれを

$$\nabla_{\text{rad},c} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa_c \varepsilon_c P_c}{T_c^4} \quad (2.129)$$

を用いて書き換えると

$$T = T_c - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G \left(\frac{\rho_c}{P_c} \right)^{4/3} \nabla_{\text{rad},c} T_c m^{2/3} \quad (2.130)$$

となる。対流領域におけるエネルギー輸送の式で、温度勾配が ∇_{ad} である場合は、 ∇_{ad} の中心での値を $\nabla_{\text{ad},c}$ とし、 $P = P_c$ として、(2.123) を使い、積分すると

$$\ln T - \ln T_c = -\frac{G \nabla_{\text{ad},c}}{2P_c} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \rho_c^{4/3} m^{2/3} \quad (2.131)$$

となる。再び m が十分小さいとして、指数関数を展開すると

$$T = T_c - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G \left(\frac{\rho_c}{P_c} \right)^{4/3} \nabla_{\text{ad},c} T_c m^{2/3} \quad (2.132)$$

となる。(2.130) と (2.132) は同じ形であるので、まとめて

$$T = T_c - \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G \left(\frac{\rho_c}{P_c} \right)^{4/3} \nabla_c T_c m^{2/3} \quad (2.133)$$

と書ける。ここで ∇_c は、輻射領域であれば $\nabla_{\text{rad},c}$ 、対流領域で断熱的であれば $\nabla_{\text{ad},c}$ である。

星の表面での境界条件は、最も簡単な場合

$$P \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0, \quad (m \rightarrow M_*) \quad (2.134)$$

とする。これは星の表面においては圧力が0になり、温度が内部と比較してずっと低いことを反映している。

しかし現実では、星の表面より外側でも圧力や温度は完全には0でない。より正確に星表面の境界条件を与えるためには、星の大気の構造を解いて、これを内部の解と接続する必要がある。この大気の解は内部の解と、あるフィッティング質量 m_F で繋がられる。ここでは $m_F < M_*$ とする。簡単のため、この m_F が十分 M_* に近く、大気中でのエネルギーの放出・吸収は無視できるとする。この場合大気の方程式としては、星内部で用いられる方程式 (2.116)、(2.117)、(2.120) で $l = L_*$ を一定としたものが使われる。物質組成は与えられていて、大気中で一様であるとする。これらの方程式は、 r の代わりに光学的厚さ $d\tau = -\kappa\rho dr$ を使って書き換えられ、星の外側 $\tau = 0$ であるところから内側に向かって $m = m_F$ となるところまで積分される。この m_F における温度と圧力が、星の表面側の境界条件となる。ここで注意することは、この場合の温度と圧力の境界条件は $m = M_*$ で与えられているのではなく、 $m = m_F < M_*$ で与えられていることである。2.2節で説明するように、この場合 P と T の数値格子は r と l の数値格子とずらして計算される。例えば r や l の一番外側の格子点は $m = M_*$ に対応し、それぞれ値は R_* 、 L_* となる。一方 P や T の一番外側の格子点は $m = m_F$ に対応し、それぞれの値は大気の解で与えられるものとなる。

大気の方程式を解く際に、星の半径が決まる。この具体的な内容を説明する前に、大気層における光学的厚みと温度の関係を導く。以下では輻射場は黒体輻射であると近似する。光学的厚みが $d\tau = -\kappa\rho dr$ であることから、(2.58) により

$$F = \frac{c}{3} \frac{d(aT^4)}{d\tau} \quad (2.135)$$

を得る。ここで大気層において、放射と吸収が平衡にあり、フラックスが一定であると仮定する。(2.135) を積分すると

$$aT^4 = 3\tau \frac{F}{c} + \text{const.} \quad (2.136)$$

となる。積分定数は、 $\tau = 0$ における温度を T_0 として aT_0^4 となる。また、 $\tau = 0$ での輻射場は外方向には等方的で、内側に向かうものはないというエディントン近似をすると、そこでのフラックスとエネルギー密度は比強度を用いて

$$F = \int_0^\infty d\nu \int_{2\pi} I_\nu \cos\theta d\Omega = \pi \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad (2.137)$$

$$u = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int_{2\pi} I_\nu d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty I_\nu d\nu = aT_0^4 \quad (2.138)$$

となる。これにより

$$F = \frac{caT_0^4}{2} \quad (2.139)$$

を得る。これと (2.136) から、温度と光学的厚みの関係

$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \quad (2.140)$$

を得る。

続いて星の表面の定義について説明する。星の有効温度 T_{eff} を

$$F = \frac{L_*}{4\pi R_*^2} = \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (2.141)$$

を満たす温度として定義する。物理定数 σ はステファン・ボルツマン定数である。この温度は星の表面温度と考えることができる。(2.139) と (2.141) から、 $\sigma = ac/4$ を使って

$$T_{\text{eff}} = 2^{1/4}T_0 \quad (2.142)$$

が得られる。これと (2.140) から、温度が星の表面温度に対応する有効温度 T_{eff} となる光学的厚みは $2/3$ であることが分かる。このことを踏まえて、通常 $\tau = 2/3$ となる半径 (光球半径) を星の半径 R_* と定義する。大気の方程式を解いて、 $\tau = 2/3$ となる位置での半径が R_* となる。

2.2 ヘニエイ法

数値計算をする時、一般に方程式の差分化の仕方によって取り扱い方が変わる。差分化した結果、未知の値を既知の値だけで明示的に表現できる場合、その手法は陽的手法と呼ばれる。逆に未知の値を既知の値だけでは表せない場合には、その手法は陰的手法と呼ばれる。陽的手法は、陰的手法と比較して実装が簡単であり計算コストもかからないが、計算の過程で数値的に不安定になる可能性がある。それと比較して、陰的手法はより数値的に安定に問題を解ける。

星の構造と進化の4つの方程式 (2.116)-(2.119) を数値的に陰的に同時に解く効率的な手法としてヘニエイ法が知られており、この手法が標準的によく用いられる。この節では”Numerical Methods in Astrophysics: An Introduction” (2007) を参考にヘニエイ法について説明する。以下では、時間についての差分化には添字として上付きの n を、空間についての差分化には添字として下付きの j を用いる。

星の構造と進化の4つの方程式は、前節で説明した初期条件・境界条件と、物質の性質に関する量の圧力・温度・組成依存性が与えられれば、時刻 t^n における完全なモデルが存在して組成が与えられているもとの、時刻 Δt 後の $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ に対して解くことができる。これにより時刻 t^{n+1} における完全なモデルが得られたら、組成 X_i は陽的に時刻 t^{n+1} に対して、(2.120) を用いて

$$X_i(t^{n+1}, m) = X_i(t^n, m) + \Delta t \left. \frac{\partial X_i}{\partial t} \right|_n \quad (2.143)$$

と解くことができる。対流がある場合は対流領域において組成はならされる。

星の構造の方程式を解くために、まず質量座標について J 個の格子点を割り当てる。その際、隣同士の格子点での質量座標 m_j と m_{j+1} において物理量が急激に変わらない程度に格子点を細かく割り当てる。一番目の格子点 $j = 1$ は一番中心に近い質量座標 $m \simeq 0$ での値を表し、最後の格子点 $j = J$ は一番表面に近い質量座標 $m \simeq M_*$ での値を表す。図 2.7 に、格子の配置を示す。位置 r_j と光度 l_j は質量座標 m_j において評価される。圧力

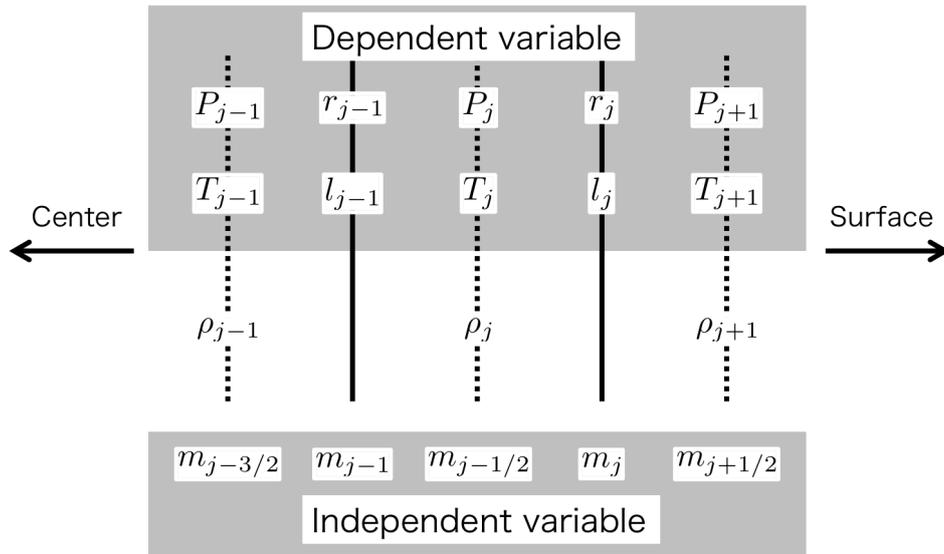


図 2.7: 星の構造の計算を行う際の格子の配置。圧力 P と温度 T を評価する質量座標は位置 r と光度 l を評価する質量座標の間である。密度 ρ や吸収係数 κ のような P 、 T 、 X_i に依存する関数は、 P や T と同じ質量座標で評価される。

P_j と温度 T_j は m_j と m_{j+1} の間の質量座標で評価される。この質量座標は $m_{j-1/2}$ と書かれる。このように、 r 、 l と P 、 T の質量座標を互い違いにとるのは、全てを同じ質量座標で評価する場合と比べて微分を差分にする時の誤差が小さくなるためである。

(2.116)、(2.117)、(2.118)、(2.119) を差分化すると

$$P_{j+1} - P_j + \frac{(m_{j+1/2} - m_{j-1/2})Gm_j}{4\pi r_j^4} = 0 \quad (2.144)$$

$$r_j^3 - r_{j-1}^3 - (m_j - m_{j-1})\frac{3}{4\pi\rho_j} = 0 \quad (2.145)$$

$$l_j - l_{j-1} - (m_j - m_{j-1}) \left[E_{\text{nuc},j} - c_{P,j} \frac{T_j - T_j^n}{\Delta t} + \frac{\delta}{\rho_j} \frac{P_j - P_j^n}{\Delta t} \right] = 0 \quad (2.146)$$

$$T_{j+1} - T_j + \frac{(m_{j+1/2} - m_{j-1/2})Gm_j}{4\pi r_j^4} 0.5(B_{j+1} - B_j) = 0 \quad (2.147)$$

となる。ここで $E_{\text{nuc}} = \varepsilon - \varepsilon_\nu$ である。また、 $B_j = T_j \nabla_j / P_j = (dT/dP)_j$ である。上添字の n は、前の時刻における物理量であることを表している。上添字がない物理量は全て $n + 1$ が省略されている。

ここでは互い違いの格子を考えているため、中心の境界条件に注意する必要がある。中心側の質量座標 m_1 は 0 でないため $r_1 = 0$ 、 $l_1 = 0$ とならない。この時、(2.145) と (2.146) は $j = 1$ で $r_0 = 0$ 、 $l_0 = 0$ 、 $m_0 = 0$ とする。このようにすることで、それぞれの式は中心における境界条件 (2.123) と (2.124) に一致する。また $m_{1/2}$ における圧力と温度は、それぞれ $P_1 = P_c$ 、 $T_1 = T_c$ とみなされ、(2.144) と (2.147) は $j = 1$ としてそのまま使われる。

表面での境界条件は、2.1.6 節で述べたように、大気の構造を解くことにより得られる。大気を解く際、入力は星の表面 $m_J = M_*$ の半径 $r_J = R_*$ と光度 $l_J = L_*$ で、出力はフィッティング質量 $m_F < M_*$ における圧力 P_{atm} と温度 T_{atm} 、大気の厚さ Δr_{atm} である。フィッティング質量は M_* に近い質量座標とされる。ここでは $m_F = m_{J-1/2}$ とする。これにより、表面の境界条件は

$$P_J - P_{\text{atm}}(r_J, l_J) = 0 \quad (2.148)$$

$$T_J - T_{\text{atm}}(r_J, l_J) = 0 \quad (2.149)$$

となる。これらが $j = J$ において (2.144) と (2.147) の代わりに用いられる。半径と光度については、(2.145) と (2.146) の代わりに

$$r_J - r_{J-1} - \Delta r_{\text{atm}} = 0 \quad (2.150)$$

$$L_J - L_{J-1} = 0 \quad (2.151)$$

が用いられる。1 つ目の式は大気の厚さが $r_J - r_{J-1}$ と同じと見なされることを表している。2 つ目の式は大気においてエネルギーの放出・吸収が無視できることを表している。

ヘニエイ法は、変数が多い場合についてのニュートン・ラプソン法の一般化に関するものである。ニュートン・ラプソン法は、数値計算で 1 変数関数の根を求める反復法である。ヘニエイ法を理解する助けとなるので、まずはニュートン・ラプソン法について説明する。1 階微分が連続で、2 階微分が有限である 1 変数関数 $f(x)$ を考える。この関数のゼロ点 x_0 を、反復によって求める。関数をテイラー展開すると

$$0 = f(x_0) = f(x) + (x_0 - x)f'(x) + \mathcal{O}[(x_0 - x)^2] \quad (2.152)$$

となる。これを漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.153)$$

の形に書き換える。ここでは $f'(x_n) \neq 0$ とした。これはある初期値 x_1 を与え、 $f(x_1)$ とその微分を計算すると、より真のゼロ点 x_0 に近いと考えられる x_2 が求まるという式である。さらに x_2 から x_3 を求めるというように反復を繰り返し、漸化式が収束すれば、その収束値 x_∞ が x_0 となる。数値的に反復を行う際には、ある小さい値を ϵ として $\delta x_n \equiv x_{n+1} - x_n < \epsilon$ となるところで反復を止め、最後に求めた x_n がゼロ点 x_0 の近似となる。

星の構造方程式を解くときには、 J 個の格子点があり、それぞれの格子で 4 つの求められるべき従属変数 P_j 、 r_j 、 l_j 、 T_j がある。そのため、変数は $4J$ 個である。方程式は、 $j = 1, \dots, J - 1$ において (2.144)-(2.147) の $4(J - 1)$ 個であり、 $j = J$ においては (2.148)-(2.151) の 4 つである。これらの $4J$ 個の未知数について $4J$ 個の方程式を反復法で同時に

解くことを考える。まず j 番目の格子点での i 番目の差分方程式を

$$G_i^j(P_n, r_n, l_n, T_n, n = j-1, j, j+1) = 0 \quad (2.154)$$

と書く。ここで i は 1 から 4 までの整数をとり、1 が運動量保存の式、2 が質量保存の式、3 がエネルギー保存の式、4 がエネルギー輸送の式に対応する。また、 j は 1 から J までの値をとる。例えば

$$G_1^J = P_J - P_{\text{atm}} \quad (2.155)$$

$$G_2^6 = r_6^3 - r_5^3 - (m_6 - m_5) \frac{3}{4\pi\rho_6} \quad (2.156)$$

となる。ニュートン・ラプソン法で関数を (2.152) のようにテイラー展開したように、(2.154) の G_i^j をテイラー展開する。以下では表記を簡単にするため、 $(P_j, r_j, l_j, T_j) = (x_1^j, x_2^j, x_3^j, x_4^j)$ とする。すると

$$\begin{aligned} G_i^j &+ \frac{\partial G_i^j}{\partial x_1^{j-1}} \cdot \delta x_1^{j-1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_2^{j-1}} \cdot \delta x_2^{j-1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_3^{j-1}} \cdot \delta x_3^{j-1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_4^{j-1}} \cdot \delta x_4^{j-1} \\ &+ \frac{\partial G_i^j}{\partial x_1^j} \cdot \delta x_1^j + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_2^j} \cdot \delta x_2^j + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_3^j} \cdot \delta x_3^j + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_4^j} \cdot \delta x_4^j \\ &+ \frac{\partial G_i^j}{\partial x_1^{j+1}} \cdot \delta x_1^{j+1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_2^{j+1}} \cdot \delta x_2^{j+1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_3^{j+1}} \cdot \delta x_3^{j+1} + \frac{\partial G_i^j}{\partial x_4^{j+1}} \cdot \delta x_4^{j+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.157)$$

となる。ここで δx_i^j はそれぞれの変数の真値からのずれの近似値である。ニュートン・ラプソン法と同じようにして、 $4J$ 個の変数について初期の値を与えて (2.157) の G_i^j とその微分を計算し、 δx_i^j について解いて、次のステップでの変数 $x_n = x_n + \delta x_n$ を得る。これを反復して解が収束すれば、それぞれの変数の真値の近似値を得ることができる。数値計算では、ある小さい量 ϵ_i をとって $\delta x_i^j < \epsilon_i$ となったところで反復を止める。初期の変数値は、通常前の時間ステップにおける値がそのまま用いられる。

微分 $\partial G_i^j / \partial x_i^j$ は、 $j = 1, \dots, J-1$ については直接 (2.144)-(2.147) から計算できる。表面 $j = J$ については方程式 (2.148)-(2.151) の中に大気構造を解いた結果求まる量が含まれるため、微分は数値的に求められる。

(2.157) の線形方程式は、行列の形に書き直せる。(2.157) を δx_i^j について解くためには、 $4J \times 4J$ 行列の逆行列を求める必要がある。この操作は通常、 J が大きい場合には計算コストがかかる。星の計算をする場合には $J \simeq 10^2$ であるため、逆行列を求める操作で工夫が必要である。以下では $4J \times 4J$ 行列の逆行列を 1 回求める操作を、 4×4 行列の逆行列を J 回求める操作にする工夫について説明する。この工夫により、 $16J^2$ の計算回数を $16J$ にまで減らすことができる。

まず

$$C_{ik}^j \equiv \frac{\partial G_i^j}{\partial x_k^{j-1}}, \quad C_{ik}^1 = 0 \quad (2.158)$$

$$D_{ik}^j \equiv \frac{\partial G_i^j}{\partial x_k^j} \quad (2.159)$$

$$E_{ik}^j \equiv \frac{\partial G_i^j}{\partial x_k^{j+1}}, \quad E_{ik}^J = 0 \quad (2.160)$$

という量を定義する。これらの量は j を固定した時、 4×4 行列と見なすことができる。これらを用いて (2.157) は

$$-G_i^j = C_{ik}^j \delta x_k^{j-1} + D_{il}^j \delta x_l^j + E_{im}^j \delta x_m^{j+1} \quad (2.161)$$

と書き直せる。ここでは k, l, m について 1 から 4 まで和をとるが、 j については和はとらないと考えている。ここで δx の格子点 j と $j-1$ における関係式

$$\delta x_k^{j-1} = A_k^{j-1} + B_{kl}^{j-1} \delta x_l^j \quad (2.162)$$

を考える。ここでは l について和をとっていると考えている。係数 A と B は後で分かるように、既知の量から計算することができる。これを (2.161) に代入すると、 $j = 2, \dots, J$ について

$$-G_i^j = C_{ik}^j A_k^{j-1} + (C_{ik}^j B_{kl}^{j-1} + D_{il}^j) \delta x_l^j + E_{im}^j \delta x_m^{j+1} \quad (2.163)$$

となる。この式は (2.162) の形に書き換えることが出来て

$$\delta x_l^j = A_l^j + B_{lm}^j \delta x_m^{j+1} \quad (2.164)$$

となる。ここで

$$S_{il}^j = C_{ik}^j B_{kl}^{j-1} + D_{il}^j \quad (2.165)$$

を定義すると

$$A_l^j = -(S_{il}^j)^{-1} (G_i^j + C_{ik}^j A_k^{j-1}) \quad (2.166)$$

$$B_{lm}^j = -(S_{il}^j)^{-1} E_{im}^j \quad (2.167)$$

である。この2つの式から分かるように、 A^j と B^j は A^{j-1} と B^{j-1} で表せる。すなわち (2.166) と (2.167) は A^j と B^j の連立漸化式であり、 A^1 と B^1 が分かれば $2 \leq j \leq J-1$ について A^j と B^j が求まる。(2.161) で $j=1$ とすると、 $C_{ik}^1 = 0$ から

$$A_l^1 = -(D_{il}^1)^{-1} G_i^1 \quad (2.168)$$

$$B_{lm}^1 = -(D_{il}^1)^{-1} E_{im}^1 \quad (2.169)$$

が分かる。これらは既知の量で表されていることが分かる。したがって、 $J-1$ 回の 4×4 行列の逆行列計算により $1 \leq j \leq J-1$ についてベクトル A^j と行列 B^j が求まる。

A^j と B^j が分かると、 δx_i^j があと1回の 4×4 行列の逆行列計算から求まるので、(2.162) より δx が全て求まる。すなわち、(2.163) で $j = J$ とすると $E_{im}^J = 0$ から

$$\delta x_i^J = -(C_{ik}^J B_{kl}^{J-1} + D_{il}^J)^{-1} (G_i^J + C_{ik}^J A_k^{J-1}) \quad (2.170)$$

が求まるので、結局 (2.161) の解を $16J$ 回の計算回数で求めることができる。

2.3 星の物質の性質

密度 ρ 、吸収係数 κ 、核反応によるエネルギー生成率 ε のような星の物質の性質に関する量は、圧力 P と温度 T 、物質組成 X_i の関数であることを述べた。この節では、これらの量がどのようにして求められるかについて説明する。

2.3.1 状態方程式

ここでは、密度 ρ と熱力学量 δ 、 c_P 、 ∇_{ad} の求め方について説明する。簡単のため、まずイオン気体が理想気体の場合について説明する。続いてイオン気体の理想気体からのずれについて説明する。

イオン気体が理想気体の場合

イオン気体が理想気体であるとする、通常の星の物質については状態方程式は

$$P = P_{\text{ion}} + P_e + P_{\text{rad}} = \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu_0} + \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty p^3 v(p) \frac{dp}{e^{E/k_B T - \psi} + 1} + \frac{a}{3} T^4 \quad (2.171)$$

$$\rho = \frac{8\pi}{h^3} m_u \mu_e \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{1 + e^{E/k_B T - \psi}} \quad (2.172)$$

から与えられる。圧力の第1項 P_{ion} は理想気体の場合のイオン気体の圧力である。イオン1個当たりの質量数 μ_0 は μ_i を核種 i の平均質量数として

$$\mu_0 = \left(\sum_i \frac{X_i}{\mu_i} \right)^{-1} \quad (2.173)$$

と書ける。また気体定数はボルツマン定数と原子質量単位 m_u を用いて $\mathcal{R} = k_B/m_u$ と書ける。第2項 P_e は電子の縮退圧である。積分の中の p は電子の運動量である。運動エネルギー E は全エネルギー E_{tot} と電子の静止質量 m_e を使って

$$E = E_{\text{tot}} - m_e c^2 \quad (2.174)$$

$$E_{\text{tot}} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} \quad (2.175)$$

と表せる。速度 $v(p)$ は

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial p} = \frac{pc^2}{E_{\text{tot}}} = v \quad (2.176)$$

から、 p の関数として表せる。縮退パラメータ ψ は縮退の度合いを表す。これが正の大きな値であるほど縮退度が大きく、逆に負の大きな値であるほど縮退度が小さいことを意味する。 $\psi \rightarrow \infty$ の場合は完全縮退、 $\psi \rightarrow -\infty$ の場合は縮退なしに対応する。第3項 P_{rad} は輻射圧である。これは黒体輻射の場合の比強度 (2.47) と圧力の計算式から

$$P_{\text{rad}} = \frac{2}{c} \int_{2\pi} B_\nu \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{3} aT^4 \quad (2.177)$$

と導かれる (図 D.1 を考え、面要素に衝突する光子が面に与える単位時間・単位面積当たりの運動量を計算する)。密度の中の μ_e は、第1章でも出てきたが1電子当たりの質量数

$$\mu_e = \left(\sum_i \frac{Z_i X_i}{\mu_i} \right)^{-1} \quad (2.178)$$

である。(2.171) と (2.172) のより詳しい説明・導出は付録 D にまとめている。

状態方程式は次のようにして求めることができる。密度 ρ と温度 T と化学組成 X_i が与えられると、(2.172) から ψ が求まる。その際、熱力学平衡を仮定して物質の電離度を定めるサハの式から μ_e や μ_0 も同時に決まる。これから ρ 、 T 、 ψ を用いて (2.171) から全圧力 $P = P(\rho, T)$ が決まる。これを ρ について逆に解くことで、 $\rho = \rho(P, T)$ が求まる。これらは全て数値的になされ、最終的に状態方程式は表形式で与えられる。

全圧力にどの効果が重要になるかを $\ln \rho - \ln T$ 平面上にプロットしたものを図 2.8 に示した。太陽の場合 $\rho \sim 1 \text{ g cm}^{-3}$ 、 $T \sim 10^6 - 10^7 \text{ K}$ であり、理想気体で大雑把に記述できることが分かる。この図の境界について説明する。まず電子の縮退が重要になる境界について考える。電子が非相対論的である場合には、理想気体の圧力 $P_{\text{gas}} = \mathcal{R}\rho T/\mu$ と縮退電子気体の圧力 (D.19) を等しいと置き、整理すると

$$\frac{T}{\rho^{2/3}} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e \mathcal{R} m_u^{5/3}} \frac{\mu}{\mu_e^{5/3}} = 1.207 \times 10^5 \frac{\mu}{\mu_e^{5/3}} \text{ cgs} \quad (2.179)$$

となる。ここで μ は、電子とイオン両方を考えた1粒子当たりの質量数

$$\mu = \left(\sum_i \frac{X_i(1+Z_i)}{\mu_i} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_e} \right)^{-1} \quad (2.180)$$

である。この場合 $T \propto \rho^{2/3}$ であるが、これは (D.10) から分かるように、 μ_e と μ を固定した場合に $\psi = \text{const.}$ とした場合の T と ρ の関係に等しい。電子が超相対論的である場合には、(D.20) を用いて同様に

$$\frac{T}{\rho^{1/3}} = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{8\mathcal{R} m_u^{4/3}} \frac{\mu}{\mu_e^{4/3}} = 1.496 \times 10^7 \frac{\mu}{\mu_e^{4/3}} \text{ cgs} \quad (2.181)$$

が求まる。この温度の密度依存性 $T \propto \rho^{1/3}$ も、(D.20) で μ_e 、 μ 固定の時に $\psi = \text{const.}$ の場合の依存性と一致する。

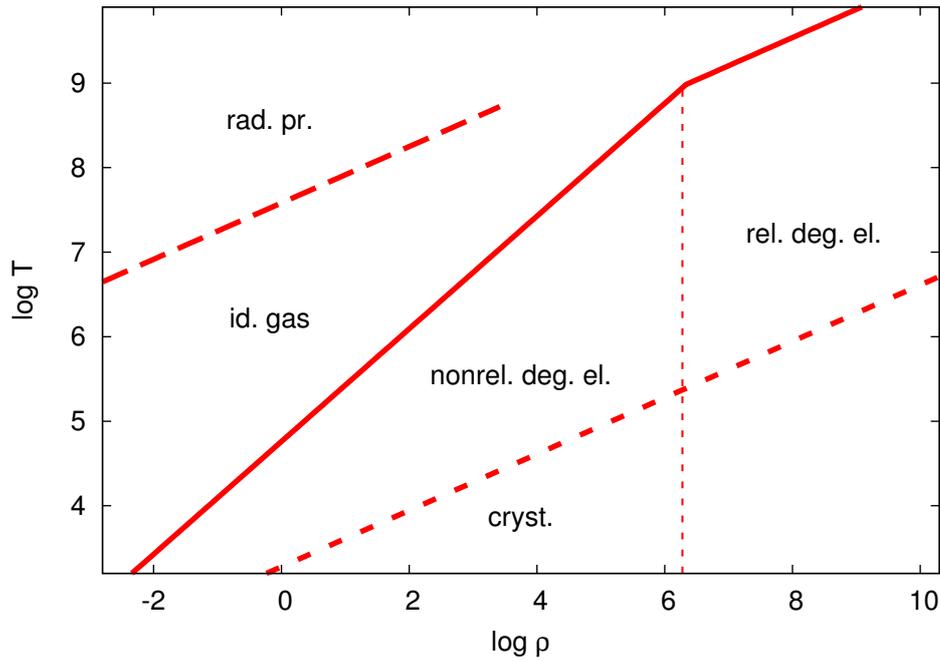


図 2.8: ガス圧や輻射圧、縮退圧の全圧力への寄与が大きくなる領域を大雑把にプロットした図。組成は水素 75 %、ヘリウム 25 % を考え、 $\mu = 0.59$ 、 $\mu_e = 1.14$ 、 $\mu_0 = 1.23$ とした。図中では (2.179)、(2.181)、(2.183)、(2.184)、(2.188) をプロットした。

電子が縮退している領域で、電子が非相対論的から超相対論的になる境界は、フェルミ運動量 (付録 D 参照) が $p_F \sim m_e c$ となるところと考えることができる。(D.18) と (D.9) からこの時の密度は

$$\rho = \frac{8\pi m_u m_e^3 c^3}{3h^3} \mu_e = 9.74 \times 10^5 \mu_e \text{ g cm}^{-3} \quad (2.182)$$

となる。また別の見積りでは、この境界は (D.10) と (D.20) が等しくなる密度

$$\rho = \frac{1125 m_u m_e^3 c^3}{8\pi^2} \frac{1}{3h^3} \mu_e = 1.66 \times 10^6 \text{ g cm}^{-3} \quad (2.183)$$

である。

最後に輻射圧が理想気体の圧力と比較して重要になる境界は、(2.177) から

$$\frac{T}{\rho^{1/3}} = \left(\frac{3\mathcal{R}}{a\mu} \right)^{1/3} = \frac{3.21 \times 10^7}{\mu^{1/3}} \text{ cgs} \quad (2.184)$$

と求まる。

熱力学量 δ 、 c_P 、 ∇_{ad} は数値的に計算される。まず δ は (B.2) にあるように密度 ρ を微分することにより得られる。定圧比熱 c_P は (B.5) で定義され、密度の微分に加えて内部エネルギーの微分も必要である。内部エネルギーは、イオンが単原子分子理想気体である場合には

$$u = \frac{U_{\text{ion}} + U_e + U_{\text{rad}}}{\rho} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}}{\mu_0} T + \frac{8\pi}{h^3 \rho} \int_0^\infty \frac{p^2 E dp}{e^{E/k_B T - \psi} + 1} + \frac{aT^4}{\rho} \quad (2.185)$$

である (説明は付録 D を参照)。さらに ∇_{ad} は、(B.21) から計算される。

イオン気体が理想気体からずれる場合

イオン気体が理想気体からずれる場合でも、密度 ρ や熱力学量 δ 、 c_P 、 ∇_{ad} を P 、 T 、 X_i の関数として求める手順は、イオン気体が理想気体である場合と同じである。しかしこの場合には、理想気体からのずれを考えて (2.171) や (2.185) が修正されなければならない。ここではイオン気体が理想気体からずれる場合の状態方程式を求める際に考慮されなければならない物理過程について説明する。特にここでは結晶化と圧力電離について説明する。

まずは高密度・低温度において、イオンのクーロン相互作用が重要になる場合を考える。この場合イオンは結晶化し、系の全エネルギーを下げる。結晶化は電荷 Ze の 1 イオン当たりのクーロンエネルギーが熱エネルギーと同程度になる時に起きる。イオン間の平均距離 r_{ion} は数密度 n_{ion} を用いて

$$r_{\text{ion}} = \left(\frac{3}{4\pi n_{\text{ion}}} \right)^{1/3} \quad (2.186)$$

であるので、それらの比は

$$\Gamma_C \equiv \frac{(Ze)^2}{r_{\text{ion}} k_B T} = 2.69 \times 10^{-3} \frac{Z^2 n_{\text{ion}}^{1/3}}{T} \quad (2.187)$$

となる。これは結晶化の効果がどのくらい重要になるかを表す指標となる量である。 $\Gamma_C \ll 1$ は静電エネルギーがあまり重要でないことを表す。 $\Gamma_C \gg 1$ はイオンの熱エネルギーが無視できることを表し、この場合に結晶化が起きると考えられる。結晶化についてより詳細に調べると、 $\Gamma_C \simeq 170$ がイオンが結晶化する境となる臨界値であることが示される。この値と $\rho = \mu_0 m_u n_{\text{ion}}$ を用いて、臨界温度（融解温度、melting temperature） T_m は

$$T_m \simeq \frac{Z^2 e^2}{\Gamma_C k_B} \left(\frac{4\pi\rho}{3\mu_0 m_u} \right)^{1/3} = 1.3 \times 10^3 Z^2 \mu_0^{-1/3} \rho^{1/3} \quad (2.188)$$

となる。ここで数値は cgs 単位系での値である。

次に、高密度領域でイオン間の距離が短くなり、それらの静電ポテンシャルが重ねあわせて考えられなければならない状況を考える（図 2.9）。この場合イオンの高い量子状態は乱され、イオン化エネルギーは減少する。この効果はイオンの電離度を計算する際に考慮されなければならない。この効果を考えた場合、考えない場合よりも電離度が上がり（圧力電離）、状態方程式に影響する。

2.3.2 吸収係数

ここでは吸収係数 κ について説明する。吸収係数は P 、 T の代わりに ρ 、 T の関数 $\kappa(\rho, T)$ として表される。吸収係数については理想気体のような近似を行うと誤差が無視できなくなるため、関係する物理過程を詳細に考慮する必要がある。通常星の構造の計算を行う際は、吸収係数は与えられた組成で、 $\kappa(\rho, T)$ の形で表形式で計算されたものを使う。

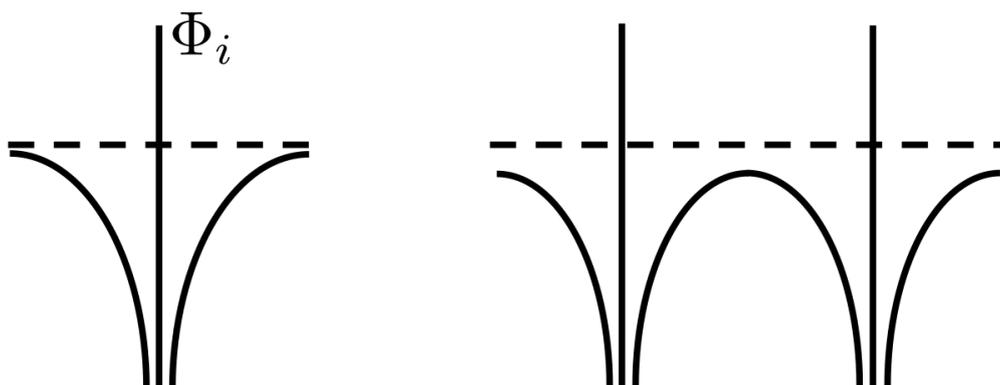


図 2.9: 左: イオン 1 つの静電ポテンシャル。右: 近くにあるイオン同士のポテンシャルの重ねあわせ。

電子散乱

光子が電子に入射すると電子は振動し、これにより他方向に光子が放出される。光子のエネルギーが電子の静止質量よりずっと小さい場合 $h\nu \ll m_e c^2$ は、散乱された光子の運動量は、散乱される前のエネルギーと変わらない。これはトムソン散乱と呼ばれる。この場合の吸収係数は、トムソン散乱断面積を σ_T として

$$\kappa_\nu = \frac{\sigma_T}{\mu_e m_u} = 0.20(1 + X) \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (2.189)$$

となる。ここでヘリウムより重い重元素については $Z_i/A_i \simeq 1/2$ として完全電離を考え (Z_i はイオンの電荷数、 A_i は質量数) (2.178) より

$$\mu_e = \frac{2}{1 + X} \quad (2.190)$$

とした。 X は (2.112) で定義した水素の質量比である。これは振動数に依存しないので、ロスランド平均 (2.55) はそのまま

$$\kappa_{sc} = 0.20(1 + X) \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (2.191)$$

となる。

もし光子のエネルギーと電子の静止質量が同程度の場合には、光子と電子の間の運動量の交換が無視できない。この場合の散乱はコンプトン散乱と呼ばれる。この場合 κ_ν は (2.189) よりも小さくなる。この効果は散乱光子エネルギーが $h\nu \gtrsim 0.1 m_e c^2$ で重要となる。この $h\nu$ としてプランク関数が最大となる振動数を選ぶと、ウィーンの変位則から $h\nu_{\max} \simeq 2.82144 k_B T$ であるので、 $T \simeq 2 \times 10^8$ K でコンプトン散乱が重要になると考えられる。

自由-自由遷移

電子が熱運動の間にイオンの近くを通る時、これら 2 つの荷電粒子は光子を吸収または放出する系を形成する。この機構は電子とイオンが十分近い時にのみ有効となる。電子の

熱速度は $v \sim T^{1/2}$ であるので、そのような系をなす時間は $1/v \sim T^{-1/2}$ に比例する。すなわち、電子数とイオン数が固定されている場合、光子を吸収する系の数は $T^{-1/2}$ に比例する。

このような系の吸収についての性質はクラマース (Kramers) によって古典的に導かれ、一つの系当たりの吸収係数は $Z^2\nu^{-3}$ に比例することが分かった。このことからある混合物の吸収係数は

$$\kappa_\nu \sim Z^2 \rho T^{-1/2} \nu^{-3} \quad (2.192)$$

となると考えられる。ここで密度 ρ は、電子とイオンが近づく頻度が ρ に比例するために現れている。ロスランド平均をとると、吸収係数は

$$\kappa_{\text{ff}} \sim \rho T^{-7/2} \quad (2.193)$$

となることが分かる。この形の吸収係数は全てクラマース吸収係数と呼ばれる。量子力学の補正を考える際は、通常 (2.193) にガウント (Gaunt) 因子 g が掛けられる。さらにここでは (2.193) で Z^2 の依存性を省略した。一般に星の物質は異なるイオンの混合物であるので、異なる化学組成の寄与を足し合わさなければならない。 Z^2 の重み付きの和は (2.193) の比例係数に含まれており、これは化学組成に依存する。完全電離の混合物では、良い近似で

$$\kappa_{\text{ff}} = 3.8 \times 10^{22} (1 + X) [(X + Y) + B] \rho T^{-3.5} \quad (2.194)$$

と書ける。数値は cgs 単位系での値である。 X 、 Y はそれぞれ水素・ヘリウムの質量比である。ここで $(1 + X)$ は、 κ_{ff} が電子密度 $\rho/\mu_e m_u \propto (1 + X)\rho$ に比例することから現れている。また $(X + Y)$ は、 Z^2 をそれぞれの組成比で重み付けて和をとる時に、水素とヘリウムについては $1^2 \times X + 2^2 \times Y/4 = X + Y$ となることから現れる。重元素について同様の操作を行って現れるのが B で

$$B = \sum_i \frac{X_i Z_i^2}{A_i} \quad (2.195)$$

である。

束縛-自由遷移

まずは中性水素原子が基底状態にある場合を考える。イオン化エネルギーを χ_0 とする。エネルギー保存則から、エネルギー $h\nu$ の光子の入射によってイオン化が起きる場合には

$$h\nu = \chi_0 + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (2.196)$$

となる。ここで v は放出される電子のイオンとの相対速度である。イオン 1 個当たりの散乱断面積を $a_\nu = \kappa_\nu \rho / n_{\text{ion}}$ とすると、 $\nu < \chi_0/h$ の場合には $a_\nu = 0$ で、 $\nu \geq \chi_0/h$ の場合には $a_\nu > 0$ であると予想される。古典的に考えると (2.192) と同様に、 $\nu \geq \chi_0/h$ に対して $a_\nu \sim \nu^{-3}$ が得られる。量子力学による補正はガウント因子によって考慮される。基底状態にある水素原子の a_ν の振動数依存性を図 2.10 左に示した。もし異なる励起状態にあ

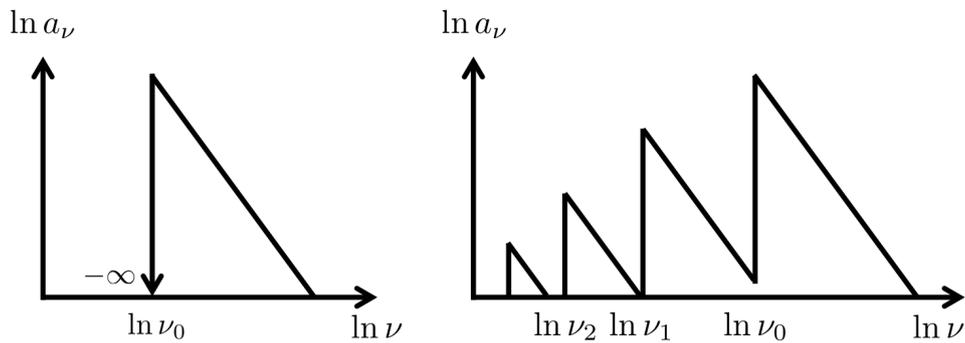


図 2.10: 左：基底状態にある水素原子の a_ν の振動数依存性。右：異なる励起状態にある水素原子の混合物の a_ν の振動数依存性。

る水素原子の混合物を考えた場合、状況は異なる。基底状態の場合と同じで、第一励起状態からのイオン化エネルギーを χ_1 とすると第一励起状態について $h\nu < \chi_1$ で $a_\nu = 0$ 、 $h\nu \geq \chi_1$ で $a_\nu \sim \nu^{-3}$ となる。異なる励起状態にある水素原子の混合物では吸収係数 κ_ν は異なる励起状態の a_ν の重ね合わせから与えられる。この場合 κ_ν は図 2.10 右にあるようににのこぎりの歯のような形になる。温度 T での吸収係数を計算するには、それぞれの励起状態にある水素原子の存在比を計算し、その比で重みづけた a_ν の和をとる。ロスランド平均を得るには (2.55) の積分を行えばよい。

さらに水素原子以外の種を含む場合には、全ての種について異なる励起状態の a_ν をそれらの存在比で重み付けて和をとればよい。重要な寄与の 1 つは中性水素原子の束縛-自由遷移である。この場合吸収係数は中性水素原子の数に比例して

$$\kappa_{\text{bf}} = X(1 - x)\tilde{\kappa}(T) \tag{2.197}$$

である。ここで $\tilde{\kappa}(T)$ は異なる励起状態の a_ν の和をとってロスランド平均をとって得た吸収係数である。また x は電離度で、電離水素数密度と全水素数密度の比ある。

束縛-束縛遷移

イオンに束縛された電子による吸収では、束縛-自由遷移だけでなく束縛-束縛遷移も起きる。この機構はある振動数でのみ効いてくる。星の吸収線は衝突によって大きく広げられ、スペクトルのかなりの部分を占めることから、束縛-束縛遷移はロスランド平均吸収係数にかなり寄与する可能性がある。特に温度が $T < 10^6$ K では寄与が大きく、束縛-束縛吸収は全吸収係数を因子 2 だけ大きくする。より高い温度では束縛-束縛遷移の全吸収係数への寄与はずっと小さい (温度 $T \simeq 10^7$ K では 10 %程度)。

水素負イオン (H^-)

水素は負イオンになることでも吸収係数に寄与する。この水素負イオンは、水素が近傍の電荷によって偏極して、他の電子を引きつけ束縛することによって形成される。この 2

つ目の電子はゆるく束縛されており、束縛を切るためにはエネルギーが $h\nu > 0.75 \text{ eV}$ の光子の吸収で十分である。このエネルギーは中性水素のイオン化エネルギー 13.6 eV と比べてずっと小さく、波長が $\lambda < 1655 \text{ nm}$ (赤外線) の光子が吸収され束縛-自由遷移が起きる。吸収された光子のエネルギーは (2.196) のようにイオン化エネルギーと電子の運動エネルギーになる。

水素負イオンの吸収係数 κ_{H^-} は、 H^- の数密度を n_{-1} とすると $\kappa_{\text{H}^-} = a_\nu n_{-1}/\rho$ から分かるように n_{-1} に比例する。 H^- は中性水素原子 (数密度 n_0) と自由電子 (数密度 n_e) から形成されるため、 n_{-1} は $n_0 n_e$ に比例する。

完全に中性な純粋水素気体の場合、自由電子はないため、 H^- イオンも存在しない。この状況で温度が上がって水素が少し電離すると、自由電子は中性水素と結合する。この場合、中性度 $1 - x$ があまり小さくなければ吸収係数は上昇すると考えられる。

水素・ヘリウムよりも重い元素が存在する場合には、状況はこれと異なる。より重い元素はより低いイオン化ポテンシャルを持つので、より低い温度でも電子を供給する。それ故ほんの少し重元素があれば、それらは水素が中性である低温で電子の密度を決定する。ヘリウムよりも重い元素がそれぞれ電子を 1 つ供給するとすると (温度領域が 3000 K から 5000 K 程度)、電子の数密度は

$$n_e = \rho[xX + (1 - X - Y)/A]/m_u \quad (2.198)$$

となる。ここで $\rho(1 - X - Y)/Am_u$ は平均質量数が A の重元素の数密度である。重元素の質量比が $1 - X - Y > xXA$ であれば、それらが吸収係数を決めることになる。従って重元素量は、温度が低い星の表面や外部境界条件を考える際 κ に大きく影響する。

熱伝導

電子は他の全ての粒子と同じように、伝導によって熱を輸送する。その全エネルギー輸送への寄与は通常、輻射によるエネルギー輸送と比べて無視できる。これは伝導率が平均自由行程 ℓ に比例し、(縮退のない) 通常星では $\ell_{\text{photon}} \gg \ell_{\text{particle}}$ であるからである。

しかし電子による伝導は、進化の後期にある星の内部深い高密縮退領域や白色矮星の場合に重要になる。これは電子が縮退している場合、位相空間上でフェルミ運動量 p_F 以下の運動量空間領域は全て満たされているため、電子はイオンや他の電子と近づいても運動量を交換できないためである。これは電子が他の粒子と衝突する頻度が低いことを表し、電子の平均自由行程も長いということを意味する。2.1.4 節で熱伝導によるエネルギー輸送を考えた時、熱伝導による寄与が伝導の吸収係数 κ_{cd} を定義することで形式的に輻射輸送の式に取り入れられることを見た。全吸収係数 κ は、熱伝導が効率的になって κ_{cd} が小さくなると

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{\text{rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cd}}} \quad (2.199)$$

から、小さくなるのが分かる。

2.3.3 核反応

ここでは核反応率 r_{ij} 、核反応によるエネルギー生成率 ε 、ニュートリノ冷却率 ε_ν について説明する。

前半では基本的な事項と熱核反応率・エネルギー生成率の計算方法について説明する。このことに関連して電子遮蔽についても説明する。後半では星の内部で実際に起きる核反応について説明する。ここでは特に本研究で考慮する核反応である、水素燃焼とヘリウム燃焼について説明する。また、ニュートリノ冷却でどのような過程が考慮されるべきかについても説明する。

基本事項

ほとんどの観測されている星は、いわゆる熱核融合で輝いている。そのような核反応は熱運動によって誘起され、数個の軽い核は融合して重い核になる。核反応前の反応に関わる核 j 全ての質量の和 ($\sum_j M_j$) は、核反応でできる核の質量 (M_y) とは異なる。この質量の違いは質量欠損と呼ばれ

$$\Delta M = \sum_j M_j - M_y \quad (2.200)$$

である。これがエネルギー $E = \Delta M c^2$ に変換され、星を支えている。

質量欠損があることは、反応に関係する核がそれぞれ異なった束縛エネルギーを持つことを反映している。質量が M_{nuc} で原子質量数が A である核を考える。この核が質量 m_p の陽子を Z 個含み、質量 m_n の中性子を $A - Z$ 個含むとする。この時、束縛エネルギーは

$$E_B = [(A - Z)m_n + Zm_p - M_{\text{nuc}}]c^2 \quad (2.201)$$

となる。異なる核で束縛エネルギーを比較するため、1核子当たりの平均束縛エネルギー

$$f = \frac{E_B}{A} \quad (2.202)$$

を考える。水素を除いて、 f の典型的な値は 8 MeV である。この値は異なる A で大きく変わらない。 A が大きくなると、 $f(A)$ は水素から急激に 8 MeV 程度まで上がり、 $A = 56$ (^{56}Fe) の 8.5 MeV で最大となる。それより A が大きくなると、 f はゆっくり減少する。そのため核反応は1核子当たりの束縛エネルギー f が最大となる ^{56}Fe 付近に向かって起きる。重い星の場合、星の内部で核融合が進むと最終的に ^{56}Fe まで燃える。 ^{56}Fe では1核子当たりの束縛エネルギーが最大であるため、これ以上核反応は起こらない。

核融合が起きるためには、反応に関係する荷電粒子同士が十分近づいて、クーロン力よりも強い力（核力による引力）が支配的とならなければならない。原子核がなす、この2つの力に関するポテンシャルの和を図 2.11 に示す。核力による引力は原子核半径

$$r_0 \simeq A^{1/3} 1.44 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (2.203)$$

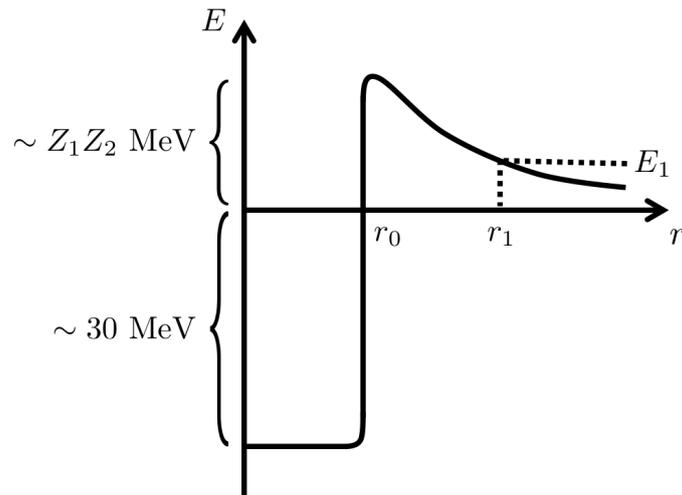


図 2.11: 原子核がつくるポテンシャル。半径が $r < r_0$ において核力による引力が支配的となり、 $r > r_0$ でクーロン力による反発力が支配的となる。無限遠から運動エネルギー E_1 で近づいてくる粒子は古典的には r_1 までしか近づけない。

の内側で支配的となり、ポテンシャルはおよそ 30 MeV の深さまで下がる。一方 r_0 の外側では、2つの粒子の電荷数を Z_1 、 Z_2 として、クーロン力による反発力

$$E_{\text{Coul}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (2.204)$$

が支配的となる。ここで e は素電荷である。クーロン障壁 $E_{\text{Coul}}(r_0)$ は、 r_0 の A 依存性を無視すると $e^2/r_0 \simeq 1 \text{ MeV}$ であることから

$$E_{\text{Coul}} \simeq Z_1 Z_2 \text{ MeV} \quad (2.205)$$

となる。

原子核の静止系で見て無限遠から運動エネルギー E_1 でやってくる粒子は、図 2.11 のように古典的には r_1 の距離までしか原子核に近づけない。ここで星の内部の粒子の運動エネルギーが熱運動のそれである場合、この運動によって起こる核反応は熱核反応と呼ばれる。太陽のような通常の星の場合、古典的に考えると熱核反応が起こらないことを見よう。通常の星の温度は中心で $T \sim 10^7 \text{ K}$ であり、熱運動エネルギーは $k_B T \simeq 1 \text{ keV}$ である。このエネルギーはクーロン障壁より 10^3 程度小さい。ボルツマン分布を考えると、1 MeV より大きいエネルギーを持つ粒子の割合を考えたときに出てくる指数因子は $\exp(-1 \text{ MeV}/k_B T) \sim \exp(-1000) \sim 10^{-434}$ となる。太陽質量を考えた場合、星内部に存在する粒子の数は大雑把に 10^{57} 個であることを考えると、古典的には熱核反応は起こらないことが分かる。

量子力学で考えられるトンネル効果を考えると、星内部の熱核反応は有限の確率で起きることが分かる。入射粒子の運動エネルギーがクーロン障壁よりも小さい場合 $E < E_{\text{Coul}}$ でも、クーロン障壁を透過する確率はゼロでなく

$$P_0 \propto e^{-2\pi\eta}, \quad \eta = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar E^{1/2}} \quad (2.206)$$

である。ここで $\hbar = h/2\pi$ で、 m は換算質量である。指数 $\pi\eta$ は $\hbar^{-1}[2m(E_{\text{Coul}} - E)]^{1/2}$ を r_0 から r_1 まで積分するときを得る量である。ここで $Z_1 Z_2 = 1$ 、 $T = 10^7$ K であるとする。平均的な運動エネルギーを持つ粒子では $P_0 \sim 10^{-20}$ である。この確率は E とともに急激に大きくなり、 $Z_1 Z_2$ とともに小さくなる。そのため温度が 10^7 K 程度である場合、軽い原子核のみが反応する可能性がある。より重い原子核が反応するためには、より温度が高くなければならない。星の進化で異なる核反応の段階（水素燃焼、ヘリウム燃焼、炭素・酸素燃焼など）が別々の時期に現れるのはこのためである。

熱核反応率とエネルギー生成率

単位時間単位質量当たりの反応率 r_{jk} を考える。ここでは反応する異なる2種類の粒子を添字 j と k で表す。種類 j の粒子が種類 k の全ての粒子に対して速度 v で運動している状況を考える。反応の断面積を σ とし、種類 k の粒子の数密度を n_k とすると、単位時間あたりの反応数は $n_k \sigma v$ である。このことから、一様速度 v で衝突する場合の反応率

$$\tilde{r}_{jk} = n_j n_k \sigma v \quad (2.207)$$

を得る。これを同じ粒子同士の反応にも適用できるように一般化する。まず (2.207) で、 $n_j n_k$ を反応を起こす可能性のある組の数密度（を体積で割ったもの）と解釈し、 σv を単位時間に1つの組が反応する確率（を体積で掛けたもの）であると解釈する。同種粒子については、反応を起こす可能性のある組の数は、粒子数が大きい場合 $\sim n_j^2/2$ になる。このことから、(2.207) の反応率は同種粒子同士の反応の場合も考慮して

$$\tilde{r}_{jk} = \frac{1}{1 + \delta_{jk}} n_j n_k \sigma v, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \quad (2.208)$$

となる。

反応の断面積は粒子の速度 v に依存するため、 v が一様でない場合について反応率を考える必要がある。そこで次に、粒子 j と k が衝突する相対速度 v がボルツマン分布をしている状況を考える。これは2つの粒子それぞれの速度がボルツマン分布に従う場合に実現される状況である。中性子星のような超高密度天体を考えない限り、速度の分布はこのように近似できる。速度に対応するエネルギーが

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.209)$$

であるとする。ここで換算質量は $m = m_j m_k / (m_j + m_k)$ である。この場合エネルギーが $[E, E + dE]$ にある粒子の組の数の割合は

$$f(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}} e^{-E/k_B T} dE \quad (2.210)$$

である。この間のエネルギーにある粒子の組が全て一様な相対速度を持つと考えて、全核反応率への寄与は $dr_{jk} = \tilde{r}_{jk} f(E) dE$ となる。この量を全エネルギーについて積分するこ

とで、全核反応率

$$r_{jk} = \frac{1}{1 + \delta_{jk}} n_j n_k \langle \sigma v \rangle \quad (2.211)$$

を得る。ここで

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma(E) v f(E) dE \quad (2.212)$$

である。数密度 n_i を質量比 X_i で置き換える場合には、(2.111) の関係式

$$X_i \rho = n_i m_i \quad (2.213)$$

を用いる。1回の反応で生成されるエネルギーが Q であるとする、(2.211) から、単位時間単位質量当たりのエネルギー生成率 $\varepsilon_{jk} = Q r_{jk} / \rho$ は

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{1 + \delta_{jk}} \frac{Q}{m_j m_k} \rho X_j X_k \langle \sigma v \rangle \quad (2.214)$$

となる。

反応の断面積 σ は通常

$$\sigma(E) = S(E) E^{-1} e^{-2\pi\eta} \quad (2.215)$$

と表される。これは反応断面積が、ドブロイ波長を $\lambda = \hbar/p = \hbar/(2mE)^{1/2}$ として幾何的な断面積 $\pi\lambda^2 \sim 1/E$ に比例することと、クーロン障壁を透過する確率 (2.206) に比例することに由来する。その他の因子は全て S に含まれる。この因子は考えている核の固有の性質に依存するもので、理論的に求められる場合もあるが、しばしば実験的に求められる。

(2.212) は (2.206)、(2.209)、(2.210)、(2.215) を用いると

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{2^{3/2}}{(m\pi)^{1/2} (k_B T)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) e^{-E/k_B T - \tilde{\eta}/E^{1/2}} \quad (2.216)$$

$$\tilde{\eta} = 2\pi\eta E^{1/2} = \pi(2m)^{1/2} \frac{Z_j Z_k e^2}{\hbar} \quad (2.217)$$

となる。さらに計算を行うためには $S(E)$ を特定しなければならない。ここでは宇宙物理学への応用で重要な $S(E) \simeq S_0 = \text{const.}$ という場合に限って考える。因子 S がエネルギーにほとんど依存しないことは、物理的には反応の共鳴エネルギー（反応断面積が極端に大きくなるエネルギー）がないことに対応する。この場合、(2.216) の積分は

$$J = \int_0^\infty e^{f(E)} dE, \quad f(E) = -\frac{E}{k_B T} - \frac{\tilde{\eta}}{E^{1/2}} \quad (2.218)$$

となる。この積分を初等関数で評価するため、鞍点法による近似を行う。関数 $f(E)$ は全ての E について負で

$$E_0 = \left(\frac{1}{2} \tilde{\eta} k_B T \right)^{2/3} = \left[\left(\frac{m}{2} \right)^{1/2} \pi \frac{Z_j Z_k e^2 k_B T}{\hbar} \right] \quad (2.219)$$

で最大値をとる。そのため (2.218) の積分への寄与を考える時、被積分関数の $E = E_0$ の周辺での積分が寄与の大半を占める。そこで $f(E)$ を E_0 の周りでテイラー展開して

$$\begin{aligned} f(E) &= f(E_0) + f'(E_0)(E - E_0) + \frac{1}{2}f''(E_0)(E - E_0)^2 + \dots \\ &= -\tau - \frac{1}{4}\tau \left(\frac{E}{E_0} - 1\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.220)$$

とし、2次までとって (2.218) を評価する。ここで

$$\tau = 3 \frac{E_0}{k_B T} = 3 \left[\pi \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{1/2} \frac{Z_j Z_k e^2}{\hbar} \right] \quad (2.221)$$

とおいた。これは数値を代入すると

$$\tau = 19.721 \left(Z_j^2 Z_k^2 \frac{A_j A_k}{A_j + A_k} \right)^{1/3} \left(\frac{T}{10^7} \right)^{-1/3} \quad (2.222)$$

のように書ける。このようにすると (2.218) の積分は、変数 $\xi = (E/E_0 - 1)\sqrt{\tau}/2$ を用いて

$$J = \int_0^\infty \exp \left[-\tau - \frac{\tau}{4} \left(\frac{E}{E_0} - 1 \right)^2 \right] dE = \frac{2}{3} k_B T \tau^{1/2} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^\infty e^{-\xi^2} d\xi \quad (2.223)$$

となる。積分 J への主な寄与は $E = E_0$ 、すなわち $\xi = 0$ から来るので、積分の下端は $-\infty$ としてよい ((2.222) 参照)。すると結局積分は

$$J \simeq \frac{2}{3} \pi^{1/2} k_B T \tau^{1/2} e^{-\tau} \quad (2.224)$$

となり、(2.216) は

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} \frac{S_0}{(k_B T)^{1/2}} \tau^{1/2} e^{-\tau} \quad (2.225)$$

となる。

反応率を温度の冪関数として表した時、その冪はどのくらいになるであろうか。これを知るために、ある温度を T_0 として $\langle \sigma v \rangle$ を

$$\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu \quad (2.226)$$

と書く。添字の0は $T = T_0$ での値であることを意味する。冪 ν は、(2.221) より $\tau \propto T^{-1/3}$ であることと、(2.225) を用いると

$$\nu = \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle}{\partial \ln T} = \frac{\tau}{3} - \frac{2}{3} \quad (2.227)$$

となる。これに (2.222) を代入すると

$$\nu = 6.574 \left(Z_j^2 Z_k^2 \frac{A_j A_k}{A_j + A_k} \right)^{1/3} \left(\frac{T}{10^7} \right)^{-1/3} - \frac{2}{3} \quad (2.228)$$

を得る。(2.228) から分かるように、最も軽い粒子間での反応でも冪は $\nu \simeq 5$ となる。この値はもっと重い粒子間の反応を考えると容易に $\nu \simeq 20$ やそれ以上にまで達する。このことから核反応率は、温度の依存性がとても大きいことが分かる。この事実は星のモデルに対して大きな影響を与える。すなわち、星の内部で温度が少し揺らいただけで核反応によるエネルギー生成率は大きく変化する。そのため構造を安定に保っている星の内部では、温度を一定に保つような安定化機構が働いていると考えられる。

ここで導いた反応率に対して、さらなる補正が必要である。まずは (2.216) を評価する際に、 S を一定とし、さらに積分を評価する際に近似を行ったが、これに対する補正は

$$g_{jk} = 1 + \frac{5}{12\tau} + \frac{S'}{S} E_0 \left(1 + \frac{105}{36\tau} \right) + \frac{1}{2} \frac{S''}{S} E_0^2 \left(1 + \frac{267}{36\tau} \right) \quad (2.229)$$

という因子を $\langle \sigma v \rangle$ に掛けることで行う。さらに原子核のクーロンポテンシャルの一部を近傍にある電子が遮蔽することによって反応率が上がるが、これによる補正は f_{jk} を反応率に掛けることで行う。これについては後で少し詳しく説明する。

共鳴反応を考えた場合は、共鳴が起きるエネルギーで $S(E)$ が大きくなるが、この場合の反応率は共鳴の位置に大きく依存する。例えば (2.216) の積分で、共鳴エネルギーにおいて被積分関数の寄与が支配的となる可能性がある。しかしこのような場合でも $S(E)$ が与えられれば (2.216) は原理的に評価可能である。

電子遮蔽

核反応率はクーロンポテンシャルの反発力によって大きく左右されることを見てきた。そのためこのクーロンポテンシャルが少し変わると、核反応率も変わる。ここでは原子核の周囲に電子が引き寄せられ、これによって原子核のクーロンポテンシャルの一部が外から見た時に遮蔽されて見える効果が、核反応率にどのように影響するかについて説明する。

原子核や電子が電場を感じない時のそれぞれの平均数密度を \bar{n}_i 、 \bar{n}_e とする。電荷 Ze の原子核の近傍は電子が引き寄せられているため、そこでは電子の数密度 n_e は平均 \bar{n}_e より少し大きいと考えられる。逆に他のイオンは反発するので、原子核の数密度 n_i は平均 \bar{n}_i より少し小さいと考えられる。縮退がない場合、電荷 q の粒子が静電ポテンシャル ϕ を感じる時の数密度は

$$n = \bar{n} e^{-q\phi/k_B T} \quad (2.230)$$

となる。通常の場合は $|q\phi| \ll k_B T$ であるので、原子核と電子の数密度は

$$n_i = \bar{n}_i \left(1 - \frac{Z_i e \phi}{k_B T} \right), \quad n_e = \bar{n}_e \left(1 + \frac{e \phi}{k_B T} \right) \quad (2.231)$$

のように展開できる。

混合気体を考えて、電荷密度 σ を書き下す。まず $\phi = 0$ の場合には、電荷が中性でなければならず

$$\bar{\sigma} = \sum_i (Z_i e) \bar{n}_i - e \bar{n}_e = 0 \quad (2.232)$$

となる。一方 $\phi \neq 0$ の場合は (2.231) と (2.232) を使って

$$\sigma = \sum_i (Z_i e) n_i - e n_e \quad (2.233)$$

$$= - \sum_i \frac{(Z_i e)^2 \phi}{k_B T} \bar{n}_i - \frac{e^2 \phi}{k_B T} \bar{n}_e \quad (2.234)$$

となる。ここで全数密度を $n = n_e + \sum_i n_i$ として、2つの項をまとめると

$$\sigma = -\chi \frac{e^2 \phi}{k_B T} n \quad (2.235)$$

となる。ここで

$$\chi \equiv \frac{1}{n} \left(\sum_i Z_i^2 \bar{n}_i + \bar{n}_e \right) \quad (2.236)$$

である。これを質量比 $X_i = A_i \bar{n}_i / n \mu$ を用いて表すと、(2.232) を使って

$$\chi = \mu \zeta = \mu \sum_i \frac{Z_i (Z_i + 1)}{A_i} X_i \quad (2.237)$$

となる。ここで μ は (2.180) で与えられた1粒子当たりの平均分子量である。電荷密度 σ とポテンシャル ϕ はポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\sigma \quad (2.238)$$

によって関係づいている。原子核の周りの電子の分布が球対称であるとする、この式は (2.235) から

$$\frac{r_D^2}{r} \frac{d^2(r\phi)}{dr^2} = \phi \quad (2.239)$$

となる。ここでデバイ・ヒュッケル (Debye-Hückel) の長さを

$$r_D = \left(\frac{k_B T}{4\pi\chi e^2 n} \right)^{1/2} \quad (2.240)$$

と置いた。(2.239) は

$$\phi = \frac{Ze}{r} e^{-r/r_D} \quad (2.241)$$

のように解かれる。これは $r \rightarrow 0$ において遮蔽がない場合のポテンシャル Ze/r に一致するという境界条件と、 $r \rightarrow \infty$ で $\phi \rightarrow 0$ となる境界条件のもとでの解である。因子 e^{-r/r_D} は、電子による原子核ポテンシャルの遮蔽効果を意味するもので、 $r \gtrsim r_D$ においてポテンシャルは素早く減衰することが分かる。この r_D は原子核の周辺に存在する電子雲の「半径」と解釈することができる。

ここで図 2.11 の r_1 と r_D を比較し、核反応率への電子遮蔽の影響の大きさについて考える。運動エネルギー E_1 を持つイオンは、原子核に $r_1 = Z_1 Z_2 e^2 / E_1$ まで近づける。ここで Z_1 と Z_2 はそれぞれの電荷数である。これと (2.240) から、半径の比は

$$\frac{r_D}{r_1} \simeq 200 \frac{E_1}{Z_1 Z_2} \left(\frac{T_7}{\zeta \rho} \right)^{1/2} \quad (2.242)$$

と書ける。ここで E_0 の単位は keV であり、 ρ の単位は g cm^{-3} である。また、 $T_7 = T/(10^7 \text{ K})$ である。太陽中心での大雑把な値 $T_7 \simeq 1$ 、 $\rho \simeq 10^2 \text{ g cm}^{-3}$ 、 $\zeta \simeq 1$ を使い、もっとも重要な水素の反応を考えると $Z_1 Z_2 = 1 \dots 7$ 、 $E_0 \simeq 5 \dots 20 \text{ keV}$ であるので、(2.242) は $r_D/r_1 \simeq 50 \dots 100$ となる。通常の星については $r_D \gg r_1$ であり、入射粒子は電子雲の十分中まで侵入できることから、電子遮蔽の影響は小さいと言える。

上で $r_1/r_D \ll 1$ であることを見たので、 $\exp(-r/r_D)$ を 1 次まで展開して E_{Coul} を考えると

$$E_{\text{Coul}} - E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-r/r_D} - E \simeq \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D} - E \quad (2.243)$$

となる。このことから電子遮蔽がある場合は、ない場合で断面積に対して E を

$$\tilde{E} = E + Z_1 Z_2 e^2 / r_D = E + E_D \quad (2.244)$$

に置き換えた場合に対応することが分かる。

非共鳴の反応率に対する影響を見るために、(2.212) の積分を考える。断面積 $\sigma(E)$ を $\sigma(\tilde{E})$ に置き換えて $\tilde{\eta} = \eta(E/\tilde{E})^{1/2}$ を使って、(2.209)、(2.210)、(2.215) から

$$\sigma(\tilde{E}) v f(E) \sim (\tilde{E} e^{-2\pi\tilde{\eta}}) E^{1/2} (E^{1/2} e^{-E/k_B T}) \quad (2.245)$$

$$\sim \left(1 - \frac{E_D}{\tilde{E}}\right) e^{E_D/k_B T - \tilde{E}/k_B - 2\pi\tilde{\eta}} \quad (2.246)$$

となる。ここで弱いスクリーニングと呼ばれる $E_D/k_B T \ll 1$ という場合を考える。(2.216) の積分には、(2.221) と (2.222) から分かるように $E \gtrsim k_B T$ となる部分の寄与が最も大きいため、(2.246) の E_D/\tilde{E} は積分を行う際に無視してよい。このようにして (2.225) を導いた手順と同様の手順を踏むと、最終的に $\langle \sigma v \rangle$ に対して

$$f = e^{E_D/k_B T} \quad (2.247)$$

の補正因子が掛かったものが得られる。弱いスクリーニングに対しては

$$\frac{E_D}{k_B T} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_D k_B T} = 5.92 \times 10^{-3} Z_1 Z_2 \left(\frac{\zeta \rho}{T_7^3}\right)^{1/2} \quad (2.248)$$

となる。密度 ρ は g cm^{-3} の単位である。

密度が高い場合は $E_D/k_B T \gtrsim 1$ となり、弱いスクリーニングの近似が成り立たなくなる。この場合、取り扱いはより複雑になる。強いスクリーニングの極限では

$$\frac{E_D}{k_B T} \simeq 0.0205 \left[(Z_1 + Z_2)^{5/3} - Z_1^{5/3} - Z_2^{5/3} \right] \frac{(\rho/\mu_e)^{1/3}}{T_7} \quad (2.249)$$

という近似でよく記述される。

水素燃焼

ここからは実際の星の内部で起きる核反応について説明する。まずは水素燃焼について説明する。以下では温度について

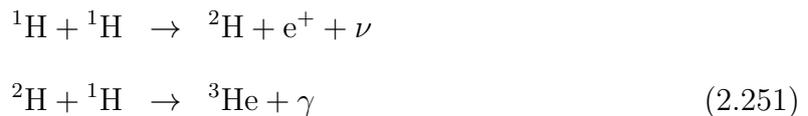
$$T_n = \frac{T}{10^n \text{ K}} \quad (2.250)$$

という表記を用いる。

水素燃焼では、正味で 4 つの ^1H が 1 つの ^4He に変換される。束縛エネルギーの差は 26.731 MeV であり、他の反応の約 10 倍ものエネルギーを放出する。このエネルギーの約 2-30 % は反応過程で生成されるニュートリノによって星の外へ逃げていく。

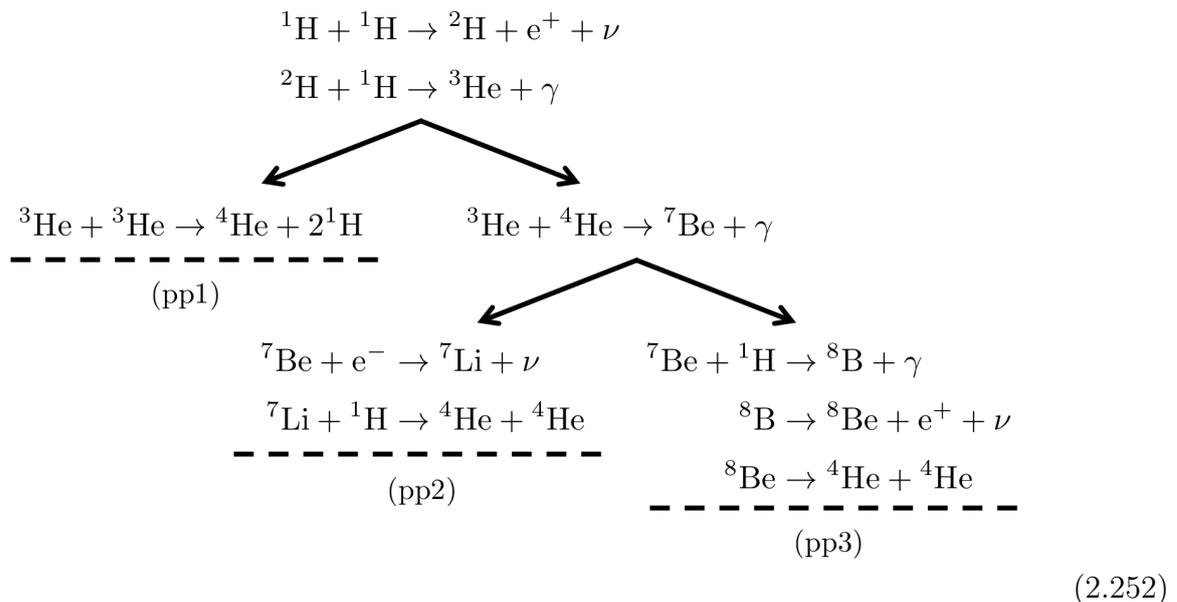
水素の融合過程には異なる種類の過程が存在する。一般に星内部ではこれらの過程による水素融合は同時進行で起きる。主な 2 つの反応過程は陽子-陽子連鎖と CNO サイクルである。

陽子-陽子連鎖 (pp チェイン) は



という反応から始まる。ニュートリノ ν は電子ニュートリノを表す。1 つ目の反応は 2 つの陽子を重水素に変換する反応である。この反応は β^+ 崩壊を伴う反応であり、反応断面積が他の反応と比較して非常に小さく、pp チェインの中での律速段階である。ここで生成された重水素が次の反応で ^3He に変換される。

ここから pp チェインは更に 3 つの分枝に分かれる (pp1、pp2、pp3)。



1 つ目は、(2.251) の反応が 2 回起きて、そこから 2 つの ^3He が融合する反応である。別の 2 つの反応が起きるためには ^4He が既に存在していることが必要である。2 つの分枝 pp2 と pp3 は、 ^7Be が e^- と ^1H とともに反応するために起きる。ニュートリノによって運ばれるエネルギーはそれぞれの分枝で異なるため、星の物質へ放出されるエネルギーも 3 つの分枝で異なる。それらは MeV 単位で $Q = 26.50$ (pp1)、 $Q = 25.97$ (pp2)、 $Q = 19.59$ (pp3) である。異なる分枝の相対的な反応頻度は物質の組成や温度、密度に依存する。 $^3\text{He}-^4\text{He}$ の反応では (2.222) の τ が $^3\text{He}-^3\text{He}$ の反応での τ より 1.046 倍大きいため、(2.228) の ν が少し大きく、少し温度依存性が強い。そのため温度が高くなるほど pp1 より pp2 と pp3 が

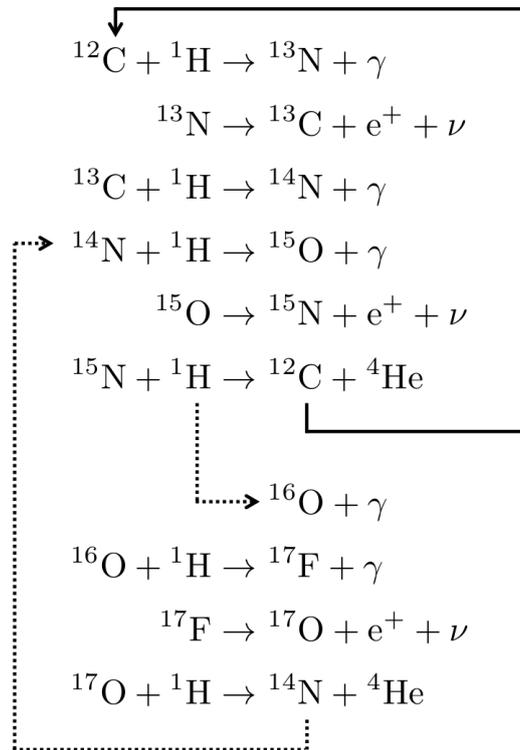
支配的となる ($T_7 \gtrsim 1$)。さらに温度が高くなると、電子捕獲より陽子捕獲が重要になってくるため、pp2 より pp3 が支配的となる。エネルギー生成率は、温度が低い場合には ($T_6 \lesssim 8$) 全ての反応を考慮して計算される。温度が高い場合、核の消費率と生成率が拮抗し平衡組成に到達するので、 ε_{pp} が pp1 のそれと比例するとしてよい。この場合、最も遅い ${}^1\text{H} + {}^1\text{H}$ の反応から

$$\begin{aligned}\varepsilon_{pp} &= 2.57 \times 10^4 \psi f_{11} g_{11} \rho X_1^2 T_9^{-2/3} e^{-3.381/T_9^{1/3}} \\ g_{11} &= 1 + 3.82T_9 + 1.51T_9^2 + 0.144T_9^3 - 0.0114T_9^4\end{aligned}\quad (2.253)$$

と計算される (フィッティングによる計算)。ここで ρ と ε_{pp} の単位は cgs で、 f_{11} はスクリーニング因子である。また ψ は、 ${}^4\text{He}$ が十分ある場合で、pp2 と pp3 での追加のエネルギー生成がある場合の補正因子である。この因子は温度とともに 1 から 2 に近づき ($T_7 \simeq 2$, pp2 起きる) さらに温度が上がると 1.5 に減少する (pp3 起きる)。 ${}^4\text{He}$ の量によって ψ の温度依存性は変わる。

陽子-陽子連鎖では、温度依存性は $T_6 \simeq 5$ で $\nu \simeq 6$ 、 $T_6 \simeq 20$ で $\nu \simeq 20$ であり、全ての核反応の中で最も小さい。

CNO サイクルは C、N、O が存在すると起きる。これらは反応の過程で再生されるので、触媒のように働く。



(2.254)

主なサイクルは最初の 6 行の反応 (CNO-I、実線の矢印) である。このサイクルの途中では分枝があり、 ${}^{16}\text{O}$ が生成されると 2 つ目のサイクルに入る。2 つ目のサイクルに入る頻度は 1 つ目のサイクルに比べ 10^3 倍低い。2 つ目のサイクルの主な影響は、 ${}^{16}\text{O}$ がサイクルに入ることである。

ほとんどの星はゆっくり変化するので、十分高温 ($T_7 \gtrsim 1.5$) ではサイクルに関わる原子核は平衡組成に達する。そのためエネルギー生成率の計算では最も遅い反応である $^{14}\text{N} + ^1\text{H}$ について反応率を計算すればよい。全てのサイクル合わせてエネルギー生成は $Q = 24.97 \text{ MeV}$ である。エネルギー生成率は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{CNO}} &= 8.24 \times 10^{25} g_{14,1} X_{\text{CNO}} X_1 \rho T_9^{-2/3} e^{-15.231 T_9^{-1/3} - (T_9/0.8)^2} \\ g_{14,1} &= 1 - 2.00 T_9 + 3.41 T_9^2 - 2.43 T_9^3\end{aligned}\quad (2.255)$$

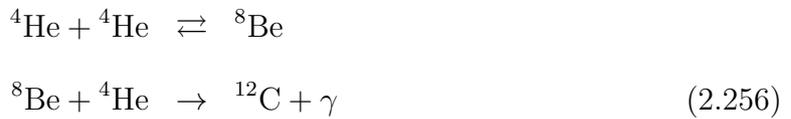
である。ここで ε_{CNO} と ρ は cgs での量である。 X_{CNO} は X_{C} 、 X_{N} 、 X_{O} の和である。

温度の冪 ν は pp チェインと比較してずっと大きい。温度 $T_6 = 10 \dots 50$ においては $\nu \simeq 23 \dots 13$ である。このことから、pp チェインは低温側 ($T_6 < 15$) において支配的となり、CNO サイクルは高温側で支配的となることが分かる。水素燃焼は通常 $T_6 \simeq 8 \dots 50$ で起きる。

ヘリウム燃焼

ヘリウム燃焼では、 ^4He が ^{12}C 、 ^{16}O などに変換される。クーロン障壁が高いため、これらの反応は水素燃焼よりもずっと温度が高い $T_8 \gtrsim 1$ で起きる。

まず重要な反応として、3つの ^4He から ^{12}C が生成されるトリプルアルファ (3α) 反応がある。3つのヘリウムが出会うことは稀であるため、この反応は2つの段階を経て起きる。



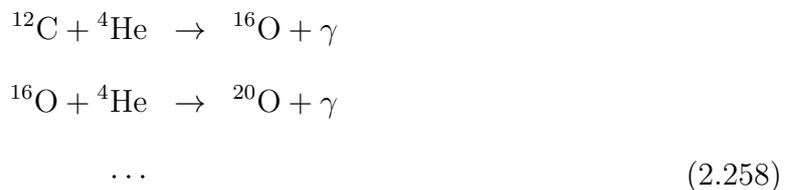
この1つ目の反応で、2つの α 粒子 (^4He 原子核) から ^8Be 原子核ができる。 ^8Be は不安定で2つの α 粒子に崩壊するが、崩壊前にもう1つの α 粒子が衝突すれば ^{12}C が形成される。これらの反応は共鳴が関係するため複雑である。

エネルギー生成は ^{12}C 1 個当たり $Q = 7.274 \text{ MeV}$ であり、これは単位質量で考えると CNO サイクルのものと比較して 10.4 倍小さい。エネルギー生成率は

$$\varepsilon_{3\alpha} = 5.09 \times 10^{11} f_{3\alpha} \rho^2 X_4^3 T_8^{-3} e^{-44.027/T_8}\quad (2.257)$$

である (ε 、 ρ は cgs 単位)。ここで $f_{3\alpha}$ はスクリーニング因子である。共鳴を考慮するとエネルギー生成率は (2.257) より複雑になる。温度の冪 ν は $T_8 = 1 \dots 2$ で $\nu \simeq 40 \dots 19$ である。

十分な量の ^{12}C が生成されると、さらに α 粒子が捕獲されてより重い原子核が生成されていく。



典型的な星の内部では、 ^{20}Ne より先の燃焼が起きる場合は稀である。1 つ目の ^{16}O ができる反応では、1 反応で 7.162 MeV のエネルギーが生成される。温度が \lesssim 数 10^8 K では、エネルギー生成率は

$$\varepsilon_{12,\alpha} \simeq 1.3 \times 10^{27} f_{12,4} X_{12} X_4 \rho T_8^{-2} \left(\frac{1 + 0.134 T_8^{2/3}}{1 + 0.01 T_8^{2/3}} \right)^2 e^{-69.20/T_8^{1/3}} \quad (2.259)$$

で近似される。2 つ目の ^{20}Ne が生成される反応においては放出されるエネルギーは 4.73 MeV であり、エネルギー生成率は近似的に

$$\varepsilon_{16,\alpha} \simeq X_{16} X_4 \rho f_{16,4} [1.82 \times 10^{27} T_8^{-2/3} e^{-85.65/T_8^{1/3}} + 9.22 \times 10^{19} T_8^{-3/2} e^{-103.59/T_8}] \quad (2.260)$$

となる。どちらの場合も ε と ρ は cgs 単位系での量である。

ヘリウム燃焼では (2.256) と (2.258) の反応が同時に起き、全エネルギー生成率は $\varepsilon_{\text{He}} = \varepsilon_{3\alpha} + \varepsilon_{12,\alpha} + \varepsilon_{16,\alpha}$ で与えられる。

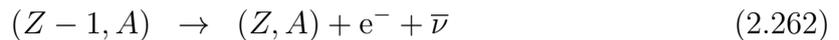
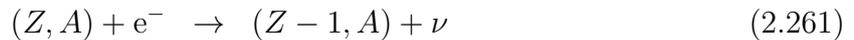
ニュートリノ冷却

ニュートリノの物質との相互作用断面積 σ_ν は極端に小さいため、注意が必要である。通常、低密度な星を考える場合には、ニュートリノは物質に囚われることなく星の外に逃げていく。もし星が高密度になり、ニュートリノの物質との相互作用を無視できない場合には、ニュートリノのエネルギー輸送方程式を考えなければいけない。

星の内部では電子ニュートリノだけを考えればよいが、このニュートリノは複数の過程で生成される。冷却率 ε_ν を知るためには、各々の場合について、ニュートリノによって持ち運ばれるエネルギーを考えなければならない。

核燃焼に関係する過程では、全エネルギー生成率からニュートリノによって持ち運ばれるエネルギーを差し引けばよい。この場合、 ε の中にニュートリノ冷却の寄与が含まれることになり、 ε_ν を新たに考える必要はない。

核燃焼以外で、ニュートリノが生成される核反応もある。例えば電子が縮退している程度の密度では、陽子による電子捕獲反応 $e^- + (Z, A) \rightarrow (Z - 1, A) + \nu$ が起きる。ここで (Z, A) は陽子数 Z 、質量数 A の原子核を表す。他の例では、ウルカ (Urca) 過程が挙げられる。適切な原子核 (Z, A) では、電子捕獲が起きた後、 β 崩壊が起きる。



この過程で、もとの原子核は再生されるが 2 つのニュートリノが放出される。

核反応に関係しない過程でもニュートリノは生成される。星の内部を考える際に重要であるものは、電子対消滅ニュートリノ $e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ 、光ニュートリノ (photon neutrinos) $\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ 、プラズマニュートリノ $\gamma_{\text{plasm}} \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ 、制動放射ニュートリノ、シンクロトロンニュートリノである。

2.4 簡単な場合の解：ポリトロープ

この節では、状態方程式が $\rho = \rho(P)$ のように温度に依存しない場合、特にポリトロープ

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.263)$$

の場合に、星の構造方程式の解がどのようになるかについて説明する。ここで K はポリトロープ定数である。 γ と n はポリトロープ指数で

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (2.264)$$

の関係がある。

密度が温度に依存しない場合、星の構造方程式のうち質量保存の式と運動量保存の式は温度に依存しないため、他の式と独立に解くことができる。ここでは静水圧平衡を仮定して、重力ポテンシャル Φ を導入し、運動量保存の式

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}\rho \quad (2.265)$$

とポアソン方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho \quad (2.266)$$

を考える。

状態方程式がポリトロープの形になる場合は複数考えられる。まず完全縮退気体の2つの極限における状態方程式はポリトロープの形である。非相対論的極限 (D.19) では $\gamma = 5/3$ 、 $n = 3/2$ で、超相対論的極限 (D.25) では $\gamma = 4/3$ 、 $n = 3$ である。これらの場合、 K は (μ_e 固定で) 定数で、(D.19) と (D.25) から直接計算できる。

他の例は理想気体である。等温 $T = T_0$ で平均分子量が μ の理想気体を見た場合、状態方程式は $\rho = \mu P / \mathcal{R}T$ で、これはポリトロープの形に書くことができる。この場合 $K = \mathcal{R}T_0 / \mu$ 、 $\gamma = 1$ 、 $n = \infty$ である。

温度勾配 ∇ が一定の理想気体の場合は、 $T \propto P^\nabla$ から $P \propto \rho^{1/(1-\nabla)}$ となる。星全体が対流領域である場合を考えると、超断熱領域を無視して温度勾配は ∇_{ad} である。単原子分子理想気体を考えると、 $c_p = 5\mathcal{R}/2\mu$ 、 $\alpha = \delta = 1$ であることから (B.21) から $\nabla_{\text{ad}} = 2/5$ を得る。この場合には $P \propto \rho^{5/3}$ であり、 $\gamma = 5/3$ 、 $n = 3/2$ となる。

2.4.1 レーン・エムデン方程式とその解

(2.263) を使って (2.265) は

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \quad (2.267)$$

と書ける。ここでは $\gamma \neq 1$ ($\gamma = 1$ は $n = \infty$ に対応) とする。この式は

$$\rho = \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n \quad (2.268)$$

と積分される。ここでは積分定数を表面 $\rho = 0$ で $\Phi = 0$ と取った。内部においては $\Phi < 0$ で $\rho > 0$ である。(2.268) をポアソン方程式 (2.266) に代入すると

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \left(\frac{-\Phi}{(n+1)K} \right)^n \quad (2.269)$$

となる。ここで無次元量 z 、 w を

$$z = Ar, \quad A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)^n K^n} (-\Phi_c)^{n-1} = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}}$$

$$w = \frac{\Phi}{\Phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n} \quad (2.270)$$

と定義する。 Φ と ρ は (2.268) で関係付けられている。添字の c は中心での値であることを意味する。中心 $r = 0$ においては $z = 0$ 、 $\Phi = \Phi_c$ 、 $\rho = \rho_c$ 、 $w = 1$ である。これより (2.269) は

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} + w^n = 0 \quad (2.271)$$

または

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0 \quad (2.272)$$

という形になる。この方程式はレーン・エムデン方程式と呼ばれるものである。中心において有限である解に興味があるので、(2.271) から、中心において $dw/dz \equiv w' = 0$ でなければならないことが分かる。

中心 $z = 0$ における境界条件 $w = 1$ 、 $w' = 0$ を与えて、解 $w(z)$ が求められたら、(2.270) から内部における密度分布が $\rho(r) = \rho_c w^n$ のように求まる。これから圧力は、 $P_c = K \rho_c^\gamma$ を用いて $P(r) = P_c w^{n+1}$ と求まる。

この方程式は $n = 0, 1, 5$ の場合に厳密に解ける。それぞれの場合の解は

$$w(z) = 1 - \frac{1}{6} z^2 \quad (n = 0) \quad (2.273)$$

$$w(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (n = 1) \quad (2.274)$$

$$w(z) = \frac{1}{(1 + z^2/3)^{1/2}} \quad (n = 5) \quad (2.275)$$

である。これらがレーン・エムデン方程式の解であることは直接代入により確認できる。それ以外の n では方程式は数値的に解かれる。図 2.12 に $n = 3/2, 3$ の場合のレーン・エムデン方程式の解を示す。指数 $n < 5$ の場合には、有限の $z = z_n$ において $w = 0$ となることが知られている。この z_n は密度が 0 となる点であり、半径 $R_* = z_n/A$ に対応する。

2.4.2 ポリトロープ星

質量が M_* 、半径が R_* の $n < 5$ のポリトロープ星のモデルを作る方法について考える。この場合、 n を固定で入力パラメータは M_* 、 R_* である。これらと (2.270) に現れる A 、 ρ_c を関係づけたい。

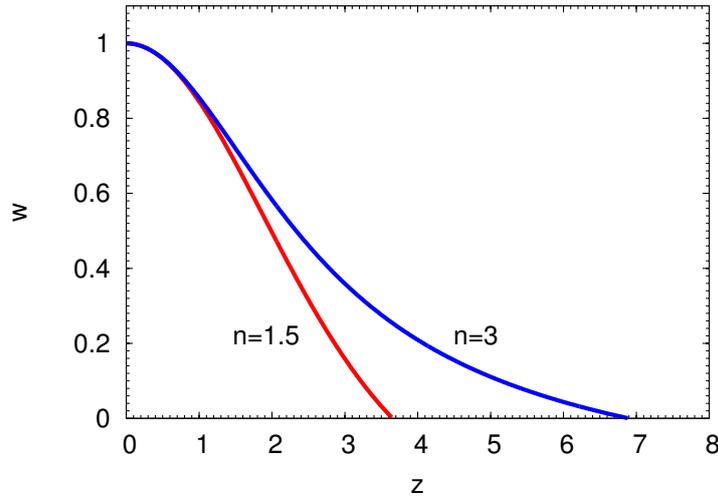


図 2.12: ポリトロップ指数 $n = 3/2$ と $n = 3$ の場合のレーン・エムデン方程式の解。

これを行うためにまず半径 r 内に含まれる質量 $m(r)$ を求める。これは質量保存の式 (2.116) から

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr = 4\pi\rho_c \int_0^r w^n r^2 dr = 4\pi\rho_c \frac{r^3}{z^3} \int_0^z w^n z^2 dz \quad (2.276)$$

と計算される。この式はさらにレーン・エムデン方程式 (2.272) を使って

$$m(r) = 4\pi\rho_c r^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right) \quad (2.277)$$

のように積分できる。これから、星の質量は中心密度 ρ_c と星の半径 R_* で書けて

$$M_* = 4\pi\rho_c R_*^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n} \quad (2.278)$$

となる。括弧の中の量は、 $n(< 5)$ が決まればレーン・エムデン方程式を解くことで定数として与えられる量である。

星の質量 M_* と半径 R_* が決まれば、 A と ρ_c は $A = z_n/R_*$ と (2.278) から決めることができる。星の内部での密度の分布は、 $w(z)$ がレーン・エムデン方程式の解として与えられるので $\rho(r) = \rho_c w^n$ から求まる。圧力は、 K が (2.270) で A と ρ_c から計算できるので、ポリトロップ関係 $P(r) = K\rho^{1+1/n}$ によって決まる。また質量 $m(r)$ は (2.277) から計算される。

星の内部の温度構造を決める場合は、さらに理想気体の仮定をする。入力パラメータとしてさらに組成の情報 μ を追加すれば、温度は $T(r) = P\mu/R\rho$ と求まる。

2.4.3 内部エネルギーと重力エネルギー

ここでは 2.5.2 節で用いるポリトロップ星の内部エネルギーと重力エネルギーを導く。

静止質量を除いたエネルギー密度を $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ とすると、熱力学第一法則から

$$d\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) = -Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.279)$$

である。これに (2.263) を使い積分すると、

$$\varepsilon = \frac{P}{\gamma - 1} = nP \quad (2.280)$$

を得る。星の内部エネルギーは、(2.280)、(2.263)、(2.270)、 $A = z_n/R_*$ 、(2.278) を用いて

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \int_0^{M_*} \frac{\varepsilon}{\rho} dm \\ &= \frac{nK\rho_c^{1/n} M_*}{|z_n^2 w'|} \int_0^{z_n} w^{1+n} z^2 dz \end{aligned} \quad (2.281)$$

と書ける。ここで $w' = (dw/dz)_{z=z_n}$ である。

重力エネルギーは（静水圧平衡の仮定を使わない表式で）(2.277) を使って

$$\begin{aligned} E_{\text{grav}} &= -G \int_0^{M_*} \frac{m}{r} dm \\ &= -\frac{3}{n+1} (4\pi\rho_c)^{1/3} \frac{GM_*^{5/3}}{|z_n^2 w'|^{5/3}} \int_0^{z_n} w^{1+n} z^2 dz \end{aligned} \quad (2.282)$$

と書ける。一方静水圧平衡の式 (2.16) を使い、部分積分を行った場合は

$$E_{\text{grav}} = -3 \int_0^{R_*} P 4\pi r^2 dr = -3 \int_0^{M_*} \frac{P}{\rho} dm \quad (2.283)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} d\left(\frac{P}{\rho}\right) &= -\frac{P}{\rho^2} d\rho + \frac{dP}{\rho} = -\frac{dP}{\gamma\rho} + \frac{dP}{\rho} \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma} Gmd\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (2.284)$$

を用いて更に部分積分をすると

$$E_{\text{grav}} = 3\frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{GM_*^2}{R_*} + 2E_{\text{grav}} \right) \quad (2.285)$$

を得る。これから

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6} \frac{GM_*^2}{R_*} = -\frac{3}{5-n} \frac{GM_*^2}{R_*} \quad (2.286)$$

を得る。(2.278) を用いて R_* を消すと

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5-n} GM_*^{5/3} \rho_c^{1/3} \left| \frac{4\pi w'}{z_n} \right|^{1/3} \quad (2.287)$$

となる。これは (2.282) と M_* 、 ρ_c 依存性が同じであり、(2.282) で、定数である積分を静水圧平衡を仮定して評価した量に対応する。すなわち、(2.282) と (2.287) を等しいとして

$$\int_0^{z_n} z^2 w^{1+n} dz = \frac{n+1}{5-n} z_n^3 |w'|^2 \quad (2.288)$$

が求まるが、この定数値である積分は静水圧平衡の仮定をして求められている。

(2.288) を用いて (2.281) から積分を取り除くことができる。

最終的に内部エネルギーと重力エネルギーは

$$E_{\text{int}} = k_1 K \rho_c^{1/n} M_* \quad (2.289)$$

$$E_{\text{grav}} = -k_2 G \rho_c^{1/3} M_*^{5/3} \quad (2.290)$$

となる。ここで

$$k_1 = \frac{n(n+1)}{5-n} \frac{|z_n^2 w'|}{z_n} = 1.75579 \quad (2.291)$$

$$k_2 = \frac{3}{5-n} \frac{|4\pi z_n^2 w'|^{1/3}}{z_n} = 0.639001 \quad (2.292)$$

である。数値は $n=3$ の場合での値であり、 $z_3 = 6.89685$ 、 $|z_3^2 w'| = 2.01824$ である。

2.5 超大質量星の安定性

星がどれくらい重くなれば不安定になるか知るために、星の安定性について考える。ここでは簡単のために、陽子と電子の数の比が 1:1 である水素プラズマを考える。

2.5.1 一般相対論の補正を考慮しない場合

大質量星の場合、輻射圧がガス圧よりもずっと大きい。そこでまずガス圧が無視できる状況を考える。この場合圧力とエネルギー密度は

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4, \quad \varepsilon_{\text{rad}} = a T^4 \quad (2.293)$$

と書ける。エントロピーは (1 バリオン数当たりの量で)

$$s_{\text{rad}} = \frac{4}{3} \frac{a T^3}{n} \quad (2.294)$$

と書ける。バリオンの数密度 n は密度と

$$\rho = m_p n \quad (2.295)$$

で関係付けられる。

星全体で対流が起きていて、エントロピーが一定になっていると仮定する。これは大質量の星を考える場合には有効な近似である。この場合温度は (2.294) と (2.295) から

$$T = \left(\frac{3\rho s_{\text{rad}}}{4m_p a} \right)^{1/3} \quad (2.296)$$

となり、(2.293) から

$$P = P_{\text{rad}} = K\rho^{4/3} \quad (2.297)$$

$$K = \frac{1}{3}a \left(\frac{3s_{\text{rad}}}{4m_p a} \right)^{4/3} \quad (2.298)$$

を得る。これは $n = 3$ のポリトロープに対応する。

このような星のエネルギーは最低次で

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{int}} + E_{\text{grav}} \\ &= k_1 K M_* \rho_c^{1/3} - k_2 G M_*^{5/3} \rho_c^{1/3} \end{aligned} \quad (2.299)$$

と書ける。ここで (2.289)、(2.290) で $n = 3$ としたものを使った。また、 $k_1 = 1.75579$ 、 $k_2 = 0.639001$ である。星の質量 M_* を固定した場合、エネルギーは $E = E(\rho_c)$ で書かれており、平衡状態はエネルギーが極値をとるところ $\partial E / \partial \rho_c = 0$ で達成される。また、その状態がエネルギーの極小 $\partial^2 E / \partial \rho_c^2 > 0$ であれば安定であり、極大 $\partial^2 E / \partial \rho_c^2 < 0$ であれば不安定であるので、安定性が変化するところでは $\partial^2 E / \partial \rho_c^2 = 0$ となる。

(2.299) を ρ_c で微分して、平衡状態では

$$\frac{s_{\text{rad}}}{k_B} = \frac{4m_p a}{3k_B} \left(\frac{3k_2 G}{k_1 a} \right)^{3/4} M_*^{1/2} = 0.942 \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1/2} \quad (2.300)$$

となることが分かる。またこの場合、平衡状態では常に $\partial^2 E / \partial \rho_c^2 = 0$ であるので、星は常に (かろうじて) 安定に存在することができることになる。

密度は (2.296) から、温度を用いて

$$\rho = \left(\frac{k_1 a}{3k_2 G} \right)^{3/4} T^3 M_*^{-1/2} = 1.04 \times 10^3 \left(\frac{T}{2 \times 10^8 \text{ K}} \right)^3 \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-1/2} \text{ g cm}^{-3} \quad (2.301)$$

と書ける。これと (2.278) を用いて、星の半径は質量と中心温度 T_c を用いて

$$R_* = 4.20 \times 10^{-1} R_\odot \left(\frac{T_c}{2 \times 10^8 \text{ K}} \right)^{-1} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1/2} \quad (2.302)$$

となる。中心で水素燃焼が起きている場合、中心温度は一定に保たれるため、 $R_* \propto M_*^{1/2}$ となる。超大質量星の場合では、星を支えるためにはエネルギー生成率が大きい CNO サイクルによる核燃焼が起きる必要がある。始原ガスから星が出来る場合には、CNO サイクルを起こすために必要な CNO がないため、先に CNO を生成するヘリウム燃焼が起きる。これは $T_c \simeq 2 \times 10^8 \text{ K}$ で起き、中心温度はこの温度で固定される。

2.5.2 一般相対論の補正を考慮した場合

エネルギーの表式 (2.299) で輻射だけでなくガスを考慮して内部エネルギーを計算し、さらに一般相対論の補正をした場合、星はある臨界密度 $\rho_c = \rho_{\text{crit}}$ で不安定になることが示される。このことについて以下で説明する。

まずガスを考慮して内部エネルギーを計算する。ここではガスの寄与は輻射に比べて小さいと考える。全比エネルギー密度は

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varepsilon_{\text{rad}} + \varepsilon_{\text{gas}}}{\rho} \\ &= \frac{aT^4}{\rho} + \frac{3k_B T}{m_p} \end{aligned} \quad (2.303)$$

である。エントロピーを一定と仮定して温度を密度で表す。ガスのエントロピーは (B.31) である。全エントロピーは、

$$\begin{aligned} s &= s_{\text{rad}} + s_{\text{gas}} \\ &= \frac{4m_p a T^3}{3\rho} + k_B \ln \left(\frac{T^3}{\rho^2} \right) + s_0 \end{aligned} \quad (2.304)$$

と書ける。ここで s_0 はガスのエントロピーからの寄与の一部で一定値であり、(B.32) から $s_0/k_B = -21.0$ である。ガスのエントロピーは輻射に比べて無視できるとして、 s_{gas} に現れる T に対して 0 次の表式 (2.296) (s_{rad} を s に変えたもの) を (2.304) に代入して

$$T = \left(\frac{3s\rho}{4m_p a} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{s_0}{3s} - \frac{k_B}{3s} \ln \frac{3s}{4m_p a \rho} \right) \quad (2.305)$$

を得る。これを (2.303) に代入し、 ε_{gas} は ε_{rad} と比較して小さいと考え、この項に対しては T の 0 次の項のみ残して

$$u = 3K\rho^{1/3} + \lambda\rho^{1/3} + \mu\rho^{1/3} \ln \rho \quad (2.306)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{4as_0}{3s} \left(\frac{3s}{4m_p a} \right)^{4/3} + \frac{3k_B}{m_p} \left(\frac{3s}{4m_p a} \right)^{1/3} \\ &\quad - \frac{4k_B a}{3s} \left(\frac{3s}{4m_p a} \right)^{4/3} \ln \left(\frac{3s}{4m_p a} \right) \end{aligned} \quad (2.307)$$

$$\mu = \frac{4k_B a}{3s} \left(\frac{3s}{4m_p a} \right)^{4/3} \quad (2.308)$$

である。内部エネルギーは、ガスの寄与を考慮したことによる補正を ΔE_{int} と書くと

$$E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{int}} = \int u dm \quad (2.309)$$

と書くことができる。(2.306)の第1項は(2.299)の E_{int} を与える。(2.309)の右辺に(2.306)を代入し、 $\rho = \rho_c w^3$ とすると

$$E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{int}} = k_1 \left(K + \frac{\lambda}{3} + \tau \right) M_* \rho_c^{1/3} + \frac{1}{3} k_1 \mu M_* \rho_c^{1/3} \ln \rho_c \quad (2.310)$$

を得る。ここで

$$\tau = \frac{\mu}{M_* k_1} \int w \ln w^3 dm \quad (2.311)$$

である。

続いてエネルギーに対する一般相対論の補正について考える。これは一般相対論を考慮した場合としない場合の全エネルギーの差 ΔE_{GTR} を求めることで達成される。以下、この量を計算する。この補正を考える間は記述を簡潔にするために $G = c = 1$ とする。一般相対論では全エネルギーは

$$M = \int_0^{R_*} \rho' 4\pi r^2 dr \quad (2.312)$$

と書ける。ここで ρ' は静止質量から計算される密度 ρ と区別され

$$\rho' = \rho(1 + u) \quad (2.313)$$

であることに注意。シュバルツシルト計量を考えると、固有体積は

$$d\mathcal{V} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2} 4\pi r^2 dr \quad (2.314)$$

と書ける。一般相対論では、静止質量を除いた全エネルギーは

$$E = \int \left[\rho' \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} - \rho \right] d\mathcal{V} \quad (2.315)$$

と書ける。ここに(2.313)を代入し、重力の影響が小さいとして u と m/r を小さい数と考え、2次までとると

$$E = \int \rho \left[u - \frac{m}{r} - u \frac{m}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{r} \right)^2 \right] d\mathcal{V} \quad (2.316)$$

となる。一般相対論を考えない場合の全エネルギーは

$$E_{\text{Newt.}} = \int \rho u d\mathcal{V} - \int_0^{M_*} \frac{m'}{r'} dm' \quad (2.317)$$

である。ここで

$$dm' = \rho d\mathcal{V} \quad (2.318)$$

$$r' = \left(\frac{3\mathcal{V}}{4\pi} \right)^{1/3} \quad (2.319)$$

である。 m' 、 r' は(2.313)と(2.314)から分かるように m 、 r とは異なる。

2つの場合で \mathcal{V} が同じ時、その中に含まれるバリオンの数も同じである。言い換えれば、静止質量についての密度 $\rho(\mathcal{V})$ は一般相対論の場合とそうでない場合で同じ関数である。

(2.316) から (2.317) を引いて

$$\Delta E_{\text{GTR}} = \int \rho d\mathcal{V} \left[-u \frac{m}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{r} \right)^2 + \frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} \right] \quad (2.320)$$

となる。ここで角括弧の中の最後の2つの項を評価する。(2.314) は1次までで

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi r^3}{3} \left(1 + \frac{3}{r^3} \int_0^r m r dr \right) \quad (2.321)$$

であり、(2.319) と合わせて

$$r' - r = \frac{1}{r^2} \int_0^r m r dr \quad (2.322)$$

が導かれる。質量についても、1次までで

$$\begin{aligned} m' - m &= \int d\mathcal{V} \left[\rho - \rho' \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right] \\ &= - \int \rho d\mathcal{V} \left(u - \frac{m}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.323)$$

となる。これらを

$$\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m' - m}{r'} - \frac{m(r' - r)}{r r'} \quad (2.324)$$

に代入すると、1次の項はなく2次以上の項が残る。

(2.320) を、2次までの項を残し3次以上の項を無視して評価する。この時 ρ 、 r 、 $d\mathcal{V}$ をニュートニアンで評価しても、一般相対論の場合で評価したものとの誤差は3次以上である。これから ΔE_{GTR} は

$$\Delta E_{\text{GTR}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \quad (2.325)$$

と書ける。ここで

$$I_1 = - \int_0^{M_*} u \frac{m}{r} dm \quad (2.326)$$

$$I_2 = - \frac{1}{2} \int_0^{M_*} \left(\frac{m}{r} \right)^2 dm \quad (2.327)$$

$$I_3 = - \int_0^{M_*} \frac{dm}{r} \int_0^m u dm \quad (2.328)$$

$$I_4 = \int_0^{M_*} \frac{dm}{r} \int_0^m \frac{m}{r} dm \quad (2.329)$$

$$I_5 = - \int_0^{M_*} \frac{m dm}{r^4} \int_0^r m r dr \quad (2.330)$$

である。これらはポリトロープを考え

$$u = n \frac{P}{\rho} \quad (2.331)$$

とし、さらに静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{m\rho}{r^2} \quad (2.332)$$

を使うと計算できる。まず (2.330) は $-mdm/r^4 = 4\pi dP$ を使って部分積分することで

$$I_5 = \frac{1}{n} I_1 \quad (2.333)$$

となる。同様にして $mdm/r = -4\pi r^3 dP$ を使って (2.329) を部分積分していくと

$$I_4 = 2I_2 - \frac{2}{n} I_1 - \frac{3}{n} I_3 \quad (2.334)$$

を得る。また、(2.328) で $\int u dm$ を部分積分し、(2.284) を使い、もう一度部分積分すると

$$I_3 = I_1 - \frac{2n}{n+1} (I_2 + I_4) \quad (2.335)$$

を得る。(2.333)-(2.335) から、(2.325) は

$$\Delta E_{\text{GTR}} = \frac{5+2n-n^2}{n(5-n)} 2I_1 + \frac{n-1}{5-n} 3I_2 \quad (2.336)$$

となる。ポリトロープの関係式 (2.263) や (2.270) などを用いると、積分 I_1 と I_2 は無次元量で書き換えられる。この操作を行うと、最終的に

$$\Delta E_{\text{GTR}} = -k_3 M^{7/3} \rho_c^{2/3} \quad (2.337)$$

を得る。ここで

$$k_3 = \frac{(4\pi)^{2/3}}{(5-n)[z_n^2 |w'|]^{7/3}} \left[-\frac{5+2n-n^2}{(n+1)} 2 \int_0^{z_n} z^3 w' w^{n+1} dz + \frac{3}{2} (n-1) \int_0^{z_n} z^4 w'^2 w^n dz \right] \quad (2.338)$$

であり、 $n=3$ の場合には $k_3 = 0.918294$ である。

星の安定性について、一般相対論の補正を含めて考える。再び G と c を含めて考える。(2.290)、(2.310)、(2.337) から、全エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{int}} + E_{\text{grav}} + \Delta E_{\text{int}} + \Delta E_{\text{GTR}} \\ &= AM_* \rho_c^{1/3} - BM_*^{5/3} \rho_c^{1/3} + CM_* \rho_c^{1/3} \ln \rho_c - DM_*^{7/3} \rho_c^{2/3} \end{aligned} \quad (2.339)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} A &= k_1 \left(K + \frac{\lambda}{3} + \tau \right), \quad B = k_2 G \\ C &= \frac{k_1 \mu}{3}, \quad D = \frac{k_3 G^2}{c^2} \end{aligned} \quad (2.340)$$

と置いた。平衡状態 $\partial E/\partial \rho_c = 0$ では

$$0 = \frac{1}{3}(AM_* - BM_*^{5/3} + CM_* \ln \rho_c)\rho_c^{-2/3} + CM_*\rho_c^{-2/3} - \frac{2}{3}DM_*^{7/3}\rho_c^{-1/3} \quad (2.341)$$

であり、星が不安定の場合にはさらに $\partial^2 E/\partial \rho_c^2 < 0$ で

$$0 > -\frac{2}{9}(AM_* - BM_*^{5/3} + CM_* \ln \rho_c)\rho_c^{-5/3} - \frac{1}{3}CM_*\rho_c^{-5/3} + \frac{2}{9}DM_*^{7/3}\rho_c^{-4/3} \quad (2.342)$$

である。(2.342) に (2.341) を使うと

$$\rho_c > \rho_{\text{crit}} = \left(\frac{3C}{2D}\right)^3 \frac{1}{M_*^4} \quad (2.343)$$

を得る。(2.340) の C 、 D を代入し、(2.308) の μ 、(2.300) の s を使うと

$$\begin{aligned} \rho_{\text{crit}} &= \left(\frac{k_1 k_B c^2}{2k_3 G^2 m_p}\right)^3 \left(\frac{3k_2 G}{k_1 a}\right)^{3/4} \frac{1}{M_*^{7/2}} \\ &= 1.996 \times 10^{18} \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{-7/2} \text{ g cm}^{-3} \end{aligned} \quad (2.344)$$

となる。

(2.278) と (2.343)、(2.344) から、星が一般相対論的に不安定になるのは

$$R_* < 3.37 \times 10^{-6} R_\odot \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{3/2} \quad (2.345)$$

となる時であることが分かる。

中心で水素燃焼が起きている星の場合 $T_c \simeq 2 \times 10^8$ K とすると、(2.302) から $M_* > 1.25 \times 10^5 M_\odot$ の場合に星は不安定であることが分かる (図 2.13)。Direct collapse モデルで $M_* \sim 10^5 M_\odot$ の超大質量星を考える理由は、この質量が安定に存在できる星の質量の最大値程度であるからである。

準静的な収縮が起きるための条件も、星の安定性を考える時には重要である。これについて考えるために、星の熱進化の時間スケール

$$t_{\text{thermal}} = \frac{|E|}{L} \quad (2.346)$$

と自由落下時間スケール

$$t_{\text{ff}} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (2.347)$$

を比較する。(2.346) の E は星のエネルギー、 L は光度である。 $t_{\text{thermal}} > t_{\text{ff}}$ となることが、準静的な収縮が起きる条件である。

(2.341) を使って (2.339) から、エネルギーは

$$E = E_{\text{eq}} = -3CM_*\rho_c^{1/3} + DM_*^{7/3}\rho_c^{2/3} \quad (2.348)$$

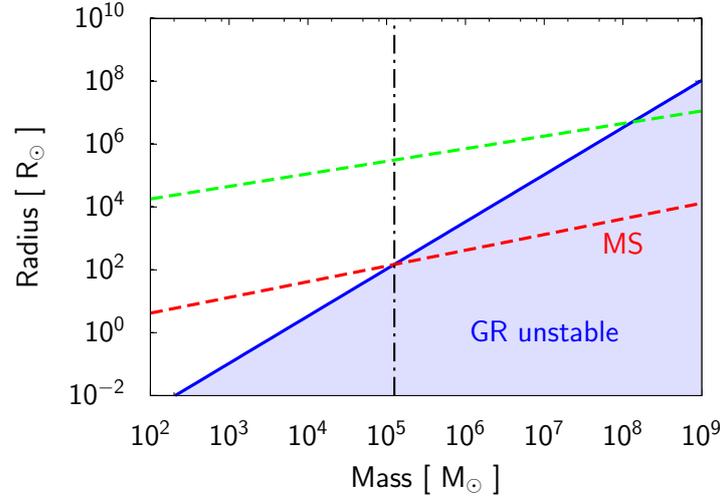


図 2.13: 一般相対論的な不安定性が起きる領域 ((2.345)、青) と、中心で水素燃焼を起こしている星に対応する線 ((2.302)、 $T_c = 2 \times 10^8$ K、赤線)、準静的な収縮が起きる境界 ((2.355)、緑線)。黒線は星が一般相対論的不安定性によって安定に存在できなくなる臨界質量 $1.25 \times 10^5 M_\odot$ に対応する。

と書ける。この操作は (2.341) を使って (2.339) の s を M_* 、 ρ_c で書き換えたことに対応している。 C の中にも s が残っているが、ここでは s として (2.300) を使うことにする。すると (2.348) は、(2.278) を使って ρ_c の代わりに R_* で書くことにすると

$$E_{\text{eq}} = -C' \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{3/2} \left(\frac{R_*}{R_\odot} \right)^{-1} + D' \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^3 \left(\frac{R_*}{R_\odot} \right)^{-2} \quad (2.349)$$

となる。ここで

$$C' = \frac{k_1 k_B}{m_p} \left(\frac{3k_2 G}{k_1 a} \right)^{1/4} \left(\frac{z_n^3}{4\pi |z_n^2 w'|} \right)^{1/3} \frac{M_\odot^{3/2}}{R_\odot} = 2.43 \times 10^{49} \text{ erg} \quad (2.350)$$

$$D' = D \left(\frac{z_n^3}{4\pi |z_n^2 w'|} \right)^{2/3} \frac{M_\odot^3}{R_\odot^2} = 4.14 \times 10^{43} \text{ erg} \quad (2.351)$$

である。数値は $n = 3$ の場合での値である。光度は、超大質量星の場合には全圧がほぼ輻射圧で決まっていることと、静水圧平衡の条件より圧力が重力と釣り合っていることから、エディントン光度

$$L_E = \frac{4\pi G M m_p c}{\sigma_T} = 1.26 \times 10^{38} \frac{M_*}{M_\odot} \text{ erg s}^{-1} \quad (2.352)$$

で書ける。これより

$$t_{\text{thermal}} = 6.13 \times 10^3 \text{ yr} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{R_*}{R_\odot} \right)^{-1} + 1.04 \times 10^{-2} \text{ yr} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R_*}{R_\odot} \right)^{-2} \quad (2.353)$$

を得る。また、(2.278) を使うと (2.347) は

$$t_{\text{ff}} = 1.40 \times 10^{-5} \text{ yr} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-1/2} \left(\frac{R_*}{R_\odot} \right)^{3/2} \quad (2.354)$$

と書ける。

準静的な収縮が起きる条件 $t_{\text{thermal}} > t_{\text{ff}}$ は、小さい量である (2.353) の第2項を無視すると

$$R_* < 2.86 \times 10^3 R_\odot \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{2/5} \quad (2.355)$$

となる。図 2.13 を見ると、 $M_* \gtrsim 10^8 M_\odot$ の星は準静的収縮が起きる領域で一般相対論的に安定に存在できないことが分かる。

第3章 研究方法・手法

この章では本研究で行った数値計算と、その際考えた質量降着史のモデル化について説明する。第2章では宇宙初期に限定せず一般論を説明したが、ここから先では宇宙初期の星の進化について考える。

3.1 数値計算方法

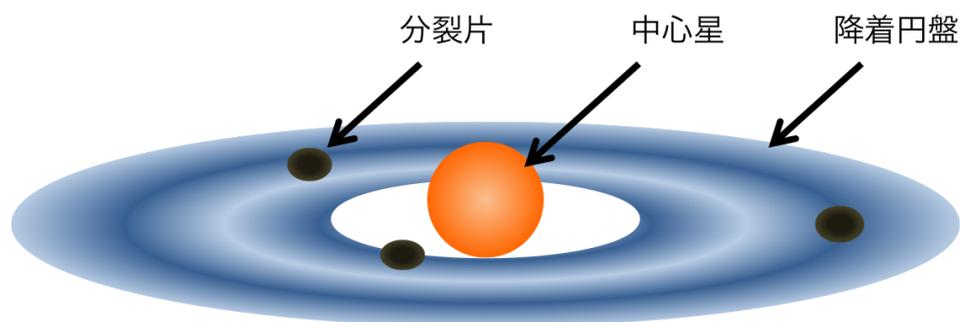


図 3.1: 計算で想定している状況。中心星の周りには重力不安定を起こす降着ガス円盤がある。この円盤から中心星へガスが降着していく。円盤内で密度が大きい部分では重力が大きくなり、分裂片が形成される。この分裂片は円盤内での角運動量輸送機構によって中心星へ移動し降着する。この時に降着のバーストが起きる。実際に計算を行うのは星の内部だけであり、円盤の構造は計算しない。

計算で想定する状況を図 3.1 に示す。中心星の周囲には降着円盤があり、ここから中心星へガスが供給される。この円盤が重力不安定になると、円盤で密度が大きい部分の自己重力が十分大きくなりガスが集まってくる。これにより分裂片が形成される。この分裂片は中心星の周りを回りつつ、円盤内のガスとの相互作用によって角運動量を失っていき、中心星へ落ち込んでいく。その際に中心星への降着率が急激に上昇する（バースト降着）。計算で実際に解く部分は中心星の内部構造であり、円盤の構造は計算で考えていない。そのため降着率は 3.2 節で説明するように複数のパラメータを使ってモデル化する。

1次元の星の進化計算では、Yorke & Bodenheimer (2008) で開発され、Hosokawa et al. (2013) で改良された数値計算コードを使う。このコードは、4つの星の進化の方程式で

ある質量保存の式、運動量保存の式、エネルギー保存の式、エネルギー輸送の式

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = E_{\text{nuc}} - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (3.4)$$

を差分化して解く。ここで m は星中心からの質量、 r は星中心からの半径、 P は輻射圧とそれ以外の圧力（ガス圧）を合わせた全圧力、 l は（局所）光度、 T は温度、 ρ は密度、 E_{nuc} は核反応によるエネルギー生成とニュートリノによる冷却を合わせた正味のエネルギー生成率、 c_P は単位質量あたりの定圧比熱、 $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_P$ である。また、 $\nabla = (\partial \ln T / \partial \ln P)_s$ は実際の温度勾配である。(3.4) は、2.1.4 節で説明したように物質による輻射の吸収・放射や、対流のようなミクロな物理過程を考慮して ∇ を与えることで、星内部の温度構造を決める方程式であり、(3.2) とは独立な式である。温度勾配 ∇ は、混合距離理論から計算される。このコードでは静水圧平衡を仮定して、(3.2) で慣性項を落としている。静水圧平衡を仮定して良いかどうかは自明ではないが、少なくとも星の表面付近のごく一部を除いて、興味のある時間スケール（特に後に述べる高降着率期の継続時間、表 3.1 参照）が自由落下時間よりも十分長いことから、問題にならないと考えられる。熱平衡は仮定せず、(3.3) では時間微分項を残している。核反応はヘリウム燃焼まで考慮に入れている。

星の内部は、ヘニエイ法によって解かれる。星の大気構造は、表面の境界条件を決定するために、4 次の古典的ルンゲクッタ積分と1 次の陰的オイラー法を組み合わせることで解かれる。1 次の陰的オイラー法は、陽的な計算ではガス圧が輻射圧と比べて無視できる時に計算が不安定になることに対処するために、本研究を行う過程でコードに実装された。

初期条件は、星の質量 $M_* = 2 M_\odot$ 、ポリトロップ指数 $n = 1.5$ のポリトロップ星とした。星の進化はごく初期を除いて、初期条件の詳細に依存しない。

ガス降着の影響を考慮するため、時間が進むごとに、一番表面の計算格子点に、物理量はその格子点のものと等しい $\dot{M}_* \Delta t$ の質量のガスを加える。星内部での格子は、格子間の物理量が急激に変化しないよう、また余分に格子を張らないよう、各時間ステップごとに加減する。また、表面で解いた解と内部で解いた解をつなぐ部分については、フィッティング質量 m_F を各時刻で同じとするのではなく、 m_F における温度が各時間でほぼ同じになるようにする。これは表面付近の格子を動かし調節することで実現される。

宇宙初期の星形成を考えるため、 ^1H と ^4He が主成分で、重水素が少量含まれる始原ガスを考えた。それぞれの初期質量比は $X = 0.72$, $Y = 0.28$, 4×10^{-5} とした。また、球対称の計算ではあるが、円盤がある状況を考え、輻射効率 η をパラメータとして与えた。この η は、降着ガスが中心星に落ち込むときに開放される重力エネルギーの何割かが、輻射エネルギーとして後からくるガスにより中心へ引きずられる効果を考慮したものであり、

表 3.1: 平均降着率が約 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ であるバースト降着のモデル

モデル名	A	B	C	D
高降着率の期間 [yr]	25	50	100	500
低降着率の期間 [yr]	270	540	1080	5400
高降着率 [M_{\odot}/yr]	1	1	1	1
低降着率 [M_{\odot}/yr]	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
遷移時間 [yr]	50	100	200	1000
輻射効率	0.1	0.1	0.1	0.01

表 3.2: 平均降着率が $0.02 - 0.03 M_{\odot}/\text{yr}$ であるバースト降着のモデル。遷移時間は降着率が上がる時と下がる時で値が異なり、表に示した数値はその平均値である。

モデル名	E	F
高降着率の期間 [yr]	100	2500
低降着率の期間 [yr]	950	2500
高降着率 [M_{\odot}/yr]	0.07	0.05
低降着率 [M_{\odot}/yr]	0.02	0.005
遷移時間 [yr]	~ 70	~ 360
平均降着率 [yr]	~ 0.024	~ 0.026
輻射効率	0.1	0.1

その値はよく知られていない ((1.2) とは異なる)。これにより、中心星の表面光度は

$$L_{*,\text{acc}} \equiv \eta L_{\text{acc}} = \eta \frac{GM_* \dot{M}_*}{R_*} \quad (3.5)$$

の分だけ増えることになる。計算の際に採用した η の値を表 3.1 にまとめる (3.2 節を参照)。Hosokawa et al. (2013) でも述べられているように、 η の値によって計算結果は大きく変わらない。

3.2 バースト降着のモデル化

重力不安定な円盤の中でできた分裂片が星に降着する時、降着率が低い値から高い値になる。分裂片の降着が終わった時は、降着率が高い値から低い値になる。この降着率が変化する間の時間を遷移時間と呼ぶことにする。バースト降着を、降着率が高い時期と低い時期の降着率と継続時間、2つの時期の遷移時間をパラメータとしてモデル化する。

主なバースト降着モデルを表 3.1、表 3.2 にまとめる。表 3.1 に示したモデルは、direct collapse の場合に予想される降着率 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ が一定の場合との比較をするため、平均降着率が約 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ となるように決める。バースト降着モデルは、高降着率期から計算を始める。表 3.2 に示したモデルは、一定降着率のもとでの星の進化の振る舞いが $\lesssim 4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ では $\gtrsim 4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ と異なることを踏まえて (Hosokawa et al. 2013)、平均降着率が $\lesssim 4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ となるように決める。こちらは低降着率期の途

中から計算を始める。また後者の場合では遷移時間は降着率が上昇する時と下降する時で異なる値をとる。高・低降着率期どちらから計算を初めても、定性的な振る舞いは変化しない。これらのモデルでは、遷移時間の降着率はべき関数により補間する。

遷移時間は現実的には0でなく有限の値と考えられるが、その値はよく知られおらず、高降着率期の時間程度と予想される。表 3.1 のモデルでは、遷移時間を高降着率期と低降着率期の中間の値にとり、表 3.2 では短めにとったが、計算ではこのパラメータの大きさによって結果が大きく変わることはない。

第4章 結果

この章ではまず一定降着率のもとでの星の進化について説明する。一定降着率の場合では、降着率が $4 \times 10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ 以下の場合と $4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ 以上の場合、それらの間の降着率の場合で星の進化の振る舞いが異なる。これら3つの場合に分けて説明する。

バースト降着が起きる場合では、平均降着率が $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合とそれ未満の場合とに分けて説明する。

4.1 一定降着のもとでの星の進化

一定降着率の計算では、全て $\eta = 0.1$ とした。

4.1.1 $\dot{M}_* < 4 \times 10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合

図 4.1 の青線に、一定降着率 $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ のもとでの星半径、電離光子放出率、有効温度の進化を示した。電離光子放出率の計算方法は付録 E を参照。この場合、星は進化の過程でいくつかの段階を経ることが知られている (Omukai & Palla 2003)。図 4.1 上図青線の星の半径の進化に着目しよう。まず星質量 $M_* \lesssim 6 M_{\odot}$ において、星は断熱的に進化する。この時刻では、星の収縮が進んでおらず温度が低いいため、クラマースの吸収係数 ($\kappa_{\text{ff}} \propto \rho T^{-3.5}$) が大きく光学的に厚い。さらに光度が小さいため、重力エネルギーを星の光度で解放していく時間として輻射冷却が効く時間を見積もるケルビン・ヘルムホルツ (Kelvin-Helmholtz、KH) 時間

$$t_{\text{KH}} = \frac{GM_*^2}{R_* L_*} \quad (4.1)$$

が大きく、これは星の進化の時間スケールである降着時間

$$t_{\text{acc}} = \frac{M_*}{\dot{M}_*} \quad (4.2)$$

と比べて大きい。これら2つの時間スケールの進化を、降着率 $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合に図 4.2 の青線に示す。輻射冷却が効く前に星の表面上に物質が降り積もっていき、熱が星内部に取り残されつつ、星は断熱的に進化していく。

この段階の後、続いて星の膨張と収縮 (KH 収縮) が起きる。断熱進化が終わった後、星内部が十分熱くなり κ_{ff} が下がる。そのため星は断熱でなくなり、エネルギーが星内部から星表面の方向に徐々に伝わっていく。このエネルギーの流れが星の表面に到達すると、

星の光度が急激に上昇し、それに伴って $t_{\text{KH}} \propto L_*^{-1}$ は小さくなる。星質量 $M_* \sim 7 M_\odot$ において、 t_{KH} が十分小さくなり、 $t_{\text{KH}} \lesssim t_{\text{acc}}$ となると、星の輻射冷却が効き始め、星は収縮し始める。これが KH 収縮である。その後は常に $t_{\text{KH}} \lesssim t_{\text{acc}}$ となり、 $M_* \sim 42 M_\odot$ において星の中心で水素燃焼が起きて星が支えられるようになるまで、星は収縮を続ける。最後に、 $M_* \sim 42 M_\odot$ で水素燃焼が始まると、星は零年主系列 (Zero Age Main Sequence: ZAMS、中心で水素燃焼が始まった星) となる。

今度は図 4.1 真ん中の図青線の電離光子放出率と下図青線の有効温度に着目しよう。星が KH 収縮して星の有効温度が高くなるまでは、星から出る紫外線量は $\sim 10^{37} \text{ sec}^{-1}$ 程度であることが見て取れる。星が KH 収縮すると有効温度が高くなり、ZAMS に到達するまで紫外線量が急激に $\gtrsim 10^{49} \text{ sec}^{-1}$ まで大きくなる。星が ZAMS に到達すると、電離光子放出率の増加は緩やかになる。しかし ZAMS の星では輻射フィードバックが効くため、周辺ガスの降着は実際は止まると考えられる。この場合星の質量は最終的に \sim 数 $10 M_\odot$ となると考えられる。

降着率が $4 \times 10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ 以下の範囲では、降着率が異なれば星の定量的な振る舞いは異なるが、定性的な振る舞いは同じである。

4.1.2 $\dot{M}_* > 4 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ の場合

図 4.1 の破線に、一定降着率 $10^{-1} M_\odot/\text{yr}$ の場合の星の進化を示した。半径の進化を見ると、星は大きな収縮をすること無く、ほぼ単調に膨張していくことが分かる。これは $10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ のもとでの星半径の進化と比べて、定性的に異なる。

この星の進化の振る舞いについて詳しく見ていく。星質量 $M_* \lesssim 22 M_\odot$ では星は断熱的に進化する。これは 4.1.1 節で述べたように、星内部が低温なので、クラマース吸収係数 κ_{ff} が大きく光学的に厚いからである。図 4.1 の星の半径の進化の図で、 $10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ の場合の断熱進化と比べ星の半径が大きいのは、降着率が大きいことにより、星表面のエントロピーが大きいためである (図 4.2 Hosokawa & Omukai 2009)。星の半径 R_* は、星の質量を M_* 、平均分子量を μ 、気体定数を \mathcal{R} 、比エントロピーを s として

$$R_* \propto M_*^{-1/3} \exp \left[\frac{2\mu}{3\mathcal{R}} s \right] \quad (4.3)$$

となるので、エントロピーが大きいほど星の半径は大きい。この式は、理想気体の比エントロピーの式 (B.25) に、質量保存の式 (3.1) と運動量保存の式 (3.2) から大雑把に分かる $\rho \sim M_*/R_*^3$ と $P \sim GM_*^2/R_*^4$ という関係式を代入することにより得られる。半径がより大きいために、星内部の温度がより低い。そのため、内部が光学的に薄くなるまで星内部が高温になるためには、星はより物質を降り積もらせ大質量になる必要がある。

星質量 $M_* \gtrsim 32 M_\odot$ で星は単調膨張段階に入る。星内部が十分高温になり光学的に薄くなると、星内部のエネルギーが解放され、星内部は収縮する。これは図 4.3 上の星内部の半径の構造の進化を見ても分かる。一方で星表面では、大量に存在する H^- の束縛-自由遷移の吸収係数の温度依存性が強い影響で、星の有効温度 T_{eff} が $\sim 5,000 \text{ K}$ に固定されている (Hosokawa et al. 2013)。星内部で解放されたエネルギーは星表面に到達すると、 H^- を束縛-自由遷移するのに使われる。これが続けて起こるために、星表面のエントロ

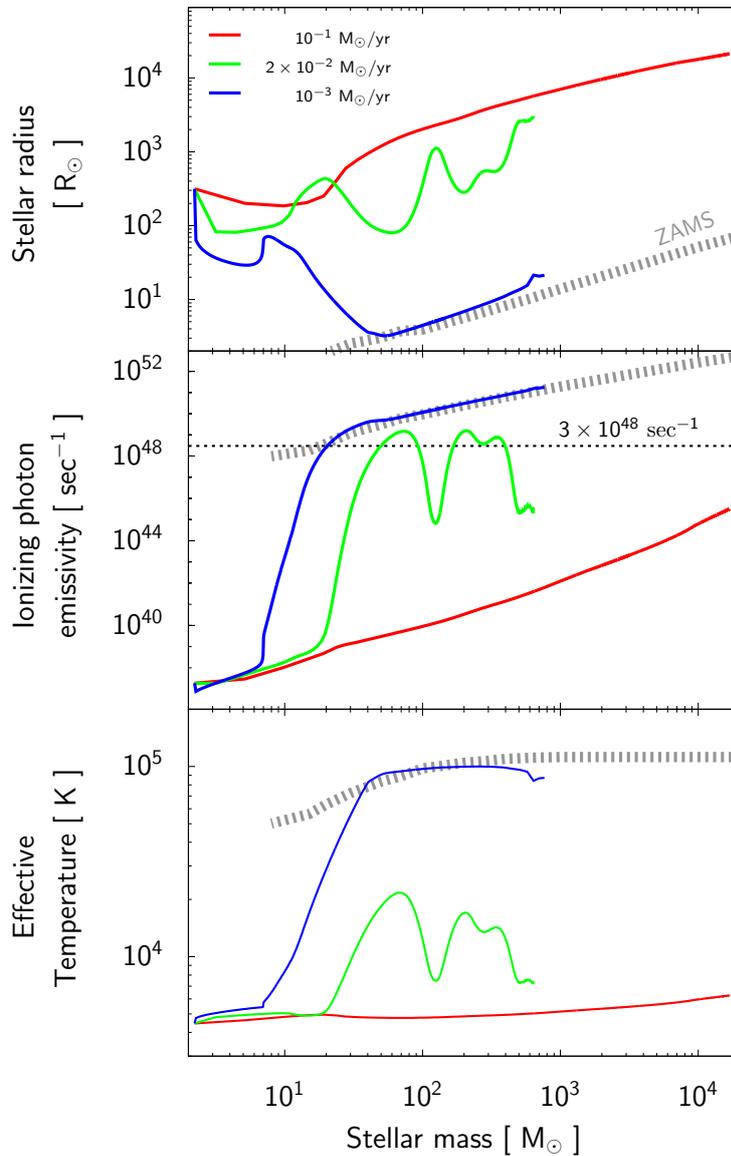


図 4.1: 一定降着率の場合の星の進化。降着率が $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ (青)、 $2 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ (緑)、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ (赤) の場合についてプロットした。図は横軸星の質量として、上から星の半径、電離光子放出率、有効温度の進化である。太破線は ZAMS についてプロットしたもの。電離光子放出率の図で、 $3 \times 10^{48} \text{ sec}^{-1}$ の短破線は、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の降着率の場合に輻射フィードバックが効く電離光子放出率の臨界値に対応する (5.1 節参照)。

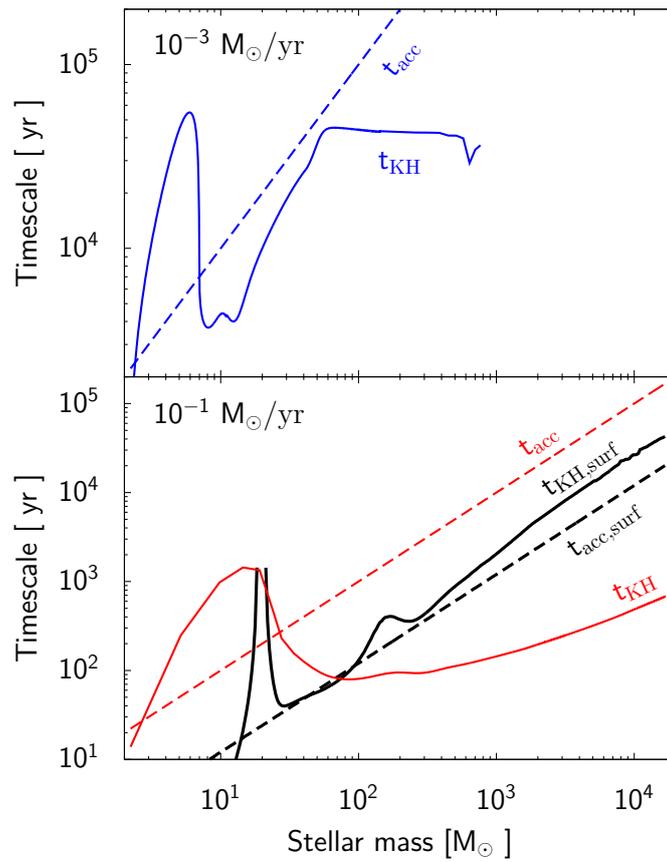


図 4.2: 一定降着率の場合の時間スケールの進化。上図: 降着率 $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合。下図: 降着率 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合。赤実線は t_{KH} 、黒破線は t_{acc} 、黒実線は $t_{\text{KH,surf}}$ 、赤破線は $t_{\text{acc,surf}}$ ($f = 0.4$ 、積分範囲 $0.7 M_*$ から M_*) をプロットしたもの。

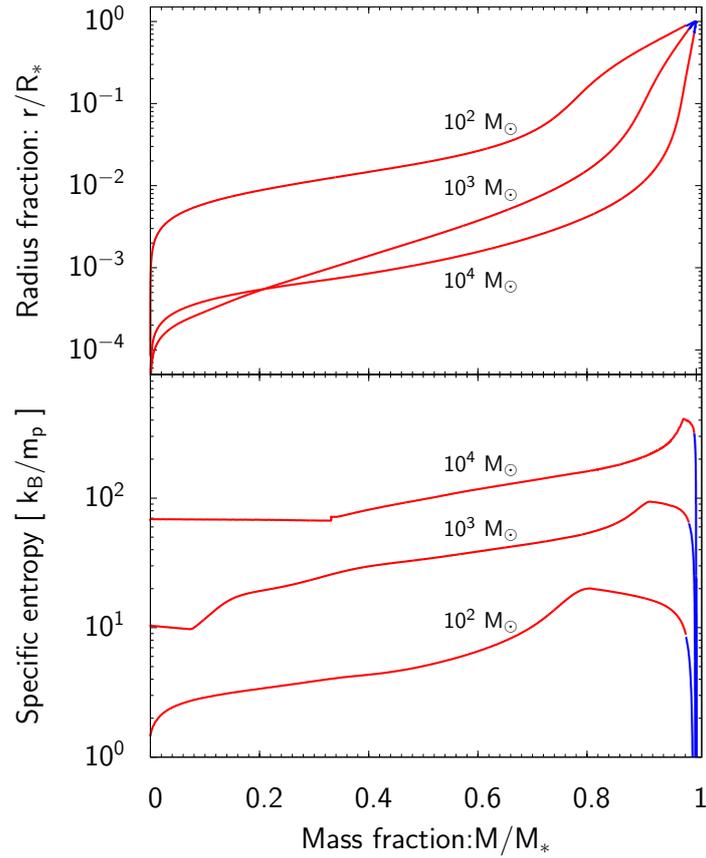


図 4.3: 一定降着率 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合の星の内部構造。星質量が $10^2 M_{\odot}$ 、 $10^3 M_{\odot}$ 、 $10^4 M_{\odot}$ の時のものを示した。横軸は中心からの質量 m と星質量 M_* との比である。赤線は星の内部の解であり、青線は星の大気解である。上図：中心からの半径 r と星半径 R_* の比。中心付近で半径の大きさが $10^3 M_{\odot}$ のものよりも $10^4 M_{\odot}$ のものの方が大きくなっているのは、中心付近で水素燃焼領域が広がっているからである。下図：輻射の比エントロピー (B.27 参照)。中心で水素燃焼が起き対流が起きている領域では、エントロピーがほぼ一定になっている。

ピーは次第に増加する。これは図 4.3 下に示した比エントロピーの内部構造からも見て取れる（ここでは星のエントロピーはほぼ輻射のもので決まると考え、輻射の比エントロピーを示した）。そのため、星は膨張を続ける。この時期は星の光度がエディントン光度 $\propto M_*$ で決まるので、 $L_* = 4\pi R_*^2 T_{\text{eff}}^4$ から $R_* \propto M_*^{1/2}$ となり、このことから星の半径が星の質量とともに大きくなるのが分かる。

星表面が大きく膨張している場合、通常の内部構造を無視した KH 時間 t_{KH} を使うと、星が大きく膨張し続けることを説明できない。代わりに、星表面の KH 時間を定義して考えると上手く説明できる。図 4.2 に、通常の定義の KH 時間 t_{KH} と降着時間 t_{acc} に加えて、星表面の KH 時間

$$t_{\text{KH,surf}} = \frac{f \int s_{\text{rad}} T dm}{\int dl} \quad (4.4)$$

と、星表面の降着時間

$$t_{\text{acc,surf}} = \frac{f \int dm}{\dot{M}_*} \quad (4.5)$$

の進化をプロットした。ここで s_{rad} は輻射の比エントロピー、 f は $\mathcal{O}(1)$ の量である。星表面の KH 時間は、星表面でエントロピーがエネルギー輸送により減少する時間スケールとして定義した。因子 f は 0.4 とし、積分範囲は $0.7 M_*$ から M_* とした。この積分範囲は、星表面付近をどこまでと定義するかを決定するもので、この範囲によって $t_{\text{KH,surf}}$ と $t_{\text{acc,surf}}$ の絶対的な値は変わるが、多少この範囲を変えても、以下の結論は変わらない。単調膨張期 $M_* \gtrsim 32 M_\odot$ では、 $t_{\text{KH}} < t_{\text{acc}}$ となっており、この時期に星が熱緩和して重力収縮すると予想される。しかしながら実際は星は膨張し続ける。これは、 t_{KH} の定義 (4.1) では、星の中心付近に質量が集中し、星表面付近に質量がほとんどないことを考慮していないことが原因である。星の中心に質量が集中していることは図 4.3 上から見て取れる。この時期では、星が収縮するかどうかは、星表面付近の KH 時間 $t_{\text{KH,surf}}$ と降着時間 $t_{\text{acc,surf}}$ の大小関係により決まる。図 4.2 を見ると、 $M_* \gtrsim 32 M_\odot$ において、 $t_{\text{KH,surf}} \gtrsim t_{\text{acc,surf}}$ となっており、確かに星表面では、熱緩和するより速く物質が降り積もっていくことが分かる。そのため、星表面ではエントロピーが逃げずに、次から次へと降り積もる物質によって徐々に大きくなり、星は膨張し続ける。

図 4.1 を見ると、有効温度や電離光子放出率は $10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ の場合の進化と異なり、途中で急激に大きくなり、低い値を保っていることが分かる。そのため、紫外線による周辺ガスの電離が起きず、フィードバックが起らないと考えられる（5.1 節参照）。

4.1.3 $4 \times 10^{-3} M_\odot/\text{yr} < \dot{M}_* < 4 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ の場合

図 4.1 の緑線に、一定降着率が $2 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ のもとでの星の進化を示した。星質量 $\lesssim 10 M_\odot$ での進化は断熱進化である。しかし $\gtrsim 10 M_\odot$ においては、星は膨張と収縮を繰り返す。それに伴って電離光子放出率と有効温度も振動する。これらはほぼ $10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ の場合と $10^{-1} M_\odot/\text{yr}$ の場合の中間にとどまる。振動の様子は降着率が異なれば異なる。

輻射フィードバックが効くかどうかは電離光子放出率の振る舞いに依存する。降着率が低いと $\lesssim 4 \times 10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ の場合の星の進化に近づき、逆に降着率が高いと $\gtrsim 4 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$

の場合の星の進化に近づくため、降着率が高いほど輻射フィードバックは効きにくくなると考えられる。

4.2 バースト降着のもとでの星の進化

4.2.1 平均降着率が $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合

図 4.4 の青線と赤線に、時間変動する降着率のもとで星の進化を計算した、モデル A・B (表 3.1 参照) のもとでの降着率、星質量、星半径、電離光子放出率の進化を示した。また、モデル C・D についての同様の図を図 4.5 に示した。これらのモデルでは、いくつか特徴が見られる。まず、高降着率期から低降着率期に移行した後、しばらくは星の半径が変化しない。そこから、星表面の輻射冷却が効き始めれば、星の収縮が始まり、冷却が効かなければ、星は収縮しない。降着率が下がるところで、星が収縮して電離光子放出率が急激に上がる時期もあれば、降着率が下がっても星が収縮せず電離光子放出率が大きくなる時期もあることに注意しよう。電離光子放出率が大きい時期は、フィードバックが効く可能性がある。

それでは星が収縮する条件は何で決まっているのか。このことを詳しく説明するために、モデル C の場合に着目する。まず $t \sim 100 \text{ yr}$ 、 $M_* \sim 100 M_{\odot}$ で、降着率が $1 M_{\odot}/\text{yr}$ から徐々に下がり始めるが、この時、星の半径はほとんど変化しない。これは降着率が、 $t \lesssim 200 \text{ yr}$ で臨界降着率 $\sim 4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ 以下になった後、 $t \lesssim 400 \text{ yr}$ で星表面が熱緩和して星が収縮するまでに、 $t_{\text{KH,surf}}$ 程度の時間が掛かるからである。図 4.6 に、 t_{KH} と $t_{\text{KH,surf}}$ の進化を示した。モデル C の場合について見ると、 $t \sim 200 \text{ yr}$ において実際に $t_{\text{KH,surf}} \sim 200 \text{ yr}$ と読み取れる。ここでは (4.4) の $t_{\text{KH,surf}}$ の計算で、積分範囲を $0.01 R_*$ から $1 R_*$ とした。この範囲は、図 4.7 上や図 4.8 の星の内部構造を見ると、進化の初期 $t \lesssim 10^3 \text{ yr}$ や星が収縮している間では星の質量の大部分に対応し、それ以外の星が膨張している時期では、星表面の質量の約 10-30% に対応する。この積分範囲を多少変えても、結果には影響しない。

モデル C での一番最初の収縮が始まる時点 $t \sim 400 \text{ yr}$ では、低降着率期の時間よりも星表面の KH 時間が短い、すなわち $t_{\text{KH,surf}} < 1,080 \text{ yr}$ である。そのため、 $t \sim 1,400 \text{ yr}$ で次のバースト降着が来る前に、星の表面が熱緩和する時間が十分とれて、星は収縮する。この星の収縮は KH 収縮である。それを確かめるために、KH 収縮を仮定して、星が収縮し始めた時点からの星の半径の変化を解析的な式

$$\frac{R_*}{R_{\odot}} = \left(\frac{1}{R_{*,0}/R_{\odot}} + C \frac{t-t_0}{1 \text{ yr}} \frac{1}{M_*/M_{\odot}} \right)^{-1} \quad (4.6)$$

で表し、 C をパラメータとしてフィッティングを行った (付録 F 参照)。添字の 0 は、収縮の開始時点での量を表す。図 4.5 に、モデル C の最初の収縮に対するフィッティングの結果を示す。図を見ると、KH 収縮を仮定したフィッティング曲線が星半径の収縮の線をよく再現出来ていることが分かる。このことから、星の収縮が KH 収縮であると言える。

時刻 $t \sim 1,400 \text{ yr}$ での次のバースト降着では、星表面に降り積もる物質が急激に多くなり、星表面のエントロピーが増加するために、星の半径は急激に大きくなる。以降、

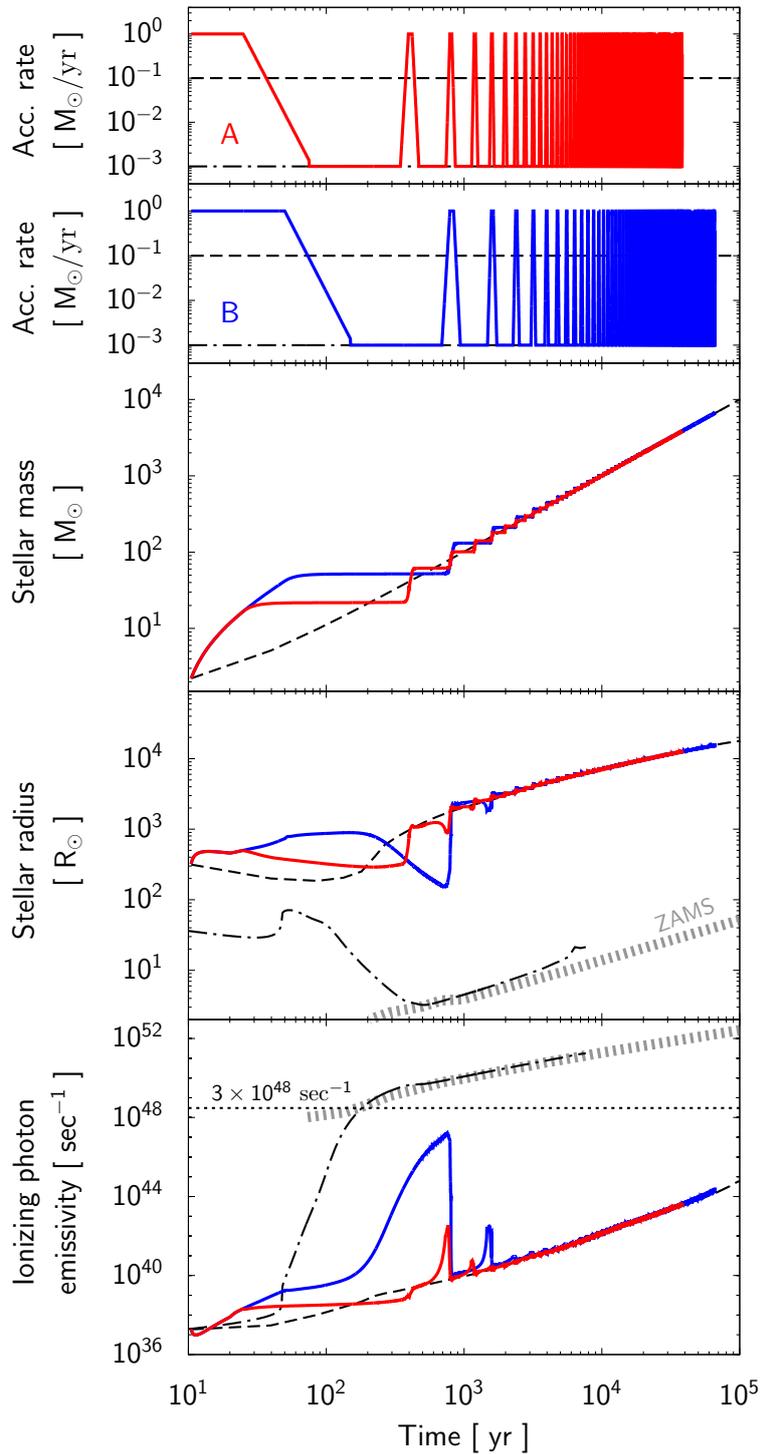


図 4.4: 降着率 (上 2 つ) と星質量 (3 つ目)、星半径 (4 つ目)、電離光子放出率 (5 つ目) の進化。赤線は低降着率期が 270 年のモデル (A)、青線は低降着率期が 540 年のモデル (B)。黒線は一定降着率の場合の星の進化の線で、破線が $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ 、一点鎖線が $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ のモデル。両モデルで星の質量の進化が一致するように、 $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ のモデルでは時刻を約 1/100 倍してプロットした。例えば、実際は 10^3 yr のところが、 10 yr にプロットされている。灰色の太破線は ZAMS のデータである。これも、ある時刻での星質量が、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の星質量の進化に合うようにプロットした。電離光子放出率の図で、 $3 \times 10^{48} \text{ sec}^{-1}$ の短破線は、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の降着率の場合に輻射フィードバックが効く電離光子放出率の臨界値に対応する (5.1 節参照)。

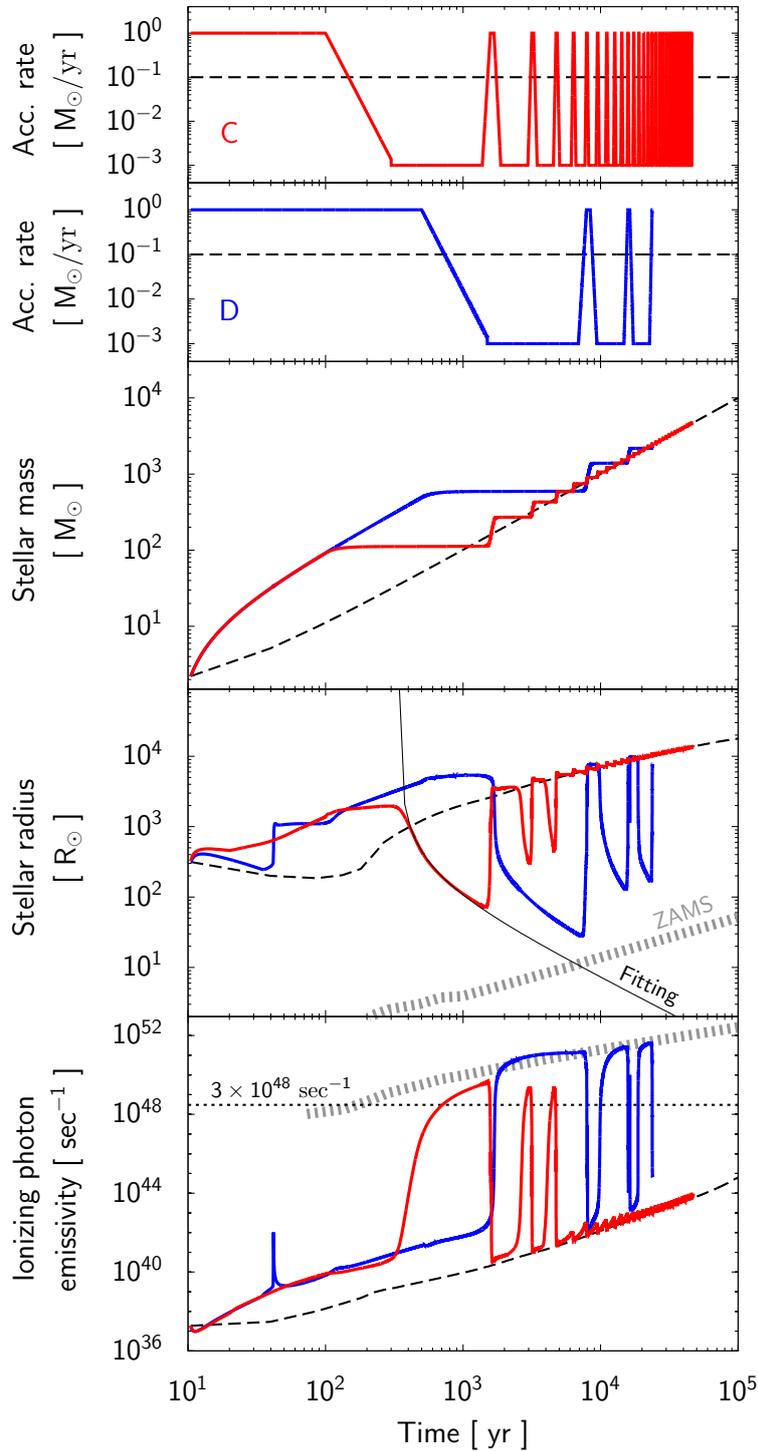


図 4.5: 図 4.4 と同様の図で、赤線は低降着率期が 1,080 年のモデル (C)、青線は低降着率期が 5,400 年のモデル (D)。黒破線は一定降着率 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ のモデル。灰色の太破線は ZAMS のデータ (図 4.4 参照)。黒の実線は解析モデルによるフィッティングである。電離光子放出率の図で、 $3 \times 10^{48} \text{ sec}^{-1}$ の短破線は、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の降着率の場合に輻射フィードバックが効く電離光子放出率の臨界値に対応する (5.1 節参照)。

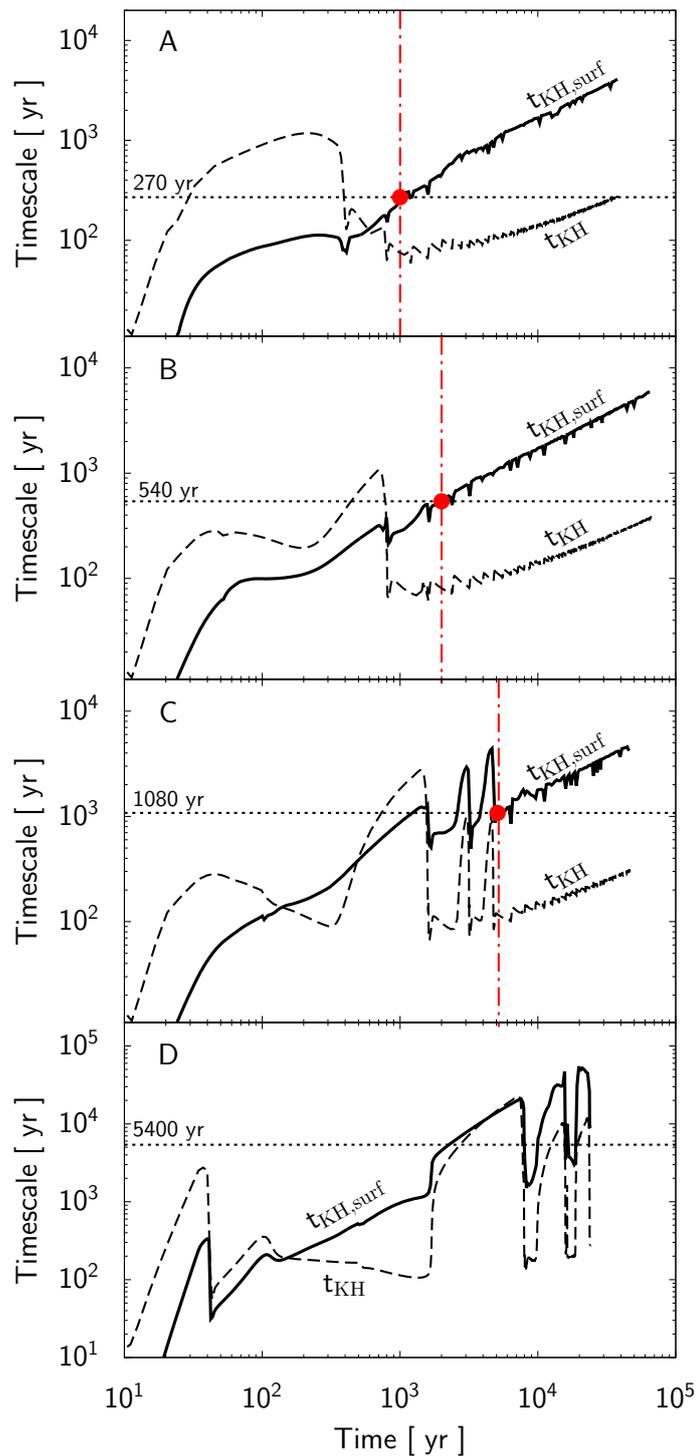


図 4.6: 4つのモデル (A、B、C、D) の星の KH 時間スケールの進化。実線は $t_{\text{KH,surf}}$ ($f = 0.4$ 、積分範囲 $0.01 R_*$ から R_*)、破線は t_{KH} をプロットしたもの。短破線は各モデルの低降着率期の時間に対応している。実線と短破線との交点を図に示している。交点より後の時間 (赤の一点鎖線の右側) では、星表面の KH 時間が低降着率期よりも長くなるため、低降着率期に星表面が熱緩和する前にバースト降着が起こり、星表面にエントロピーが供給されるため、星は収縮しなくなる。

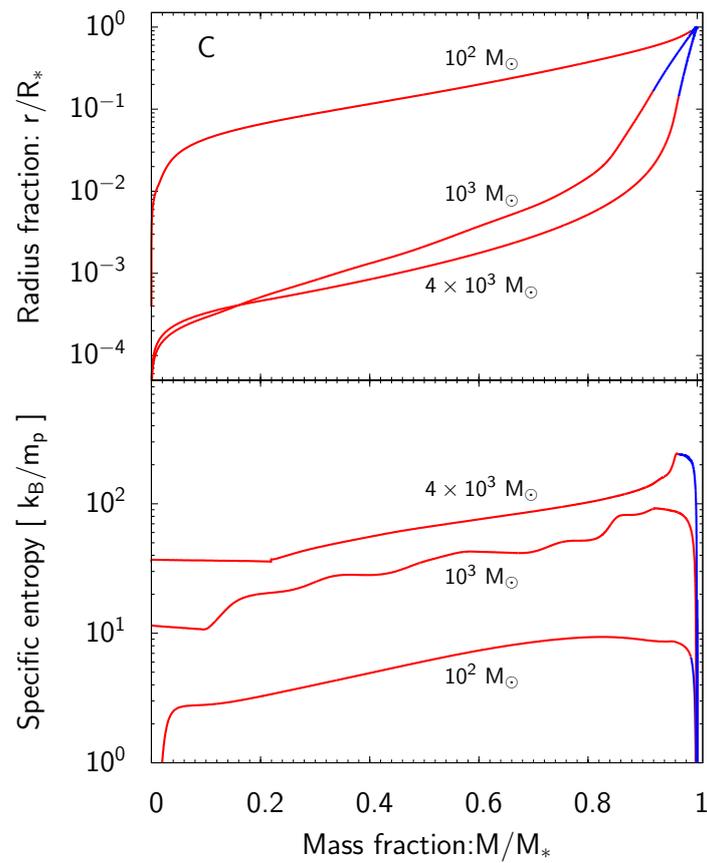


図 4.7: モデル C の星の内部構造の進化。星の質量が $10^2 M_\odot$ (10^2 yr)、 $10^3 M_\odot$ (10^4 yr) と $4 \times 10^3 M_\odot$ (4×10^4 yr) の場合について示した。図の詳細な説明は図 4.3 を参照。一定降着率の場合 (図 4.3) と比較して、 $10^3 M_\odot$ の場合のエントロピーの線は降着史を反映して形が歪んでいる。

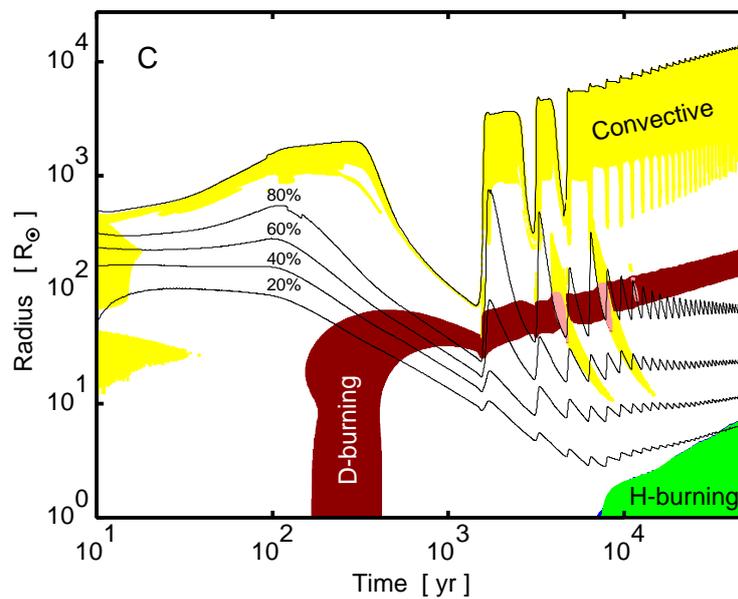


図 4.8: モデル C の星の内部構造の進化。縦軸は星の半径である。黒の実線は上から星の半径、星の中心からの質量がそれぞれ 80%、60%、40%、20% の部分における半径である。黄色の領域は対流領域、すなわちシュバルツシルト臨界 (2.84) を満たす領域である。茶色の領域は重水素燃焼の領域、すなわち重水素の燃焼によって重水素の質量比が減っていく時間スケールが、主系列星の寿命よりも短くなる領域である。緑色の領域は水素燃焼が起きている対流コアで、判定基準は重水素の場合と同様である。ピンク色の領域は重水素燃焼が起きている対流層である。

$t \sim 2,500 \text{ yr}$ ($M_* \sim 260 M_\odot$) と $t \sim 4,000 \text{ yr}$ ($M_* \sim 430 M_\odot$) において、2回の同様の収縮が起きる。

時刻 $t \sim 5,000 \text{ yr}$ 以降は、星の半径の収縮が起きないことが見て取れる。これは、図 4.6 で見られるように、星表面の KH 時間 $t_{\text{KH,surf}}$ が時刻とともに大きくなり、 $t \sim 5,000 \text{ yr}$ で $t_{\text{KH,surf}}$ が低降着率期の時間 $\sim 1,080 \text{ yr}$ よりも大きくなるからである。すなわち $t \gtrsim 5,000 \text{ yr}$ では、星表面の熱緩和が効く前に、次のバースト降着がくるため、半径の収縮は起こらない。収縮が起きなくなった時刻では、降着率が平均化されたものとして考えて、モデル C のもとでの星の進化は $0.1 M_\odot/\text{yr}$ の一定降着率の場合の進化にほぼ一致し、単調に膨張していく。(収縮しない時刻でも完全に進化が一致するわけではなく、図 4.7 下のよう内部構造は降着史を反映して一定降着率の場合と比較して少し歪む)。

4.1.2 節でも述べたように、星が大きく膨張している間は、熱緩和の時間スケールとして、星の内部構造を無視した t_{KH} ではなく、 $t_{\text{KH,surf}}$ を使うことが重要である。もし t_{KH} を使うと、 $t \gtrsim 5,000 \text{ yr}$ において星が収縮しなくなることを説明できない。このことについて見ていこう。図 4.6 を見ると、 t_{KH} は星の進化の過程で、収縮時を除いて常に低降着率期より小さい。そのため、 t_{KH} で熱緩和時間を見積もると、星は $t \gtrsim 5,000 \text{ yr}$ の時刻でも収縮し続けると予想される。しかしながら実際は $t \gtrsim 5,000 \text{ yr}$ において星は収縮しない。

それでは t_{KH} はどのように修正され、どのように解釈すればよいであろうか。この t_{KH} では星の内部構造を無視していた。図 4.7 と図 4.8 にモデル C の場合の星の内部構造進化を示す。時刻 $t \gtrsim 5,000 \text{ yr}$ において、星表面付近には質量がほとんど無く、質量の大半は星の半径の 1% 部分に集中していることが分かる。(4.1) で定義される $t_{\text{KH}} = GM_*^2/L_*R_*$ は、もともと

$$t_{\text{KH,orig}} = \frac{\int_0^{M_*} Gm/r dm}{L_*} \quad (4.7)$$

から大きくずれないことを想定しているが、今の場合、 $t_{\text{KH,orig}} \sim GM_*^2/L_*(0.01 R_*) = 100 t_{\text{KH}}$ となり、 $t_{\text{KH,orig}}$ よりも 2 桁程度過小評価していることが分かる。この $t_{\text{KH,orig}}$ は、実際に計算すると

$$t_{\text{KH,orig}} \sim \frac{\int_0^{M_*} s_{\text{rad}} T dm}{L_*} \quad (4.8)$$

となっており、星全体が熱緩和する時間スケールと解釈できる。

それでは熱緩和時間として $t_{\text{KH,orig}}$ を使うとどうなるか。この場合、 $t \sim 1,000 \text{ yr}$ で $t_{\text{KH,orig}} \sim 1,080 \text{ yr}$ となり、星が収縮しなくなる時刻を正しく見積もれない。星が大きく膨張している間は、星の収縮には星表面のエントロピーの大きさが重要となってくるため、星全体の熱緩和時間 $t_{\text{KH,orig}}$ ではなく、星表面の熱緩和時間 $t_{\text{KH,surf}}$ を使う必要がある。

以上のモデル C について述べたことは、モデル A・B・D に対しても当てはまる。例えば、モデル B について、 $t \gtrsim 2,000 \text{ yr}$ では星の収縮は起きない。KH 時間の進化を図 4.6 に示す。これを見ると、 $t_{\text{KH,surf}}$ が低降着率期の時間と等しくなるのは、 $t \sim 2,000 \text{ yr}$ であり、星の収縮が止まる時刻を上手く説明できることが分かる。 t_{KH} を使うと、この時刻を上手く説明できないことも分かる。

図 4.4 と図 4.5 を見ると、低降着率期の時間が短いモデルほど、収縮が止まる時刻が早く、その時の星質量も小さく、大きく収縮回数も少なく、電離光子放出率も大きくなることが分かる。これは以下のように説明できる。星の光度がエディントン光度 $\propto M_*$ であ

り、有効温度が固定されていて星の半径が $R_* \propto L_*^{1/2} \propto M_*^{1/2}$ であると考えたと (4.1.2 節参照、これは星が大きく膨張している時に成り立つ)、大雑把に

$$t_{\text{KH,surf}} \sim \frac{\int Gm/r dm}{\int dl} \propto \frac{GM_*^2}{L_* R_*} \propto M_*^{1/2} \quad (4.9)$$

である。すなわち星の質量が大きいほど、 $t_{\text{KH,surf}}$ が大きくなる。これは物理的には、星の質量が大きいと星表面の重力エネルギーが $\propto M_*^2/R_* \propto M_*^{3/2}$ に比例して大きくなるのに対し、星の光度はエディントン光度 $\propto M_*$ に比例してしか大きくなり、エネルギーを失うより速くエネルギーを得ることが原因である。実際は、 $t_{\text{KH,surf}}$ の M_* についての冪は $1/2$ より少し大きい。これは、厳密に (4.9) の第2式から第3式の関係が成り立たないからである。以上より、低降着率期が短い程、 $t_{\text{KH,surf}}$ が低降着率期の時間と等しくなる星質量が小さくなる。さらに、低降着率期が短いと、星が大きく収縮する前にバースト降着が起きるため、星はあまり縮まない。星が大きく収縮しなければ、星の有効温度が高くなり、電離光子放出率も大きくなり、よって低降着率期が短いほど、星が収縮しなくなる時刻が早く、大きく収縮回数も少なく、電離光子放出率も大きくなり、このことから、低降着率期が短いほど、フィードバックが効きにくいと言える (5.1 節参照)。

4.2.2 平均降着率が $10^{-1} M_\odot/\text{yr}$ 未満の場合

図 4.9 に、平均降着率が $0.02 - 0.03 M_\odot/\text{yr}$ である、バースト降着モデル E と F の星の進化を示した。この降着率の範囲では星は断熱進化の後に膨張と収縮を繰り返すと予想されるが、バースト降着が起きる場合は必ずしもそのようにならないことが分かる。特にこれらのモデルは降着率が臨界降着率 $\sim 4 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ に近く、星の半径や電離光子放出率の進化は平均降着率が $10^{-1} M_\odot/\text{yr}$ のバースト降着モデル A-D の場合に近い。モデル E に限ると、平均降着率が $\lesssim 4 \times 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ であるにも関わらず、星の進化は時刻が $t \gtrsim 3,000 \text{ yr}$ において降着率が一定の $10^{-1} M_\odot/\text{yr}$ の場合に一致する。

平均降着率がほぼ同じであるモデル E とモデル F を比較すると、モデル F の方がモデル E よりも星の収縮回数が多く、1回の収縮の大きさも大きく、電離光子放出率の上昇の度合いも大きいことが分かる。このことから、これらのモデルでも低降着率期が短いほど星の進化の過程で輻射フィードバックが効きにくいと言える。

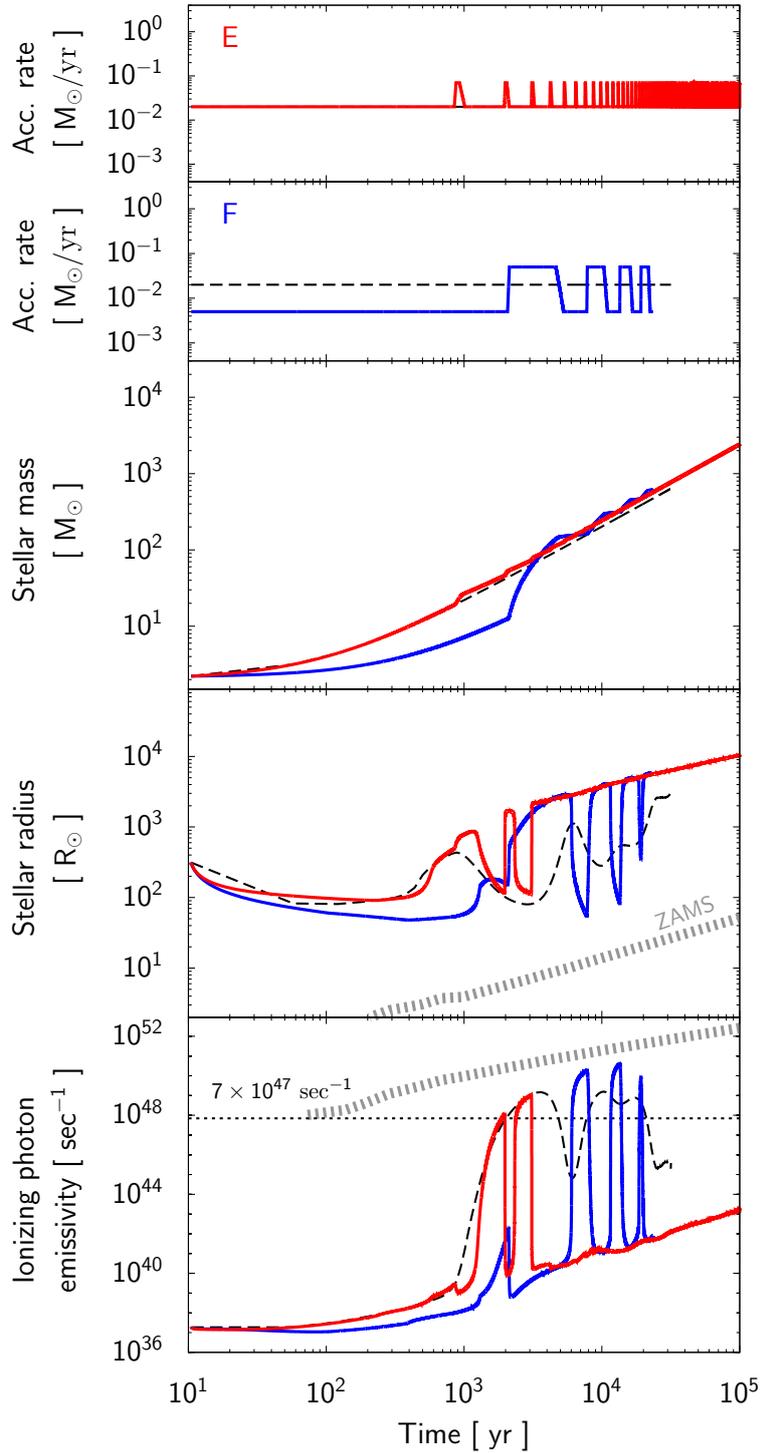


図 4.9: 図 4.4 と同様の図で、赤線は低降着率期が 950 年のモデル (E)、青線は低降着率期が 2,500 年のモデル (F)。黒破線は一定降着率 $2 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ のモデル。灰色の太破線は ZAMS のデータ (図 4.4 参照)。電離光子放出率の図で、 $7 \times 10^{47} \text{ sec}^{-1}$ の短破線は、 $2 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ の降着率の場合に輻射フィードバックが効く電離光子放出率の臨界値に対応する (5.1 節参照)。

第5章 議論

5.1 輻射フィードバックが起きる可能性

バースト降着のもとで進化する超大質量星からの紫外線が、周辺ガスを電離してフィードバックを起こすかどうか、簡単に議論しよう。降着率が $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$ の場合は、単位時間に降着する水素原子とヘリウム原子の数は合計 $\dot{M}_*/m_u\mu_0 \simeq 3 \times 10^{48} \text{ sec}^{-1}$ である。ここで μ_0 は (2.173) から計算されるイオン1個当たりの平均分子量である。これら全ての粒子に1度電離光子が当たればフィードバックが効き始めるとして、フィードバックが効き始める電離光子放出率の下限 $S_{\text{min},-1}$ を見積もると、 $S_{\text{min},-1} = 3 \times 10^{48} \text{ sec}^{-1}$ となる。図 4.1 と図 4.4、図 4.5 の電離光子放出率の図に、 $S_{\text{min},-1}$ に対応する線を引いた。図 4.1 の一定降着率 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合の電離光子放出率は、計算終了まで常に $S_{\text{min},-1}$ を大きく下回っており、この降着率ではフィードバックが効かないと考えられる。図 4.4 に示した、低降着率期が短いモデル A・B の場合も、計算終了まで電離光子放出率が常に $S_{\text{min},-1}$ を下回っている。一方図 4.5 に示した、低降着率期が長いモデル C・D の場合は、星が収縮する時期に電離光子放出率が $S_{\text{min},-1}$ を上回ることが見て取れる。したがってこの簡単な見積りでは、平均降着率が $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合でも、バースト降着の間の低降着率期が長いほど、より大きな KH 収縮が起き、フィードバックが効く可能性があると考えられる。実際にはガス粒子は、電離されても再結合するため、輻射フィードバックが効くためには、ガス粒子1個辺り複数の電離光子が当たる必要がある。そのため、より正確な取り扱いをすれば、低降着率期が長いモデル C・D の場合でも、輻射フィードバックは効かないかもしれない。これらを考慮して、輻射フィードバックが効く低降着率期の臨界値は $\sim 10^3 \text{ yr}$ と考えられる。

平均降着率が $0.02 - 0.03 M_{\odot}/\text{yr}$ のバーストモデルについても同様の議論ができて、この場合フィードバックが効き始める電離光子放出率の下限は $S_{\text{min}} = (6 - 9) \times 10^{47} \text{ sec}^{-1}$ である。図 4.9 の電離光子放出率の図に $7 \times 10^{47} \text{ sec}^{-1}$ に対応する線を引いた。この図を見ると、両モデルとも電離光子放出率がこの線を上回る時期があるため、フィードバックが星の進化の過程で効く可能性がある。しかしガス粒子の再結合を考慮すれば、これらのモデルでもフィードバックは効かないと言えるかもしれない。

フィードバックが起きて、周辺ガスが電離され HII 領域が形成され、その領域からのガス降着が抑制された場合 (e.g. McKee & Tan 2008) でも、バースト降着を考えている場合はその後星の質量が増える可能性がある。星周円盤が周囲のガス降着で重くなっており、重力不安定である状況で、星が収縮して HII 領域が星周円盤と垂直方向に形成されたとしよう。この状況では円盤への降着が抑制され、円盤の不安定性が保たれない可能性があるが、それでも円盤が重力不安定だった時にできた分裂片が残っていると考えられる。これは、少なくとも通常の初代星形成の場合は、円盤が重力不安定であると、常にいくつ

かの分裂片が存在していることから予想される (Vorobyov et al. 2013)。その分裂片は円盤の中にあるため、HII 領域にあまり影響されないとしよう。この円盤で出来ていた分裂片が中心星へ落ち込み、次のバースト降着が起きて電離光子放出率が抑えられると、直ちに HII 領域が消える。HII 領域が消えて、十分な時間があれば、星周辺から掃き出されたガスが星の周囲に再び戻って来て、中心星と円盤への降着率が再び大きくなるかもしれない。これによって、円盤が再び不安定になり、分裂片ができるようになれば、星が再び収縮して HII 領域が形成されても、同様の過程を繰り返し、星は大質量になるまで進化すると思われる。

5.2 Atomic-cooling halo における降着史

通常の初代星形成の場合、平均降着率が $\lesssim 10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ である。平均降着率は円盤への降着率と考えることができる。ここで円盤の不安定性によって、星へ分裂片が落ち込むと、降着率が $\lesssim 10^{-5} - 10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ から $\lesssim 10^{-2} - 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ にまで達する (Vorobyov et al. 2013)。

Atomic-cooling halo 中の星形成でも円盤の不安定性によって分裂片ができるため (Regan et al. 2014、Inayoshi & Haiman 2014)、バースト降着が起きると予想されるが、その際どのような降着率が達成されるであろうか。まず、(1.5) より、ビリアル温度が $\gtrsim 10^4$ K の atomic-cooling halo 中では、 $\gtrsim 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の平均降着率が達成されると思われる。次に低降着率期について考えよう。以下では、星の進化の過程で降着率が $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ 程度まで下がることがあると仮定しよう。これは通常の初代星形成の場合では、円盤の不安定性が起きている場合、降着率が平均降着率の 2 桁以上低くなる時期がある (Vorobyov et al. 2013) ことから予想される。この場合、星は進化の過程で大きく収縮する可能性がある。この低降着率期が典型的にどの程度続くかは、Inayoshi & Haiman (2014) の議論から見積もれる。円盤への降着率が $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ で、星の質量が $M_* < 10^4 M_{\odot}$ の時期を考える。 R を中心星からの半径とする。この論文によると、この時期では分裂片が効率的になる円盤の半径 R_f が、円盤の質量と中心星の質量が等しくなる半径 R_{g*} よりも大きい。 R_f は、円盤で $R < R_f$ においては分裂が起きる可能性がある、という意味を持つ量である。この場合、分裂片が中心星へ落ち込む時間スケールは、

$$t_{\text{mig}} \simeq 4 \times 10^3 \text{ yr} \frac{1}{Q^2 \alpha} \frac{R}{R_f} \quad (5.1)$$

となる。ここで $Q = c_s \Omega / \pi G \Sigma$ はトゥームレ (Toomre) パラメータで、 α は粘性パラメータである。 Ω は軌道周波数、 Σ は円盤の面密度である。Inayoshi & Haiman (2014) では $Q = 1$ としているので、ここでもこの値を採用する。またこの論文では円盤の分裂が効率的になる時を α の値が臨界値 $\alpha = 1$ を超えた時としており、ここでもこの臨界値を使う。円盤が不安定で分裂する可能性のある $R < R_f$ においては $\alpha \gtrsim 1$ であるので

$$t_{\text{mig}} \gtrsim 4 \times 10^3 \text{ yr} \frac{R}{R_f} \quad (R < R_f) \quad (5.2)$$

となる。すなわち分裂片が中心星へ落ち込む時間スケールは、 $4 \times 10^3 \text{ yr}$ を超えない程度であると考えられる。ここで見積もった $4 \times 10^3 \text{ yr}$ は、分裂片が $R = R_f$ でできた場合

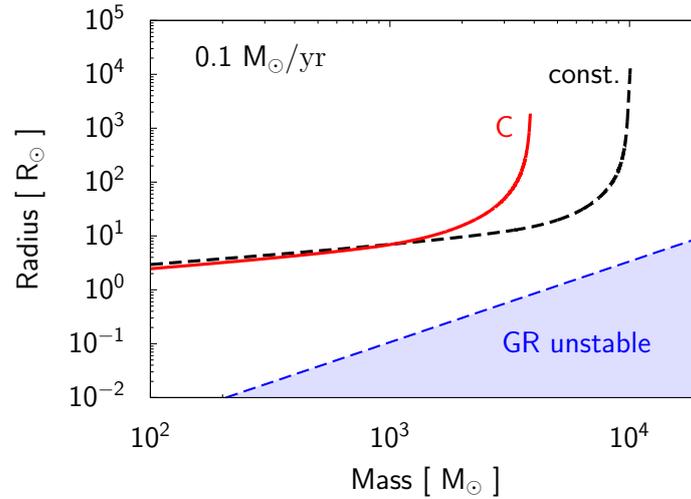


図 5.1: 星の内部構造から星が重力崩壊を起こすかどうか判断する図。赤線がバースト降着モデル C の場合、黒線が一定降着率 $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$ のモデルの場合の星の内部構造に対応する。それぞれ計算が止まった時の内部プロファイルを示している。青い領域が一般相対論的重力崩壊を起こす領域 (2.345)。

のおおよその上限値であることに注意。分裂片が R_f より内側で出来たとすると、この時間はもっと短くなる。さらに、分裂片は円盤中に常に存在し、その数は 1 つでないとする、低降着率期の時間は $4 \times 10^3 \text{ yr}$ よりかなり小さくなると考えられる。最後に、高降着率期について考えよう。平均降着率が $\gtrsim 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ なので、バースト降着時の降着率は $> 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ である。通常の初代星の場合、分裂片の大きさが典型的に $\sim 0.03 M_{\odot}$ のものが $\lesssim 100 \text{ yr}$ の時間で降着する (Vorobyov et al. 2013)。このことから、より大きな分裂片 $\gtrsim 10 M_{\odot}$ (Regan et al. 2014、Inayoshi & Haiman 2014) ができる atomic-cooling halo 中では、より長い時間高降着率期が続くと考えられる。

もし atomic-cooling halo 中の星形成過程で、円盤の不安定化が起き、低降着率期が 10^3 yr を大きく超えず、高降着率期が 10 yr より十分長ければ、4.2.1 節の結果と 5.1 節の議論から、星からのフィードバックは大きく効かず、星は大質量まで成長できると考えられる。

5.3 星の進化の過程で重力崩壊を起こす可能性

図 5.1 に、計算が止まった時の星の内部構造を示した。ここではモデル C の場合と、一定降着率 $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$ の場合について示した。この図から見て取れるように、どちらの場合も星は重力崩壊を起こすほど圧縮していないことが分かる。2.5.2 節でも考えたように、超大質量星は $M_* \gtrsim 10^5 M_{\odot}$ で重力崩壊を起こすと考えられる。

第6章 結論

SMBH の種となりうる超大質量星が、降着段階における進化の過程で、星からの輻射フィードバックにより周辺ガス降着が抑制されて成長が妨げられてしまうかどうか、明らかになっていない。一定降着率の場合のもとでの超大質量星形成については、既に研究がなされている (Hosokawa et al. 2012, 2013)。しかし近年の流体シミュレーション研究で、ビリアル温度が $\gtrsim 10^4$ K、平均降着率が $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$ の atomic-cooling halo 中でも円盤の分裂が起きることが分かった (Regan et al. 2014)。このことを踏まえて、本研究では、通常の初代星形成で起きるとされているバースト降着 (Vorobyov et al. 2013) が atomic-cooling halo 中での超大質量星形成でも起きると考え、バースト降着のもとでの星の進化を計算した。本論文では、一定降着率の場合も含めて、計算結果をまとめた。

計算では、Yorke & Bodenheimer (2008) で開発、Hosokawa et al. (2013) で改良された数値計算コードを用いた。バースト降着は、高降着率・低降着率とそれぞれの継続期間と、両期間の間の遷移時間をパラメータとしてモデル化した。遷移時間での降着率は、冪関数により補間した。平均降着率が約 $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$ のモデル4つと、それ以外のモデル2つについて、論文では6つのバーストモデルについて考えた。

通常の初代星の進化に対応する、 $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ の一定降着率のもとでは、星は断熱進化、KH 収縮、ZAMS の過程を経て進化する。電離光子放出率は、KH 収縮が始まるまでは $\sim 10^{37} \text{ sec}^{-1}$ 程度の低い値を保ち、収縮が始まると、急激に $\gtrsim 10^{49} \text{ sec}^{-1}$ まで大きくなる。Atomic-cooling halo 中での星の進化に対応する、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の一定降着率のもとでは、星はまず断熱的に進化し、次に単調膨張する。単調膨張期では、星の内部で収縮が起きていて、その収縮によって放出される重力エネルギーが外に伝わっていき、星の表面でそのエネルギーが吸収される。これは、星の表面に H^- が大量に存在する層があり、光学的に厚くなっているためである。星の表面では降着時間よりも熱緩和時間が長いので、吸収されたエネルギーはエントロピーとして蓄積される。これにより星表面のエントロピーは増加していき、星は膨張する。電離光子放出率は $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ の場合の進化と異なり、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の降着率の場合にフィードバックが効き始める下限値である $S_{\text{min},-1} = 3 \times 10^{48} \text{ sec}^{-1}$ より低い値を保ち続ける。そのため、 $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の一定降着率の場合では、超大質量星形成過程で輻射フィードバックが効かないと考えられる。一定降着率 $2 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ のもとでは、星は断熱進化の後に膨張と収縮を繰り返す段階に入る。この場合、輻射フィードバックが効くかどうかは振動の様子に依存し、降着率が臨界値 $4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ に近いほどフィードバックは効きにくくなると考えられる。

バースト降着が起きる $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ の平均降着率のもとでは、星表面の熱緩和時間が低降着率期の時間よりも長くなるまでは、降着率が $10^{-3} M_{\odot}/\text{yr}$ まで下がった後に星は収縮する。星表面の熱緩和時間が低降着率期の時間よりも長くなると、星表面からエントロピーが逃げなくなるため、星は収縮しなくなり、進化は一定降着率の場合と同じになる。

低降着率期の時間が短いほど、星表面の熱緩和時間が低降着率期の時間より長くなる時刻が早くなるため、星が収縮しなくなる時刻と星質量は小さくなる。さらに星の収縮回数も少なく、各収縮の大きさも小さい。星が収縮する時期は、星の有効温度が上がるために電離光子放出率が上昇するのだが、収縮が大きいほど放出率も大きくなる。低降着率期が $1,080 \text{ yr}$ より長いモデルでは、星の収縮時の電離光子放出率は $S_{\text{min},-1} = 3 \times 10^{48} \text{ sec}^{-1}$ を超える。そのため低降着率期の時間が長いほど、星の収縮時に輻射フィードバックが効く可能性が高くなる。

平均降着率が $0.02\text{--}0.03 M_{\odot}/\text{yr}$ のバースト降着モデルでは、臨界降着率 $\sim 4 \times 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$ よりも降着率が低いにも関わらず、星の半径は断熱進化後に振動しない。星の半径と電離光子放出率の進化は平均降着率が $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ のモデルのそれらと近くなる。計算した 2 つのモデルでは、電離光子放出率は星の進化の過程でフィードバックが効き始める下限値 $\sim 7 \times 10^{47} \text{ sec}^{-1}$ を上回るため、どちらのモデルでもフィードバックが効く可能性がある。

低降着率期がどの程度長くなればフィードバックが効くかは明らかではないが、本論文では、低降着率期が $\sim 10^3 \text{ yr}$ 以上で輻射フィードバックが重要になると結論づけた。Atomic-cooling halo 中でどのような降着率を実現されるかは定かではない。本研究ではバースト降着を、低降着率と高降着率とそれぞれの継続期間が時間とともに変化しないとしたが、より現実的にはそれらは変化する。これを明らかにするには、多次元流体シミュレーションをする必要がある。その際に星がどのように進化するかは、今後の研究で明らかにすべきことである。

第7章 今後の研究

ここでは本研究で更に追究していくべきことを述べる。多次元シミュレーションはこれらの追究の後に行っていく予定である。

7.1 基礎方程式の定式化の変更

7.1.1 慣性項の導入

これまでの研究では、運動量保存の式 (3.2) で静水圧平衡を仮定して慣性項 (加速項) を無視していた。しかしながら星が収縮した状態でバースト降着が起きる場合には、この仮定が成り立つことは自明ではない。そこで今後の研究では静水圧平衡の仮定を外して本研究の計算を繰り返す。その際、基礎方程式は運動量保存の式とエネルギー輸送の式が (2.21) と (2.109) に変更される。

7.1.2 状態方程式の変更

大質量星の星の進化の計算を行う際には、エネルギー保存の式 (3.3) で時間微分項を1つにまとめて、(2.32) のようにエントロピーの時間微分にすると計算が安定になることが知られている。このように方程式を書き換えるためには、比エントロピーを密度と温度の関数 $s(\rho, T)$ として求める必要がある。これは Pols et al. (1995) に書かれている手順に従って計算する。

付録A 活動銀河核の観測と超巨大ブラックホールの質量推定

活動銀河核中に存在する SMBH の質量の測定をすることは、SMBH 研究を含む多くの研究を行う上で重要である。この章では、活動銀河核の構造について述べた後、SMBH 質量が活動銀河核の観測によってどのように決定されるかについて述べる。活動銀河核の構造については、『活動する宇宙—天体活動現象の物理—』（1999）を参考にした。

A.1 活動銀河核の構造

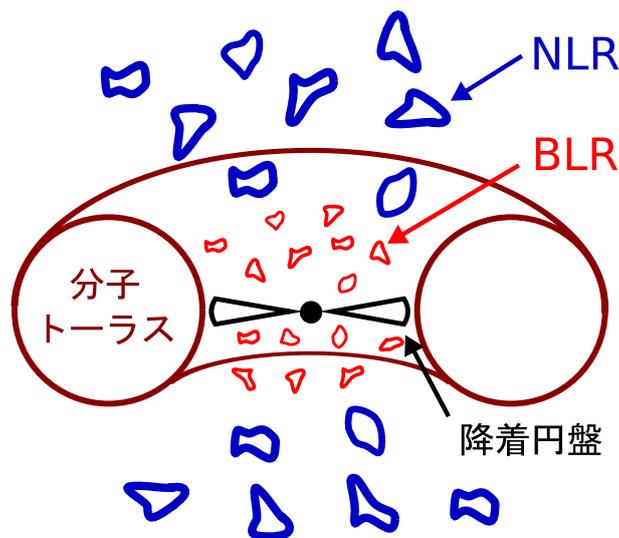


図 A.1: 標準的に考えられている活動銀河核の構造。中心には SMBH があり、周囲に降着円盤を形成している。そこから $10^{-4} - 1$ pc の距離には、BLR という広い輝線を放出する領域が存在する。BLR の外側、 $1 - 100$ pc には、光学的に厚い分子トラスがある。降着円盤の極方向には、円錐状に NLR という幅の狭い輝線を放出する領域が広がっている。

活動銀河核の構造は、観測器の分解能が有限であるため小さい中心領域を分解できず、明らかになっていない。しかし、スペクトル観測によって、現在ではその構造は図 A.1 のようになっていると考えられている。活動銀河核の周辺領域には、多数のガスの塊が存在していると考えられている。その中でも BLR (Broad Line Region) という、降着円盤からの紫外連続光を吸収して幅の広い輝線を放出する領域は、SMBH からの距離が $10^{-4} - 1$ pc

であり、SMBHの重力が大きく効く。そのため、BLRを構成するガス雲は、SMBHからの重力を感じて、その周囲を回転していると考えられている。

A.2 質量推定の手法

BLRからの輝線の中でも、水素原子で量子数 $n = 4$ の軌道から $n = 2$ の軌道に電子が遷移する時に放出される、波長486 nmの $H\beta$ 輝線や、 $n = 2$ から $n = 1$ の電子遷移に対応する波長280 nmのMg II輝線、 $n = 4$ から $n = 1$ の電子遷移に対応する波長155 nmのC IV輝線は、SMBHの質量推定を行う際によく利用される (Marziani & Sulentic 2012)。ここではこのような輝線を利用したSMBH質量推定の手法について述べる。

A.2.1 光反響マッピングによる質量推定

活動銀河核中のSMBHの質量推定方法として有名なものに、光反響マッピング (reverberation mapping) という手法がある。これはSMBH周囲のBLRガス雲がビリアル運動していると仮定して、ブラックホール質量を

$$M_{\text{BH}} = f \frac{r_{\text{BLR}} \delta v_r^2}{G} \quad (\text{A.1})$$

とし、 M_{BH} を推定するという手法である (Marziani & Sulentic 2012)。ここで、 G は重力定数である。

BLRガス雲の視線方向運動速度の分散 δv_r は、ローレンツ関数やガウス関数によってスペクトルの輝線をフィッティングし、その半値幅から求められる。

BLRのSMBHからの距離 r_{BLR} は、活動銀河核中心から放出されるスペクトルの連続光が変動することを利用して求められる。この連続光には、観測者の方向に直接伝播するものと、BLRを横断してBLRガス雲に吸収されるものがある。BLRガス雲に吸収された連続光は、輝線としてあらゆる方向に放射し、その中でも観測者の方向に向かうものは観測される。この連続光の変動とBLR輝線の応答を見ると、連続光が観測者に届いてから輝線が届くまでの遅延時間 τ を求めることができる。大雑把にはこの遅延時間から、 $r_{\text{BLR}} = c\tau$ と求められる。

また f は、スペクトルから得られる速度分散についての情報が視線方向についての速度分散のみであることを考慮した因子、すなわちBLRの幾何に依存する因子である。もし複数のBLRガス雲の運動に相関がなく、速度分布が等方的であれば、BLRガス雲の速度分散は $(\delta v)^2 = 3(\delta v_r)^2$ となり、 $f = \sqrt{3}/2$ となる。実際には速度分布は等方的でなく、 f の値は $\sqrt{3}/2$ からずれると考えられている (Graham et al. 2011)。

A.2.2 BLR半径と光度の相関を利用した質量推定

光反響マッピングによるSMBH質量推定は、 r_{BLR} を求めるために一つの天体を長く観測し続けなければならない、多くのSMBHの質量を推定するには向いていない。より多

くの SMBH の質量を推定するために、光度から 2 次的に r_{BLR} をより短時間の観測で知る手法として、経験的に知られている r_{BLR} と光度の関係を利用するものがある。この関係は、通常は

$$r_{\text{BLR}} \propto (\lambda L_{\lambda})^{\alpha} \quad (\text{A.2})$$

と仮定し、光反響マッピングを行った活動銀河核に対してフィッティングを行うことにより得られる（例えば、Bentz et al. 2009）。

付録B 熱力学関係の導出

この章では本論文で用いられる熱力学関係を導出する。まず熱 dq を温度 T と圧力 P で表し、断熱温度勾配 ∇_{ad} の表式を導出する。次に特別な場合に比エントロピー s の表式を導出する。

まずは後で使っていく量を定義する。熱力学第一法則は (2.28) で与えられている。ここでは状態方程式としてやや一般的な $\rho = \rho(P, T)$ 、 $u = u(\rho, T)$ を考える。ここでは化学組成は固定されていると考える。微分

$$\alpha \equiv \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T = -\frac{P}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \quad (\text{B.1})$$

$$\delta \equiv - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P = \frac{T}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \quad (\text{B.2})$$

を定義すると、状態方程式は微分形で

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T} \quad (\text{B.3})$$

となる。また、

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (\text{B.4})$$

である。比熱は

$$c_P \equiv \left(\frac{dq}{dT} \right)_P = \left(\frac{du}{dT} \right)_P + P \left(\frac{dv}{dT} \right)_P \quad (\text{B.5})$$

$$c_v = \left(\frac{dq}{dT} \right)_v = \left(\frac{du}{dT} \right)_v \quad (\text{B.6})$$

と定義される。

熱 dq は、熱力学第一法則から、(B.4) を使うと、

$$dq = du + Pdv = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + P \right] dv \quad (\text{B.7})$$

となる。右辺の $(\partial u / \partial T)_v$ は c_v である。右辺の $(\partial u / \partial v)_T$ の表式を得るために、 $ds = dq/T$ が完全微分で、 $\partial^2 s / \partial T \partial v = \partial^2 s / \partial v \partial T$ であることを使うと、(B.7) から

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + \frac{P}{T} \right] = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v} \quad (\text{B.8})$$

を得る。これを整理すると

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P \quad (\text{B.9})$$

となる。さらに $(\partial P/\partial T)_v$ は

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP \quad (\text{B.10})$$

を v を固定して T で微分して、(B.1) と (B.2) を用いて

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = -\frac{(\partial v/\partial T)_P}{(\partial v/\partial P)_T} \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{P\delta}{T\alpha} \quad (\text{B.12})$$

と表せる。(B.7) に (B.3)、(B.6)、(B.9)、(B.12) を使って整理すると、 dq を T と P で表せて

$$dq = \left(c_v + \frac{P\delta^2}{\rho\alpha T}\right) dT - \frac{\delta}{\rho} dP \quad (\text{B.13})$$

となる。

さらに (B.13) で dT の係数を c_P で書き直すために、 c_P と c_v の関係を導く。まず (B.5) と (B.6) から

$$c_P - c_v = P \left(\frac{dv}{dT}\right)_P + \left(\frac{du}{dT}\right)_P - \left(\frac{du}{dT}\right)_v \quad (\text{B.14})$$

である。右辺第2項と第3項の関係は、(B.4) を P を固定して T で微分することで得られ、さらに (B.9) を使うと

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \quad (\text{B.15})$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P \right] \quad (\text{B.16})$$

を得る。(B.14) は、(B.2)、(B.12)、(B.16) を使って整理すると

$$c_P - c_v = \frac{P\delta^2}{\rho\alpha T} \quad (\text{B.17})$$

となる。これを (B.13) に使えば

$$dq = c_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP \quad (\text{B.18})$$

を得る。

断熱温度勾配は

$$\nabla_{\text{ad}} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_s \quad (\text{B.19})$$

と定義される。(B.18)で、 s を固定して P で微分することにより

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s = \frac{\delta}{c_P \rho} \quad (\text{B.20})$$

を得る。これにより

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{P\delta}{T\rho c_P} \quad (\text{B.21})$$

を得る。

比エントロピーは熱力学第一法則(B.7)を用いると、 $ds = dq/T$ から

$$ds = \frac{1}{T} \left(du - \frac{P}{\rho^2} d\rho \right) \quad (\text{B.22})$$

となる。理想気体

$$P = \frac{\rho \mathcal{R} T}{\mu} \quad (\text{B.23})$$

で内部自由度のない場合(\mathcal{R} は気体定数、 μ は平均分子量) 単位質量あたりのエネルギー密度が $u = 3P/2\rho = 3\mathcal{R}T/2\mu$ であることから((D.12)参照) (B.22)は

$$ds = \frac{3\mathcal{R}}{2\mu} \left(\frac{dT}{T} - \frac{2}{3} \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (\text{B.24})$$

となる。これを積分し、(B.23)を使って温度を圧力で書き換えると

$$s = \frac{3\mathcal{R}}{2\mu} \ln \left(\frac{P}{\rho^{5/3}} \right) + \text{const.} \quad (\text{B.25})$$

を得る。輻射の場合については、単位質量あたりのエネルギー密度が $u = aT^4/\rho$ で((2.56)参照) 圧力が $P = u/3$ であること((2.177)参照)を使って、(B.22)から

$$ds = \frac{4aT^2}{\rho} dT - \frac{4aT^3}{3\rho^2} d\rho = d \left(\frac{4aT^3}{3\rho} \right) \quad (\text{B.26})$$

となる。これを積分すれば

$$s = \frac{4aT^3}{3\rho} \quad (\text{B.27})$$

を得る(積分定数は0と置いた)。

(B.25)の定数は次のようにして求められる。まず単一の粒子について考える。マクスウェル・ボルツマン分布 $f(E) = \exp[(\mu_{\text{chem}} - E)/k_B T]$ で非相対論的粒子を考え、粒子の質量を m 、統計的重みを g とすると、粒子数密度は

$$n = \frac{g}{h^3} \int \exp \left(\frac{\mu_{\text{chem}} - E}{k_B T} \right) d^3 p = g \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_{\text{chem}}}{k_B T} \right) \quad (\text{B.28})$$

と求まる。ここで μ_{chem} は化学ポテンシャルである。圧力は((D.4)参照)理想気体の圧力 $P = nk_B T$ に一致し、エネルギー密度は $\rho u = 3nk_B T/2$ であることも分かる。単位質量あたりのギブスのエネルギーの関係式

$$u + \frac{P}{\rho} - Ts = \frac{\mu_{\text{chem}}}{m} \quad (\text{B.29})$$

を使うと、比エントロピーは

$$\frac{s}{k_B/m} = \frac{5}{2} + \ln \left[\frac{g}{n} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right] \quad (\text{B.30})$$

と求まる。

次に混合粒子について考える。簡単のために純粋な水素プラズマ（陽子と電子が 1:1 で存在）を考える。この場合 $\mu = 1/2$ で、統計的重み g は陽子と電子どちらに対しても 2 である。(B.25) を

$$\frac{s}{k_B/\mu m_u} = \ln \left(\frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + \frac{s_0}{k_B/\mu m_u} \quad (\text{B.31})$$

の形に書き直すと、

$$\frac{s}{k_B/\mu m_u} = \frac{1}{2} \left(\frac{s_p}{k_B/m_p} + \frac{s_e}{k_B/m_e} \right)$$

から、(B.31) の定数 s_0 が

$$\frac{s_0}{k_B/\mu m_u} = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi k_B}{\hbar^2} \right) + \frac{3}{4} \ln m_e + \frac{7}{4} \ln m_p + \frac{5}{2} + \ln 2 = -10.5 \quad (\text{B.32})$$

となることが分かる。

付録C カルダノ法による(2.106)の解法

この付録では(2.106)の解法を説明する。まず(2.106)を展開して

$$\xi^3 - \frac{19}{9}U\xi^2 + 3U^2\xi - \frac{17}{9}U^3 - \frac{8}{9}UW = 0 \quad (\text{C.1})$$

となる。ここで

$$y = \xi - \frac{19U}{27} \quad (\text{C.2})$$

という変数変換をして

$$y^3 + 3U^2 \left\{ 1 - \left(\frac{19}{27} \right)^2 \right\} y + \left[\frac{19}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{19}{27} \right)^2 \right\} + \left(\frac{19}{27} \right)^3 - \frac{17}{9} \right] U^3 - \frac{8}{9}UW = 0 \quad (\text{C.3})$$

または係数をまとめた形

$$y^3 + py - q = 0 \quad (\text{C.4})$$

を得る。ここで正の値

$$p = \frac{368}{243}U^2 \quad (\text{C.5})$$

$$q = \frac{9344}{19683}U^3 + \frac{8}{9}UW \quad (\text{C.6})$$

を定義した。さらに

$$y = u + v \quad (\text{C.7})$$

と置くと、(C.4)は

$$u^3 + v^3 - q + (u + v)(p + 3uv) = 0 \quad (\text{C.8})$$

となる。ここで $q > 0$ なので、(C.4)より $y = u + v \neq 0$ であるので

$$u^3 + v^3 - q = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$p + 3uv = 0 \quad (\text{C.10})$$

となる。これを u について解くと

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} \quad (\text{C.11})$$

となる。平方根の符号として正をとれば、 v^3 は (C.11) で平方根の符号を負ととったものになる。(C.7) のように、 u と v は対称であるので、平方根の符号としてどちらをとっても y に影響しないことが分かる。これにより実数解は

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (\text{C.12})$$

となる。他の解は $p > 0$ の場合、(C.4) の左辺が単調増加関数であるので複素数となり、今の場合は考えなくて良い。これから、(C.2) と (2.105) を用いて

$$\nabla = \nabla_{\text{ad}} - U^2 + \left[\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \frac{19}{27}U \right]^2 \quad (\text{C.13})$$

を得る。

付録D 電子・イオン気体の数密度・圧力・内部エネルギー

D.1 縮退電子気体

星の内部において密度が高い場合や温度が低い場合には、電子が縮退する。この時、電子は理想気体と見なすことは出来ない。ここでは電子が理想気体である場合でも縮退電子気体である場合でも使うことができる密度や圧力、内部エネルギーの表式を求める。

まず電子の縮退について説明する。電子はフェルミ粒子であるため、スピンの同じであればパウリの排他律により位相空間上で同じ位置を占めることが出来ない。ある位相空間上で位相体積 h^3 の中に入ることができる電子の数は、電子スピン自由度が2であることを考慮して、最大で2個である。

もし温度がゼロであれば、電子は位相空間上で低エネルギー側の状態にある運動量 p_F まで順に占めていく。運動量 p_F 以上の電子は存在しない。すなわち電子の分布関数を $f(p)$ とすると、位相空間上で運動量が $[p, p + dp]$ である、微小体積 dV を占める電子の個数は

$$\begin{cases} f(p)dpdV = \frac{8\pi p^2}{h^3}dpdV & (p < p_F) \\ f(p)dpdV = 0 & (p > p_F) \end{cases} \quad (D.1)$$

である。運動量 p_F はフェルミ運動量と呼ばれる。

有限温度においては、電子がフェルミ・ディラック分布関数に従うとして、この量は

$$f(p)dpdV = \frac{8\pi p^2 dpdV}{h^3} \frac{1}{1 + e^{E/k_B T - \psi}} \quad (D.2)$$

のように修正される。ゼロ温度との違いは、2つ目の因子の有無である。この因子は1以下の量であり、有限温度においては同じ dp 、 dV でも電子の個数が減ることを表している。縮退パラメータ ψ は後で分かるように電子の縮退度を表す量で、 ψ が正の大きな値であるほど縮退度が大きく、逆に負の大きな値であるほど縮退度が小さいことを表す。

分布関数 $f(p)$ を用いて、電子の数密度 n_e は

$$n_e = \int_0^\infty f(p)dp \quad (D.3)$$

と表すことができる。電子の圧力を $f(p)$ を用いて表すためには、電子が表面要素 $d\sigma$ に衝突して与える単位時間あたりの運動量を考える必要がある(図 D.1)。ベクトル s の方向に向かう、運動量が p から $p + dp$ の間にある電子の単位体積あたりの個数は、 s まわりの立体角を $d\Omega_s$ として $f(p)dpd\Omega_s/4\pi$ である。これから $d\sigma$ に衝突する電子の単位時間あ

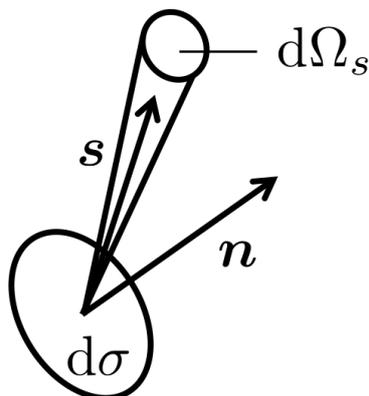


図 D.1: 圧力を求める時に考える表面要素 $d\sigma$ 。ベクトル n は $d\sigma$ に垂直な単位ベクトル、 s は任意の方向を向いている単位ベクトル、 $d\Omega_s$ は s を軸とする立体角。

たりの個数は、 $d\sigma$ の法線ベクトルを n とし、 $s \cdot n = \cos \theta$ として、電子の n 方向の速度 $v(p) \cos \theta$ を用いて $f(p) dp d\Omega_s v(p) \cos \theta d\sigma / 4\pi$ と書ける。このことから圧力は、 n 方向の運動量が $p \cos \theta$ であることから、電子が表面要素 $d\sigma$ に 1 回衝突することで与える運動量が $2p \cos \theta$ であるので

$$P_e = \int_{2\pi} \int_0^\infty f(p) v(p) 2p \cos^2 \theta dp \frac{d\Omega_s}{4\pi} = \int_0^\infty \frac{1}{3} p v(p) f(p) dp \quad (D.4)$$

となる。ここで立体角の積分は半球で行った。速度 v は (2.176) で与えられる。分布関数が運動量について球対称であるため、圧力の表式に角度依存性は現れず、圧力も等方的である。電子の内部エネルギーは

$$U_e = \int_0^\infty E f(p) dp \quad (D.5)$$

と表される。運動エネルギー E は (2.174) で与えられる。

これから、有限温度における n_e 、 P_e 、 U_e は

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{1 + e^{E/k_B T - \psi}} \quad (D.6)$$

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty \frac{p^3 v(p) dp}{1 + e^{E/k_B T - \psi}} \quad (D.7)$$

$$U_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{E p^2 dp}{1 + e^{E/k_B T - \psi}} \quad (D.8)$$

となる。電子の数密度 n_e は、密度 ρ と

$$\rho = m_u \mu_e n_e \quad (D.9)$$

の関係があるので、(2.172) が導かれる。

以下で極限的な場合に n_e 、 P_e 、 U_e がどうなるかを見てみよう。まずは非相対論的な極限を考え、 $v = p/m_e$ 、 $E = p^2/2m_e$ とする。この場合数密度は

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{1 + e^{p^2/2m_e k_B T - \psi}} = \frac{8\pi}{h^3} (2m_e k_B T)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\eta^2}{1 + e^{\eta^2 - \psi}} d\eta \quad (\text{D.10})$$

と書ける。同様にして圧力と内部エネルギーは

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} (2m_e k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{\eta^4 d\eta}{1 + e^{\eta^2 - \psi}} \quad (\text{D.11})$$

$$U_e = \frac{4\pi}{h^3 m_e} (2m_e k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{\eta^4 d\eta}{1 + e^{\eta^2 - \psi}} = \frac{3}{2} P_e \quad (\text{D.12})$$

となる。さらに $\psi \rightarrow -\infty$ という極限をとると

$$\int_0^\infty \frac{\eta^2}{1 + e^{\eta^2 - \psi}} d\eta = \int_0^\infty \eta^2 e^{\psi - \eta^2} d\eta = e^\psi \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (\text{D.13})$$

であり、同様に

$$\int_0^\infty \frac{\eta^4}{1 + e^{\eta^2 - \psi}} d\eta = e^\psi \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \quad (\text{D.14})$$

であるので

$$n_e = \frac{2(2m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^\psi \quad (\text{D.15})$$

$$P_e = \frac{2k_B T}{h^3} (2m_e k_B T)^{3/2} e^\psi = n_e k_B T = \frac{\rho k_B T}{\mu_e m_u} \quad (\text{D.16})$$

を得る。(D.16) は理想気体の状態方程式であることが分かる。すなわち、 $\psi \rightarrow -\infty$ は電子が縮退していない場合に対応する。逆に $\psi \rightarrow \infty$ とすると、 $\psi = E_0/k_B T$ となるエネルギー E_0 を導入して

$$\frac{1}{1 + e^{E/k_B T - \psi}} = \frac{1}{1 + e^{\psi(E/E_0 - 1)}} = \begin{cases} 1 & (E < E_0) \\ 0 & (E > E_0) \end{cases} \quad (\text{D.17})$$

となる。この式は (D.1) の式に対応し、 $E_0 = p_F^2/2m_e$ はフェルミエネルギーである。これから

$$n_e = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3} \quad (\text{D.18})$$

$$P_e = \frac{8\pi p_F^5}{15h^3 m_e} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \quad (\text{D.19})$$

を得る。(D.19) は非相対論的極限における縮退電子気体の状態方程式である。すなわち、 $\psi \rightarrow \infty$ は電子が縮退している場合に対応する。

超相対論的極限の場合には、 $v = c$ 、 $E = pc$ であるので

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3 c^3} (k_B T)^3 \int_0^\infty \frac{\eta^2 d\eta}{1 + e^{\eta - \psi}} \quad (\text{D.20})$$

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3 c^3} (k_B T)^4 \int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{1 + e^{\eta - \psi}} \quad (\text{D.21})$$

$$U_e = 3P_e \quad (\text{D.22})$$

となる。さらに $\psi \rightarrow -\infty$ という極限をとると、積分を適切に計算して

$$n_e = \frac{16\pi}{h^3 c^3} (k_B T)^3 e^\psi \quad (\text{D.23})$$

$$P_e = \frac{16\pi}{h^3 c^3} (k_B T)^4 e^\psi = n_e k_B T = \frac{\rho k_B T}{\mu_e m_u} \quad (\text{D.24})$$

を得る。超相対論的極限の場合でも、 $\psi \rightarrow -\infty$ は電子が縮退していない場合に対応し、状態方程式は理想気体の場合に一致することが分かる。逆の極限 $\psi \rightarrow \infty$ の場合は非相対論的極限の場合と同様に積分は (D.17) のように評価できる。ただしこの場合フェルミエネルギーは $E_0 = p_{FC}$ となる。これにより n_e は (D.18) で与えられ、 P_e は

$$P_e = \frac{8\pi c p_F^4}{3h^3 4} = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{4/3} n_e^{4/3} = \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{4/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3} \quad (\text{D.25})$$

となる。これは超相対論的極限における縮退電子気体の状態方程式であり、この場合も $\psi \rightarrow \infty$ は電子が縮退している場合に対応することが分かる。

D.2 イオン気体

イオンが電子と同じフェルミ粒子でスピンの状態が2つである場合（陽子など）、電子の場合の数密度・圧力・内部エネルギーの表式は、 m_e をイオンの質量 m_{ion} に変更することでイオンの場合にも適用できる。

通常の星ではイオンの縮退は考えなくてよい。このことを説明するために、まず非相対論的極限における数密度 (D.10) を

$$\frac{n_i}{T^{3/2}} = \text{const.} \times m_i^{3/2} a(\psi) \quad (\text{D.26})$$

$$a(\psi) = \int_0^\infty \frac{\eta^2}{1 + e^{\eta^2 - \psi}} d\eta \quad (\text{D.27})$$

と書く。添字の i は、電子又はイオンのどちらかを表す。電子の数密度と縮退パラメータが固定されていると考え、イオンが電子と同じ温度を持つとすると、 ψ が両者で同じになるためには、イオンの数密度は $n_{\text{ion}} = (m_{\text{ion}}/m_e)^{3/2} n_e \simeq 8 \times 10^4 n_e$ となる必要がある。ここでの数値はイオンとして水素を考えた場合である。すなわちイオンが電子と同程度縮退

するためには、イオンは電子よりも数密度がずっと大きくなければならない。しかし電荷の中性条件を考えると、イオンの数密度は電子の数密度と比べて大きくなることはなく、実際にはイオンの縮退パラメータは電子のそれと比較して常に小さい。そのため通常の星を考える場合、イオンの縮退は無視される。(2.171)のイオンの圧力で、イオンの縮退を考えていないのはこのためである。電子が縮退している時の全圧は $P = P_{\text{ion}} + P_e \simeq P_e$ となる。

付録E 電離光子放出率の計算方法

電離光子放出率は、星の表面全体から単位時間に放出される 13.6 eV 以上のエネルギーを持った光子の数である。以下ではこの量を計算する。星の表面から外側に向かう光子は黒体輻射 (2.47) で近似できるので、電離光子放出率を S_{EUV} とすると

$$S_{\text{EUV}} = 4\pi R_*^2 \int_{\nu_{\text{UV}}}^{\infty} \frac{\pi}{h\nu} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (\text{E.1})$$

となる。ここで $h\nu_{\text{UV}} = 13.6 \text{ eV}$ である。また、星の表面に入射する光子は無視できるとした ((2.137) 参照)。ここで $x = h\nu/k_B T$ と変数変換し、 $y = 13.6 \text{ eV}/k_B T$ とすると (E.1) は

$$S_{\text{EUV}} = \frac{8\pi^2 R_*^2}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^3 \int_y^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx \quad (\text{E.2})$$

となる。ここで現れた積分は多重対数関数

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}, \quad (|z| < 1) \quad (\text{E.3})$$

を使って書き換えて、最終的に (E.2) は

$$S_{\text{EUV}} = \frac{8\pi^2 R_*^2}{c^2} \left(\frac{13.6 \text{ eV}}{yh} \right)^3 [y^2 \text{Li}_1(e^{-y}) + 2y \text{Li}_2(e^{-y}) + 2 \text{Li}_3(e^{-y})] \quad (\text{E.4})$$

となる。

付録F KH収縮に対するフィッティング関数の導出

ここでは、(4.6)の導出を行う。星の半径がKH時間程度で変化するとすると、

$$\frac{dR_*}{dt} \sim -\frac{R_*}{t_{\text{KH}}} = -\frac{L_* R_*^2}{GM_*^2} \quad (\text{F.1})$$

と見積もることが出来る。ここで、星の光度がエディントン光度 $\propto M_*$ でよく近似できることを使うと、

$$\frac{dR_*}{dt} = -\text{const.} \times \frac{R_*^2}{M_*} \quad (\text{F.2})$$

となる。低降着率期では質量を一定とみなし、これを積分すると、(4.6)を得る。

参考文献

- Abel T., Bryan G. L., Norman M. L., 2002, *Science*, 295, 93
- Bentz M. C., Peterson B. M., Netzer H., Pogge R. W., Vestergaard M., 2009, *ApJ*, 697, 160
- Bodenheimer P., Laughlin G. P., Różyczka M., Yorke H. W., eds, 2007, *Numerical Methods in Astrophysics: An Introduction*
- Bromm V., Coppi P. S., Larson R. B., 2002, *ApJ*, 564, 23
- Bromm V., Loeb A., 2003, *ApJ*, 596, 34
- Graham A. W., Onken C. A., Athanassoula E., Combes F., 2011, *MNRAS*, 412, 2211
- Heger A., Woosley S. E., 2002, *ApJ*, 567, 532
- Hosokawa T., Omukai K., 2009, *ApJ*, 691, 823
- Hosokawa T., Omukai K., Yorke H. W., 2012, *ApJ*, 756, 93
- Hosokawa T., Yorke H. W., Inayoshi K., Omukai K., Yoshida N., 2013, *ApJ*, 778, 178
- Inayoshi K., Haiman Z., 2014, *MNRAS*, 445, 1549
- Jeon M., Pawlik A. H., Greif T. H., Glover S. C. O., Bromm V., Milosavljević M., Klessen R. S., 2012, *ApJ*, 754, 34
- Kippenhahn R., Weigert A., Weiss A., 2012, *Stellar Structure and Evolution*. Springer
- Latif M. A., Bovino S., Van Borm C., Grassi T., Schleicher D. R. G., Spaans M., 2014, *MNRAS*, 443, 1979
- Madau P., Haardt F., Dotti M., 2014, *ApJ*, 784, L38
- Madau P., Rees M. J., 2001, *ApJ*, 551, L27
- Marziani P., Sulentic J. W., 2012, *New A Rev.*, 56, 49
- McKee C. F., Tan J. C., 2008, *ApJ*, 681, 771

- Mortlock D. J., Warren S. J., Venemans B. P., Patel M., Hewett P. C., McMahon R. G., Simpson C., Theuns T., González-Solares E. A., Adamson A., Dye S., Hambly N. C., Hirst P., Irwin M. J., Kuiper E., Lawrence A., Röttgering H. J. A., 2011, *Nature*, 474, 616
- Omukai K., 2001, *ApJ*, 546, 635
- Omukai K., Palla F., 2003, *ApJ*, 589, 677
- Planck Collaboration Ade P. A. R., Aghanim N., Armitage-Caplan C., Arnaud M., Ashdown M., Atrio-Barandela F., Aumont J., Baccigalupi C., Banday A. J., et al. 2014, *A&A*, 571, A16
- Pols O. R., Tout C. A., Eggleton P. P., Han Z., 1995, *MNRAS*, 274, 964
- Regan J. A., Haehnelt M. G., 2009, *MNRAS*, 396, 343
- Regan J. A., Johansson P. H., Haehnelt M. G., 2014, *MNRAS*, 439, 1160
- Schneider R., Ferrara A., Natarajan P., Omukai K., 2002, *ApJ*, 571, 30
- Shang C., Bryan G. L., Haiman Z., 2010, *MNRAS*, 402, 1249
- Shapiro S. L., Teukolsky S. A., 1983, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. Wiley-VCH
- Vorobyov E. I., Basu S., 2006, *ApJ*, 650, 956
- Vorobyov E. I., DeSouza A. L., Basu S., 2013, *ApJ*, 768, 131
- Yorke H. W., Bodenheimer P., 2008, in Beuther H., Linz H., Henning T., eds, *Massive Star Formation: Observations Confront Theory* Vol. 387 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, *Theoretical Developments in Understanding Massive Star Formation*. p. 189
- Yoshida N., Omukai K., Hernquist L., Abel T., 2006, *ApJ*, 652, 6
- 柴田一成, 福江純, 松本亮治, 嶺重慎 1999, *活動する宇宙—天体活動現象の物理—*. 裳華房
- 野本憲一, 定金晃三, 佐藤勝彦 2009, *シリーズ現代の天文学 恒星*. 日本評論社