宇宙物理学　レポート問題

2019年5月10日締め切り 講義中に回収

以下の問題を適宜選択して解答せよ。総得点を20点を上限として、最終試験の結果に加点して成績評価に用いる。講義終了後、一日遅れるごとに10点ずつ減点する。

問題1 (各2点× 4=8点)

(1A) 重力定数G、光速度c、プランク定数$\hbar$の次元を、長さL、質量M、時間Tを用いて表せ。

(1B) 重力定数G、光速度c、プランク定数$\hbar$を組み合わせて、次元解析から、プランク質量($m_{\rm pl}$)、プランク長さ($\ell_{\rm pl}$)、プランク時間($t_{\rm pl}$)の表式を導け。

(1C) $G, c, \hbar$の値を代入して、$m_{\rm pl}$、$\ell_{\rm pl}$、$t_{\rm pl}$の具体的な数値を記せ。

(1D) g, erg, K, eVの単位間の換算式を求め、それらの数値を以下の換算表に書き入れよ。

	eV	K	erg	g
eV	—			
K		—		
erg			—	
g				—

問題2 (各2点× 8=16点)

現在の地平線球に対応する我々の宇宙がもつ自由度の数を計算したうえで、この地平線球と全く同じ性質を持つクローン宇宙までの平均距離を推定してみよう。あらかじめ断っておくと、以下の議論は決して正しいわけではない (正しい議論があるかどうかすらわからない)。

とりあえず、一つの考え方を紹介したうえで、よりもっともらしい推定を提案してもらうのが、この課題の目的である。ちなみに、量子論的効果は完全に無視する。

(2A) 半径138億光年に対応する現在の我々の宇宙の地平線球の質量 $M_{\rm H}$ とそのなかの核子数 $N_{\rm H}$ を推定せよ。

(2B) 半径138億光年の球内に、半径1fm $(=10^{-13}{\rm cm})$ の剛体球は最大何個まで詰め込むことができるか。その値 $N_{\rm H,max}$ と、それに対応する質量 $M_{\rm H,max}$ を求めよ。

(2C) とりあえず以下の3つの仮定を認めることにする。

- **(i)** この宇宙の性質は、水素原子の空間分布によって完全に決まる
- **(ii)** 水素原子はぎりぎり核子のサイズまで互いに接近できる
- **(iii)** 個々の水素原子はすべて同一で、内部自由度を持たない

この場合、半径138億光年の球を半径1fmのセルで埋め尽くし、そこに水素原子（あるいは核子）を置くか置かないかの2通りの可能性を考えれば、この地平線球のもつ自由度 $N_{\rm H,dof}$ が計算できるように思われる。このセルの個数は設問 (2B) の $N_{\rm H,max}$ で与えられるであろう。この $N_{\rm H,dof}$ の値を具体的に推定せよ。また、この自由度に対応する地平線球がすべて同じ確率で存在すると考えた場合、平均的にそれらをすべて含むために必要な領域のサイズを計算せよ。上述の仮定をすべて認めれば、このサイズは、我々の宇宙と全く同じクーロン宇宙までの平均距離 $D_{\rm C}$ を与えるものと解釈できる。

(2D) さて、以上で推定した数値の妥当性はともかく、展開した議論の本質は、世界の基本構成要素が有限の自由度しか持たない素粒子である限り、有限体積の領域が持ち得る多様性の自由度もまた有限である、という仮定の正当性にある。物質分布だけで世界の多様性を尽くしきれるのか、これまでは意図的に無視してきた量子論的効果がどのような影響を持つのか、さらに時間と空間は離散的でなく連続的なのか、などの、検討すべき問題点は山積している。それらを前提として、仮に我々の宇宙の外に広がる「全宇宙」の体積が無限大であるとした場合、そこに半径138億光年の球を選んで、我々の地平線球とどの程度まで同じ「クーロン」宇宙あるいは「並行」宇宙が存在しうるのか、自由に論ぜよ。

(2E) さらに大胆に全く同じ考察を人間に適用してみよう。まず人間の平均的体重や身長を用いて設問 (2C) と同じ考察を繰り返したとき、考えられる人間のパターンは何種類程度だと考えられるか。

(2F) 人間の本質はDNAで決まるので、それを用いて考えられる人間のパターンの数を考えてみよう。

(i) DNAは約30億個の塩基対だけからなる。それらに対して、AGTCが全くランダムに選ばれると仮定した場合

(ii) 実際にはそのなかで有意な情報を持つ塩基対は2%程度しかないとされている（残りの領域が全く無意味で、何であっても良いというわけではないにせよ）。その2%に対してAGTCが全くランダムに選ばれると仮定した場合

(iii) タンパク質をコードする遺伝子（3000程度の塩基対からなる領域）に対応するヒトゲノムの数は、たかだか22000程度であることがわかっている。一つのアミノ酸は塩基のトリプレットでコードされているので、一つのタンパク質は約1000個のアミノ酸の自由度をもつ。地球上の生物は20個のアミノ酸だけを使っていることがわかっている。以上の情報をもとに、20個のアミノ酸を全くランダムに1000個並べた組み合わせが、一つのタンパク質に対応すると仮定した場合

(iv) 実際のタンパク質の種類は10万程度であるらしい。ヒトゲノムが、このタンパク質をランダムに選んで22000個並べたものである場合

の4つの場合について、それぞれ考えられる人間のパターンの種類を推定せよ。

(2G) 設問(2A)から(2C)では、それぞれの宇宙の質量は0から$M_{\mathrm{H,max}}$までの範囲をとる。一方、我々の地平線球を越えたスケールまで宇宙が一様等方であるとすれば、その密度はいたるところで同じはずである。つまり、138億年の半径を持つ地平線球の質量もまた我々の地平線球の質量と同じ値M_{H}となるように選ぶほうが適切だと考えられる。この条件を課した場合、設問(2C)のD_{C}の値はどのように変更されるか。

(2H) 仮に、物質分布という観点から見て（DNAが同じというだけの意味ではなく）厳密に同じクローン人間が存在したとして、その人間とクローン人間の意識や記憶までもが厳密に同じであると考えるのは適当であろうか。これは、記憶や意識も、基本的には物質に還元できるかどうかという（正解のない）問題である。同様に、この世界には物理法則が存在すると物理学者は信じているが、それは一体どこにどのような形で存在していると考えるべきなのだろうか。これらについて考えたことを自由に述べよ。

問題 3 (各 2 点× 8=16 点)

宇宙が質量密度 ρ をもつ物質によって一様に満たされているものとし、その物質の運動が宇宙の力学進化を記述していると考える。時刻 t において、半径 $R(t)$ にある厚さの十分薄い仮想的な球殻を考える。

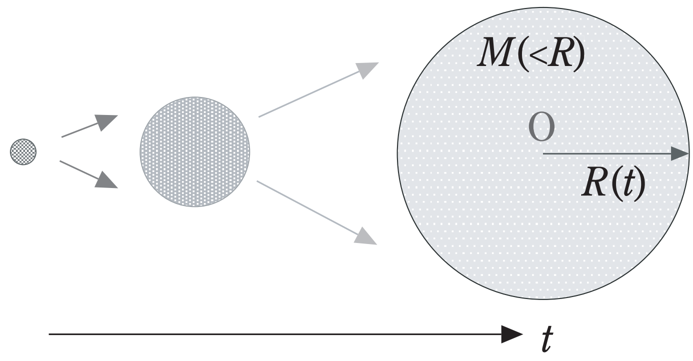

図 1: 一様球の球殻の運動と宇宙膨張。

(3A) ニュートン力学によれば球の外側の物質分布がこの球の中心に対して球対称な分布をしている限り、この球殻の運動は外側の物質分布には無関係である。この球殻の半径 $R(t)$ の満たす運動方程式を書け。ただし、この球殻内の全質量を $M(< R)$、ニュートンの万有引力定数を G とせよ。

(3B) $R(t)$ がどのように時間変化しても内側の物質が外へ逃げ出すようなことがない限り球殻の内側の全質量 $M(< R)$ は保存する。M が時間に依らない定数であることを考慮して、(3A) で得られた運動方程式のエネルギー積分を求めよ。保存される全エネルギーの値を $-K/2$ とせよ。

(3C) 上式に表れる $R(t)$ やそれに応じた M の絶対的な値自身には特別な意味はない。そこで、M の代りに宇宙の質量密度 $\rho(t)$ を用いて、(3B) で得られたエネルギー保存則を書き直すと

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + K = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)R^2(t) \tag{1}$$

となることを示せ。この式は、一様等方宇宙モデルに対しては一般相対論から導かれるものと厳密に一致する。

(3D) (1) 式が、ニュートン力学から導かれた宇宙膨張（あるいは収縮）の時間発展方程式ということになる。正確には、$R(t)$ は宇宙のスケール因子と呼ばれる量であり、(1) 式を解けば、宇宙の大きさの時間進化がわかる。以下では、もっとも簡単な $K = 0$ の場合:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)R^2(t) \tag{2}$$

に限って考察する。この式と $t = t_0$(現在) において成り立つハッブルの法則:

$$v(t_0) = \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0} = H_0 R(t_0) \tag{3}$$

を比べることで、現在の宇宙の質量密度 $\rho(t_0)$ とハッブル定数 H_0 の関係を求めよ。

(3E) 図 2 において、太線はハッブルの法則にしたがって宇宙膨張している系外銀河のスペクトル、細線は近傍にあり宇宙膨張が無視できる星のスペクトルを示す。

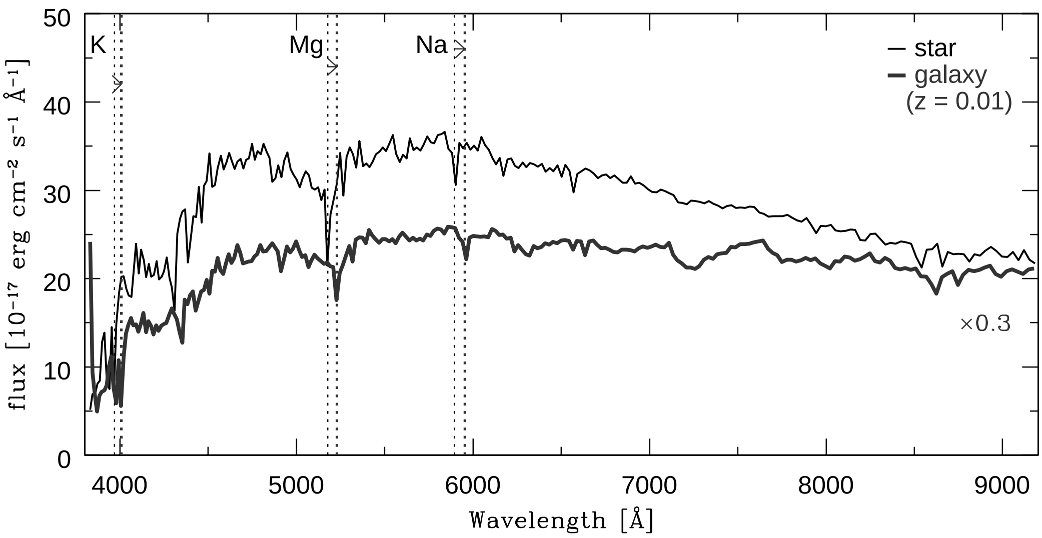

図 2: 系外銀河のスペクトルの例。

この波長のずれから銀河の後退速度 v を

$$\lambda_{銀河} = \lambda_{星}(1 + v/c) \tag{4}$$

として求めることができる。点線で示してある代表的な吸収線 (K, Mg, Na) の波長は

$$\begin{array}{rl} \text{カルシウム } K \text{ 線} & 3934\text{Å} \\ \text{カルシウム } H \text{ 線} & 3968\text{Å} \\ \text{マグネシウム} & 5183\text{Å} \\ \text{ナトリウム } D_1 \text{線} & 5890\text{Å} \\ \text{ナトリウム } D_2 \text{線} & 5896\text{Å} \end{array} \tag{5}$$

であることを用いて、この銀河の後退速度 v を推定せよ。

(3F) 図 3 は系外銀河の後退速度・距離関係の例である。このデータに対するハッブルの法則のベストフィットである実線の傾きから H_0 の値を求めよ。この値を (3D) の結果に代入して現在の宇宙の質量密度 $\rho(t_0)$ を推定してみよ。

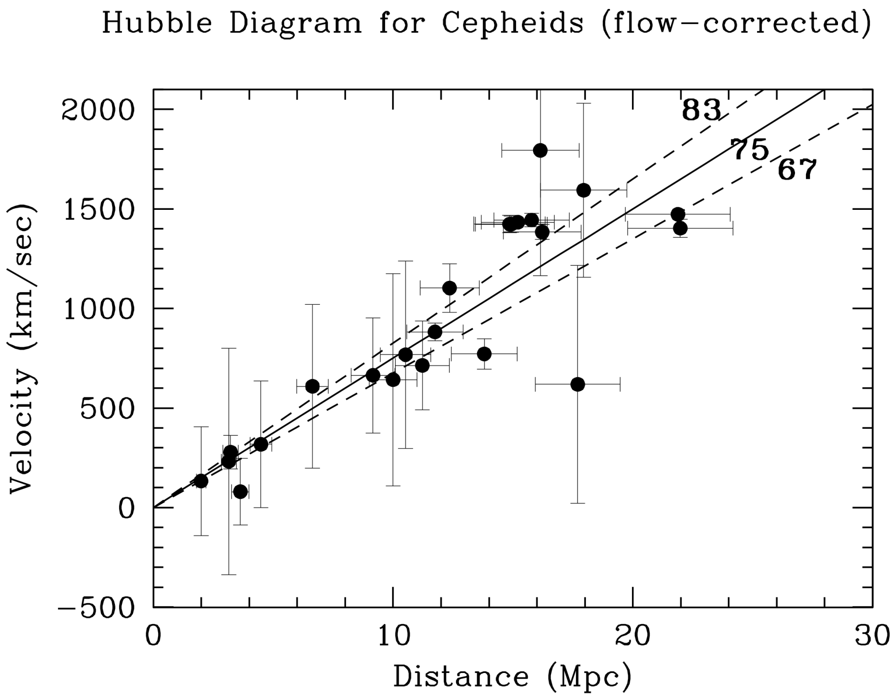

図 3: ハッブル宇宙望遠鏡が観測した系外銀河の後退速度・距離関係。

(3G) 再び (3B) に戻り $M(< R)$ が時間に依らないことに注意すれば、

$$\rho(t)R^3(t) = \rho(t_0)R^3(t_0) \tag{6}$$

が成り立つ。この式と (3D) の結果を組み合わせると $R(t)$ の満たす微分方程式が

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R(t_0)\sqrt{\frac{R(t_0)}{R(t)}} \tag{7}$$

となることを示せ。

(3H) (7) 式の解で初期条件 $R(t = 0) = 0$ となるものを求めよ。この解の場合、現在の宇宙の年齢 t_0 を H_0 を用いて書き、(3F) で推定した H_0 の値を代入してみよ。

問題 1 の解答例

(1A) 重力定数 G、光速度 c、プランク定数 $\hbar$ の次元は、長さ L、質量、長さ、時間をそれぞれ M、L、T と表すと

$$
\begin{aligned}
G &= L^3 M^{-1} T^{-2} &(8)\\
\hbar &= L^2 M T^{-1} &(9)\\
c &= L T^{-1} &(10)
\end{aligned}
$$

(1B) 講義で示したやり方がもっと単純なのであるが、機械的には次元から導くことができる。プランク質量 $m_{\rm pl}$ の場合を考えると

$$m_{\rm pl} = G^{\alpha}\,\hbar^{\beta}\,c^{\gamma} = L^{3\alpha+2\beta+\gamma}\,M^{-\alpha+\beta}\,T^{-2\alpha-\beta-\gamma} \tag{11}$$

から、

$$3\alpha+2\beta+\gamma=0, \quad -\alpha+\beta=1, \quad -2\alpha-\beta-\gamma=0 \tag{12}$$

を満たす α, β, γ の組を求めればよい。この場合、$\alpha=-1/2$, $\beta=\gamma=1/2$ が解となるので、プランク質量は

$$m_{\rm pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \tag{13}$$

となる。

同様にして、プランク長さ $\ell_{\rm pl}$ の場合は

$$3\alpha+2\beta+\gamma=1, \quad -\alpha+\beta=0, \quad -2\alpha-\beta-\gamma=0, \tag{14}$$

プランク時間 $t_{\rm pl}$ の場合は

$$3\alpha+2\beta+\gamma=0, \quad -\alpha+\beta=0, \quad -2\alpha-\beta-\gamma=1, \tag{15}$$

を満たす α, β, γ の組を求めればよい。その結果は

$$
\begin{aligned}
\ell_{\rm pl} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} &(16)\\
t_{\rm pl} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} &(17)
\end{aligned}
$$

となる。

(1C) $G = 6.67\times10^{-8}\mathrm{cm}^3\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$, $2\pi\hbar = 6.63\times10^{-27}\mathrm{erg\ s}$ ($\hbar = 1.05\times10^{-27}\mathrm{erg\ s}$), $c = 3.00\times10^{10}\mathrm{cm\ s}^{-1}$ を代入して以下を得る。

記号	名称	値	注
$m_{\rm pl}$	プランク質量	2.18×10^{-5}g	$\sqrt{\hbar c/G}$
$\ell_{\rm pl}$	プランク長さ	1.62×10^{-33}cm	$\sqrt{\hbar G/c^3}$
$t_{\rm pl}$	プランク時間	5.39×10^{-44}s	$\sqrt{\hbar G/c^5}$

(1D)

$$1[\mathrm{eV}] = e[\mathrm{C}]\times[\mathrm{V}] = 1.60217653\times10^{-19}[\mathrm{J}] = 1.60217653\times10^{-12}[\mathrm{erg}] \tag{18}$$

$$1[\mathrm{eV}] = \frac{1[\mathrm{eV}]}{k}[\mathrm{K}] = \frac{1.60217653\times10^{-12}[\mathrm{erg}]}{1.3806505\times10^{-16}[\mathrm{erg/K}]}[\mathrm{K}] = 1.1604505\times10^{4}[\mathrm{K}] \tag{19}$$

$$1[\mathrm{g}] = c^2[\mathrm{erg}] = (2.99792458\times10^{10})^2[\mathrm{erg}] = 8.987551787\times10^{20}[\mathrm{erg}] \tag{20}$$

これらをまとめると以下の通り。

	eV	K	erg	g
eV	—	1.16×10^{4}K	1.60×10^{-12}erg	1.78×10^{-33}g
K	8.62×10^{-5}eV	—	1.38×10^{-16}erg	1.54×10^{-37}g
erg	6.24×10^{2}GeV	7.24×10^{15}K	—	1.11×10^{-21}g
g	5.61×10^{23}GeV	6.51×10^{36}K	8.99×10^{20}erg	—

問題2の解答例

(2A) 半径138億光年は、

$$R_{\rm H} = (138 \times 10^8) \times (365 \times 24 \times 3600) \times (3 \times 10^{10}){\rm cm} \approx 1.3 \times 10^{28}{\rm cm}. \tag{21}$$

現在の宇宙の臨界密度は、

$$\rho_{\rm crit} \approx 2 \times 10^{-29} h^2 \ {\rm g} \cdot {\rm cm}^{-3} \tag{22}$$

で、その約5%がバリオンである。また、無次元のハッブル定数は $h \approx 0.67$ と推定されている。したがって、この地平線球の質量は

$$M_{\rm H} \approx \frac{4\pi}{3}(1.3 \times 10^{28})^3 \times (2 \times 10^{-29} \times 0.67^2){\rm g} \approx 8 \times 10^{55}{\rm g}. \tag{23}$$

これを陽子の質量で割り算して、

$$N_{\rm H} = \frac{M_{\rm H}}{m_p} \approx \frac{8 \times 10^{55}}{1.67 \times 10^{-24}} \approx 5 \times 10^{79} \tag{24}$$

が現在の地平線球内に存在する核子数だと推定される。

(2B) 大まかには、個数は

$$N_{\rm H,max} = \left(\frac{1.3 \times 10^{28}}{10^{-13}}\right)^3 \approx 2 \times 10^{123}. \tag{25}$$

また、質量は

$$M_{\rm H,max} = m_p N_{\rm H,max} \approx 1.67 \times 10^{-24} \times 2 \times 10^{123}{\rm g} \approx 3 \times 10^{99}{\rm g}. \tag{26}$$

(2C) 題意をすべて認めるならば

$$N_{\rm H,dof} = 2^{N_{\rm H,max}} \approx 2^{2\times 10^{123}} = 10^{2\times 10^{123}\log_{10} 2} \approx 10^{0.6\times 10^{123}}. \tag{27}$$

この3乗根に個々の地平線球の大きさをかければ $D_{\rm C}$ となるはず。すなわち

$$D_{\rm C} = \text{１３８億光年} \quad \times 10^{0.2\times 10^{123}} \approx 10^{2.1+0.2\times 10^{123}}\text{億光年} \approx 10^{10^{122}}\text{億光年}. \tag{28}$$

ちなみに、これだけ冪指数が大きくなると、$10^{10^{122}}$億光年 であろうと、$10^{10^{122}}$光年 であろうと、たかだか8桁の違いはまったくどうでも良い。その程度が気になるような視野の狭い人間であってはならない。

(2D) 省略

(2E) 人間の平均身長・平均体重をそれぞれ 10^2 cm, 10^5 g 程度と見積もると、1 人の人間中に詰め込める半径 1fm のセルの平均個数 $N_{\rm h,max}$ は、

$$N_{\rm h,max} \sim \left(\frac{10^2}{10^{-13}}\right)^3 = 10^{45}. \tag{29}$$

一方、人間は水素原子のみで構成されているとすれば、1 人の人間を構成する平均水素原子数 $N_{\rm h}$ は、

$$N_{\rm h} \sim \frac{10^5}{m_{\rm p}} \sim \frac{10^5}{10^{-24}} = 10^{29}. \tag{30}$$

水素原子の分布が、人間のパターンを全て決めるとすれば、$N_{\rm h,max}$ 個のセルから $N_{\rm h}$ 個選び出す組み合わせが全パターン数 $N_{\rm h,dof}$ となる。よって、

$$N_{\rm h,dof} \sim {}_{10^{45}}C_{10^{29}}. \tag{31}$$

$10^{45} \gg 10^{29} \gg 1$ より、スターリング公式を使うと、

$$\begin{aligned}
\ln N_{\rm h,dof} &= \ln(10^{45}!) - \ln(10^{29}!) - \ln[(10^{45}-10^{29})!] \\
&\sim (10^{45}\ln 10^{45} - 10^{45}) - (10^{29}\ln 10^{29} - 10^{29}) \\
&\quad - \{(10^{45}-10^{29})\ln[(10^{45}-10^{29})] - (10^{45}-10^{29})\} \\
&\sim 10^{29}\left[\ln\left(\frac{10^{45}}{10^{29}}\right) + 1\right] \sim 4\times 10^{30}.
\end{aligned} \tag{32}$$

よって、

$$N_{\rm h,dof} \sim \exp(4\times 10^{30}) \sim 10^{4\times 10^{30}\times \log_{10} e} \sim 10^{2\times 10^{30}} \sim 10^{10^{30}}. \tag{33}$$

(2F) **(i)** DNA は AGCT の 4 種類の塩基で構成されている。30 億塩基対に対してとれる塩基配列の総数を人間のパターンとすれば、人間のパターンの総数 $N_{\rm h,dof}$ は、

$$N_{\rm h,dof} \sim 4^{3\times 10^9} \sim 10^{2\times 10^9} \sim 10^{10^9}. \tag{34}$$

(ii) 30 億個の塩基対のうち有意な情報をもつ塩基対は 2%程度であることを考慮すると、その塩基対の個数は 0.6 億個となる。従って、考えられる人間のパターンは、

$$N_{\rm h,dof} \sim 4^{0.6\times 10^8} \sim 10^{4\times 10^7} \sim 10^{10^7}. \tag{35}$$

(iii) 20 種類のアミノ酸を 1000 個並べたものがタンパク質であると考えると、考えられるタンパク質の種類の総数は 20^{1000} となる。1 ゲノムは 1 タンパク質に対応しているので、人間のパターンの総数は、

$$N_{\rm h,dof} \sim (20^{1000})^{22000} \sim 10^{3\times 10^7} \sim 10^{10^7}. \tag{36}$$

(iv) 実際のタンパク質の種類が 10 万種類程度であることを考慮すると、

$$N_{\mathrm{h,dof}} \sim (10^5)^{22000} \sim 10^{110000} \sim 10^{10^5}. \tag{37}$$

(2E) − (2F)(iv) の各々の場合で、人間の総パターン数の大きさを比較すると、例えば (2F)(iv) は、常用対数をとって比較しても、(2E) よりも 25 桁も小さい値になる。

(2G) 地平線球の質量を M_{H} に固定した場合、地平線球中の水素原子の個数は (2A) で求めた N_{H} となる。よって、考えられる地平線球の全パターンは、

$$N_{\mathrm{H,dof}} \sim {}_{N_{\mathrm{H,max}}}C_{N_{\mathrm{H}}} \sim {}_{10^{123}}C_{10^{79}}. \tag{38}$$

再びスターリング公式を用いて、

$$N_{\mathrm{H,dof}} \sim \exp(10^{79} \ln 10^{44} + 10^{79}) \sim \exp(10^{81}) \sim 10^{4\times 10^{80}}. \tag{39}$$

よって、クローン地平線球間の平均距離 D_c は、

$$D_{\mathrm{C}} \sim 10^{\frac{4}{3}\times 10^{80}} \times 138\,\text{億光年} \sim 10^{10^{80}}\text{億光年} \sim 10^{10^{80}}\text{光年}. \tag{40}$$

(2H) 省略

感想：この問題に関しては、そもそも回答していない人と、私の予想以上にいろいろなことを考えて記述してくれた人の 2 パターンに大きく分かれていました。緑色で丸をしたのは、私が結論に同意したかどうかには無関係に、自分の頭で考えて回答してくれたことに対する敬意を評した部分です。まず大多数の意見は、人間についても仮に物質分布という観点から同一のものがあったならば、それは意識や記憶も含めて同じであろうというもので、これは私も含めて物理学者の価値観を代表しているのでしょう。これに対して、人文系の人たちの多くは、物心二元論なので、このような考えにはほぼ賛同しないようです。とはいえ、これはあくまで古典的な描像にもとづいているので、量子論的な実在とは何かということを考え始めると、とたんにわからなくなってしまいます。

クローン宇宙に関しては、何を制約条件にとるかによって、その個数は著しく変わるものの、無限大を考える限り有限の自由度は繰り返し無限回登場することは自明なので、本質は、宇宙の本質はデジタルかアナログか、また無限大というのは数学的概念を越えて実在の世界でもありうるのか、といったこれまた正解のない問題に帰着します。物理の勉強に疲れたときには、このような話でも考えて、息抜きをしてほしいと思いますが、人によってはより一層疲れるだけかもしれません。

問題3の解答例

(3A)

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM(< R)}{R^2} \tag{41}$$

(3B) (41) 式の両辺に dR/dt を乗じて積分すればエネルギー保存則：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{R} = E = -\frac{K}{2} \tag{42}$$

が得られる。左辺第一項が、球殻の単位質量あたりの運動エネルギー、左辺第二項が球殻の単位質量あたりの重力ポテンシャルエネルギーである。

(3C) 一様密度球の質量 M：

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho(t)R^3(t) \tag{43}$$

を (42) 式に代入して整理すると、

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + K = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)R^2(t) \tag{44}$$

が得られる。

(3D) (3) 式を (2) 式に代入すれば

$$\rho(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{45}$$

(3E) 図2から、ナトリウムの吸収線は約 70Å だけ波長が伸びていることが読み取れる。したがって、

$$v/c = \frac{\lambda_{\text{銀河}}}{\lambda_{\text{星}}} - 1 = \frac{70}{6000} \approx 0.011 \quad \Rightarrow \quad v \approx 3300\text{km/s} \tag{46}$$

(3F)

$$\begin{aligned} H_0 = \frac{\text{後退速度}}{\text{距離}} &\approx \frac{1500\text{km/s}}{20\text{Mpc}} = 75\text{km/s/Mpc} \\ &= \frac{75 \times 10^5}{3.09 \times 10^{24}}\text{s}^{-1} = 2.4 \times 10^{-18}\text{s}^{-1}. \end{aligned} \tag{47}$$

(45) 式と組み合わせると

$$\rho(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3 \times 2.4^2 \times 10^{-36}}{8\pi 6.67 \times 10^{-8}}\text{g/cc} \approx 10^{-29}\text{g/cc}. \tag{48}$$

(3G) (2) 式より

$$\begin{aligned}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho(t)R^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t_0)\frac{R(t_0)^3}{R(t)^3}R^2(t) \\ &= H_0^2\frac{R(t_0)^3}{R(t)}. \end{aligned} \tag{49}$$

現在の宇宙は膨張しているから、この平方根をとって

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R(t_0)\sqrt{\frac{R(t_0)}{R(t)}}. \tag{50}$$

(3H) (7) 式より

$$R^{1/2}\frac{dR}{dt} \propto \frac{dR^{3/2}}{dt} \propto \mathrm{const.} \tag{51}$$

したがって、初期条件 $R(t=0)=0$ を考慮すれば $R \propto t^{2/3}$. これを再度 (7) 式に代入して係数を決めると

$$R(t) = R(t_0)\left(\frac{t}{2/3H_0^{-1}}\right)^{2/3}. \tag{52}$$

これから、このモデルが予言する現在の宇宙年齢は

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1} \tag{53}$$

であることがわかる。(47) 式の値を代入すれば

$$t_0 \approx \frac{2}{3}\frac{1}{2.4\times 10^{-18}}\mathrm{s} \approx 2.8\times 10^{17}\mathrm{s} \approx 100\,億年 \tag{54}$$

を得る。