標準的宇宙モデルは一様等方宇宙に対応する次の線素：

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dx^2}{1-Kx^2} + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right] \tag{1}$$

で記述される。ここで、c は光速、t と x は宇宙の時間と空間座標を表し、s は 4 次元的距離を表す。また $a(t)$ は、スケール因子と呼ばれる時間の関数で宇宙の相似的拡大率を表す。この式からわかるように、a の値は x の値 (単位) と縮退しているので、絶対的な意味はない (a を 2 倍する代わりに x を 1/2 倍し、K を 4 倍すれば同じ結果になる)。そこで普通は、現在の宇宙 $t = t_0$ での a の値が 1 となるように選ぶ。この場合、x は現在の宇宙で測定した場合の空間的距離に対応する。K は空間の曲がり度合いを表す定数で、ユークリッド空間の場合は $K = 0$ となる。

光はヌル測地線、すなわち $ds^2 = 0$ に沿って進む。これは「局所的」には、光が光速で進むことを意味する。特に動径方向 ($d\theta = d\varphi = 0$) に進む光を考えれば、式 (1) から

$$\frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \frac{cdt}{a(t)} \tag{2}$$

が成り立つ。そこで、次の量：

$$\chi(t) = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \int_{\mathrm{t}}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \tag{3}$$

を定義する。特に $K = 0$(平坦な空間) の場合は、$\chi(t)$ と $x(t)$ は一致する。逆に言えば、空間が曲がっている場合には、これらはいずれもある種の距離に対応する物理量だと考えられる。

(3) 式の右辺を計算するには、a と t の関係式を求める必要がある。これはアインシュタイン方程式で与えられる。具体的には、宇宙がエネルギー密度 $\rho(t)$ と宇宙定数 Λ をもつ場合、(1) 式に対応するアインシュタイン方程式は

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{4}$$

となる。

さらに、宇宙の物質成分として、非相対論的物質 $\rho_{\mathrm{m}}(\equiv \rho_{\mathrm{m0}}a^{-3})$ と相対論的物質 $\rho_r(\equiv \rho_{\mathrm{r0}}a^{-4})$ の 2 種類を考える。それらの現在の値 ρ_{m0}、ρ_{r0}、及び宇宙定数 Λ に対応した無次元密度パラメータを

$$\Omega_{\mathrm{m}} \equiv \frac{8\pi G\rho_{\mathrm{m0}}}{3H_0^2}, \quad \Omega_{\mathrm{r}} \equiv \frac{8\pi G\rho_{\mathrm{r0}}}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{5}$$

で定義する。これらは時間によらない定数であることに注意。ここで、H_0 はハッブル定数であるが、(4) 式で $t = t_0$ の場合を考えると

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\mathrm{m0}} + \rho_{\mathrm{r0}}) - K + \frac{\Lambda}{3}. \tag{6}$$

この式に (5) 式を代入すれば

$$K = H_0^2(\Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r} + \Omega_\Lambda - 1) \tag{7}$$

が得られる。以上より、(4) 式は

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_\mathrm{r}}{a^2} + \frac{\Omega_\mathrm{m}}{a} + [1 - \Omega_\mathrm{r} - \Omega_\mathrm{m} - \Omega_\Lambda] + \Omega_\Lambda a^2\right) \tag{8}$$

に帰着する。これらをまとめると、

$$\chi(a) = \int_0^a \frac{c}{a}\frac{dt}{da}da = \frac{c}{H_0}\int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_\mathrm{r} + \Omega_\mathrm{m}a + (1 - \Omega_\mathrm{r} - \Omega_\mathrm{m} - \Omega_\Lambda)a^2 + \Omega_\Lambda a^4}}. \tag{9}$$

さて、例えば宇宙マイクロ波背景輻射探査機プランクのデータからは以下の宇宙論パラメータの値が得られている。

表 1: プランク衛星による主な宇宙論パラメータの推定値

記号	推定値	意味
H_0	$(67.4 \pm 1.4)\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}^{-1}$	ハッブル定数
Ω_b	0.048884 ± 0.00073	バリオン密度パラメータ
Ω_d	0.2633 ± 0.0068	ダークマター密度パラメータ
Ω_Λ	$0.685^{+0.018}_{-0.016}$	宇宙定数パラメータ
Ω_K	$-0.042^{+0.043}_{-0.048}$	宇宙の曲率パラメータ
t_0	(138.13 ± 0.58) 億年	現在の宇宙年齢

これらは、どのような観測データを選んで組み合わせるかによって若干値が異なることを注意しておく。ただし、現在の宇宙はほぼ平坦である ($K \approx 0$)、宇宙の非相対論的物質密度 $\Omega_\mathrm{m} = \Omega_\mathrm{d} + \Omega_\mathrm{b}$ はほぼダークマターで占められていることは確かである。また、現在の宇宙では非相対論的物質の寄与は無視できる ($\Omega_\mathrm{r} \approx 10^{-4}$) ことが知られている。

以上をまとめると、平坦な宇宙において、現在 ($t = t_0$) から宇宙の始まり ($t = 0$) までの距離は

$$L_\mathrm{H} = \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a} = \int_0^1 \frac{c}{a}\frac{dt}{da}da \approx \frac{c}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}a + \Omega_\Lambda a^4}}. \tag{10}$$

この式は解析的には積分できないので、平坦な宇宙 ($K = 0$) を仮定した上で観測データから得られる推定値 $\Omega_\Lambda = 0.685$, $\Omega_\mathrm{m} = 1 - \Omega_\Lambda = 0.315$ の場合に数値積分すれば

$$L_\mathrm{H} \approx \frac{3.24c}{H_0} \approx 470\left(\frac{67.4\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}}{H_0}\right) \text{億光年} \tag{11}$$

となる。

現在観測できる範囲の宇宙のサイズ（地平線半径）

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{H}} &= \int_0^{t_0} \frac{c dt}{a} \approx \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}} a + \Omega_\Lambda a^4}} \approx 3.24 \frac{c}{H_0} \\
&\approx 470 \left(\frac{67.4 \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}}{H_0} \right) \text{億光年}
\end{aligned}
$$

t_0	現在の宇宙年齢	138 億年
$a(t)$	スケール因子	$a(0) = 0,\ a(t_0) = 1$
H_0	ハッブル定数	$67.4 \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$
Ω_{m}	ダークマターの存在比	0.315
Ω_Λ	宇宙定数の存在比	0.685