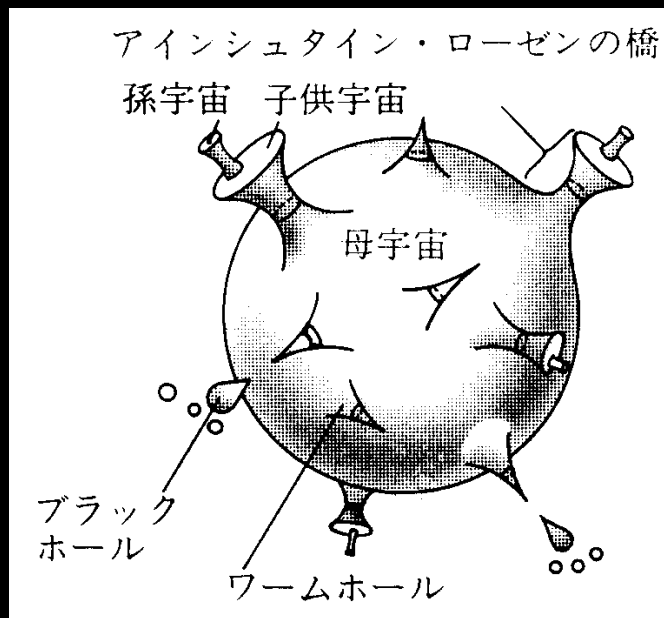


# 世界はゆらぎでできている? ボルツマン脳とボルツマン宇宙



東京大学大学院理学系研究科 物理学専攻 須藤 靖

理工学のフロンティア 2022年度第11回 (オンライン)

2022年12月13日16:50-18:20@高知工科大学

[http://www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~suto/mypresentation\\_2022j.html](http://www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~suto/mypresentation_2022j.html)

# 本日の話の内容

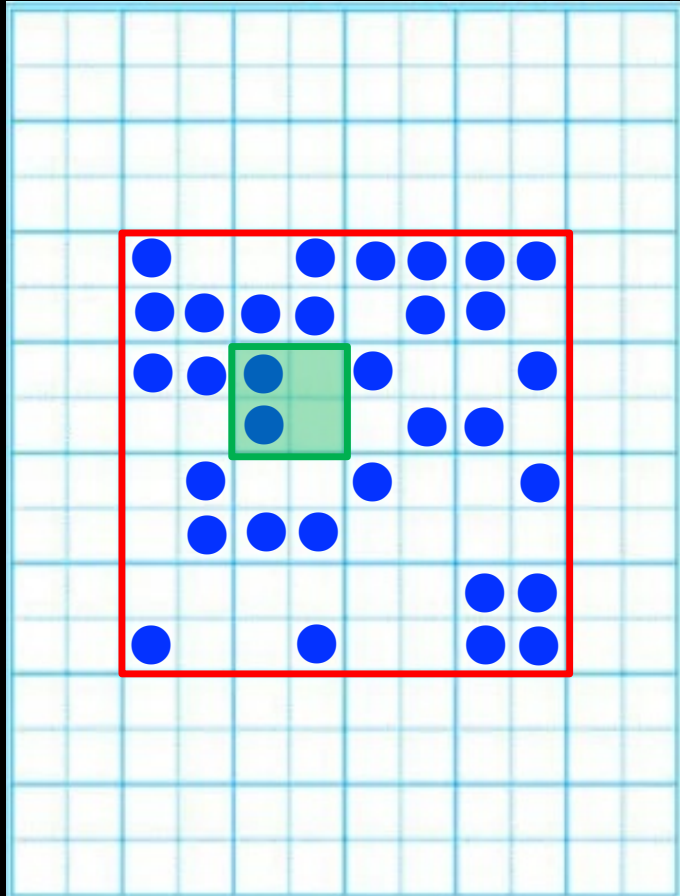
- 1 物理法則と矛盾しないことは必ず起こる
- 2 宇宙のエントロピーと熱的死
- 3 ボルツマン脳
- 4 毒食らわば皿まで
- 5 まとめ

**1 物理法則と矛盾しないことは必ず起こる**

# めったに起こらない ≠ 起こらない

- *Everything not forbidden by the laws of nature is mandatory*  
— *Carl Sagan, Contact*
  - 確率Pの事象をN回試行すると、その事象が起こる期待値はNP
  - つまり、どれほどPが小さくとも0でない限り、 $N(\gg P^{-1})$ 回試行すれば、その事象は1回以上実現するはず
- 例)サイコロを100回振って、1の目が100回連続して出る
  - 確率  $P=1/6^{100}=10^{-78}$
  - しかしこれは「サイコロを100回振る」を $10^{78}$ 回繰り返せば、平均的には1回起こらないとおかしいことを意味する
  - サイコロを一回振るのに1秒かかるとすると、 $100秒 \times 10^{78} =$  (現在の宇宙年齢)の $10^{62}$ 倍だけの時間をかければ起こって当然

# 有限自由度の系は、数多く集めれば必ず繰り返し現れる



- $2 \times 2 = 4$ のマス目内に、粒子があるかないかの2通りの可能性を持つ系は、 $2^4 = 16$ 種類しかない(左図の赤枠内)
- 左図には $2 \times 2$ のマス目は合計 $6 \times 8 = 48$ 個あるので、任意の特定の配置は平均的に3回現れる
- 外に広がるずっと大きな領域を考えれば、ある特定の配置(例えば緑枠の配置)は繰り返し何度も現れるはず
- 仮にそうでなければ、何らかの理由(物理法則あるいは詐欺師)によって、その特定の配置が禁止されていると考えるべき

- この議論の本質:有限自由度の系と(ほぼ無限に近い)広大な外界の存在

# キツテルの『熱物理学』にある常識的教え

- 運動方程式の可逆性は「十分に長い時間待てば、その系はたとえどんなに確からしくない配列であるにせよ必ず現れるはずである」ことを示唆する。しかしこれは誤りである。“十分に長い”とは長すぎて“決して現れない”と同じ意味だからである。
  - 問題4・4: タイプライターには44個のキーがあり、サルは1秒間に10のキーを打てるとする。『ハムレット』には $10^5$ の文字があるとしたとき、 $10^{10}$ 匹のサルが宇宙年齢( $10^{18}$ 秒)の間タイプライターを打ち続けると『ハムレット』は創作されるか。
    - その期待値は  $\frac{1}{44^{100000}} \times 10^{10+18+1} \cong 10^{-164316}$
- これは私が学部時代に読んだ優れた教科書。この解説も問題も素晴らしいし、常識的な時間スケール(宇宙年齢以下)を考える限り正しい
- しかし、非常識な時間スケールをものともしない宇宙論屋にとって、上述の解説は単なる間違いに過ぎない(論理的に破綻している)

# 古典論的サイコロと量子サイコロ

- 正確には**古典論的サイコロはランダムではありません**
  - その道のプロなら、いつでも好きな目を出せる(初期条件を決めさえすれば、サイコロは本来古典力学にしたがって決定論的に振る舞うため)
  - それができない素人にとっては、調整できない初期条件のために、結果的に6つの目の出方がほぼランダムになる
  - いずれにせよ、サイコロを振る前の世界と因果的に関係づいている
- **量子サイコロは本質的にランダムであるはず**
  - コペンハーゲン解釈によればサイコロを振る前後の世界は、決定論的な意味において因果的関係はない(薄い)
  - 多世界解釈ではサイコロを振るたびに6つの世界に分岐し、100回振ると $6^{100}$ 通りの可能性が尽くされるため、100秒後にはどれかの宇宙で1の目が100回連続して出ているはず(量子コンピュータの高速性)

# (多世界解釈でなくとも)並行宇宙は存在するか？

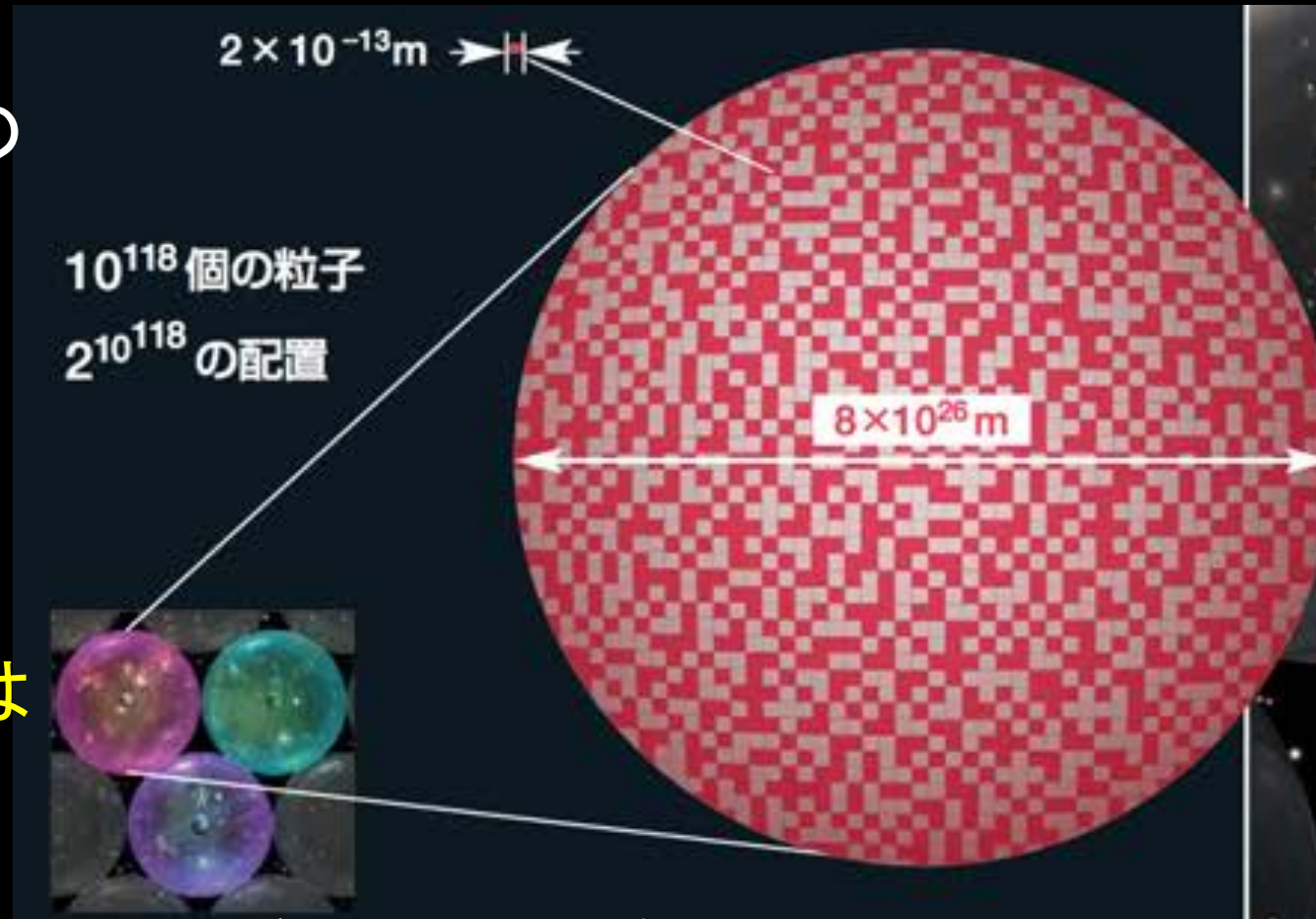
- 2x2のマスキの例を、我々が観測できるこの宇宙に応用する
  - 我々が観測できる宇宙は、半径138億光年( $10^{28}$ cm)の球内に限られる(地平線球)
  - この地平線球に核子サイズ( $10^{-13}$ cm)のマスキを考え、そこに核子があるかないかで、宇宙の物質分布のすべての可能性が尽くされると仮定する
  - マスキの数は、 $(10^{28}/10^{-13})^3 = 10^{123}$ 個
  - 異なる配置は2の( $10^{123}$ 乗)通り $\approx$ 10の( $10^{122}$ 乗)通りしかない
  - もしも我々を中心とする半径138億光年 $\times$ 10の( $10^{41}$ 乗)以上の球を考えれば、その中には平均的に我々が観測できるこの宇宙と全く同じ配置が一個現れるはず
- 上の議論は、(数値を別として)決して荒唐無稽ではない
  - ただしそこで本質的となる、以下の2つの仮定が正しいかどうかは明らかではない
    - 1) 有限体積の宇宙の性質は有限自由度で記述できる
    - 2) 「我々が観測できる宇宙」の外にも、十分大きな「宇宙」が広がっている



# 我々の地平線球が持つ「古典的」情報量

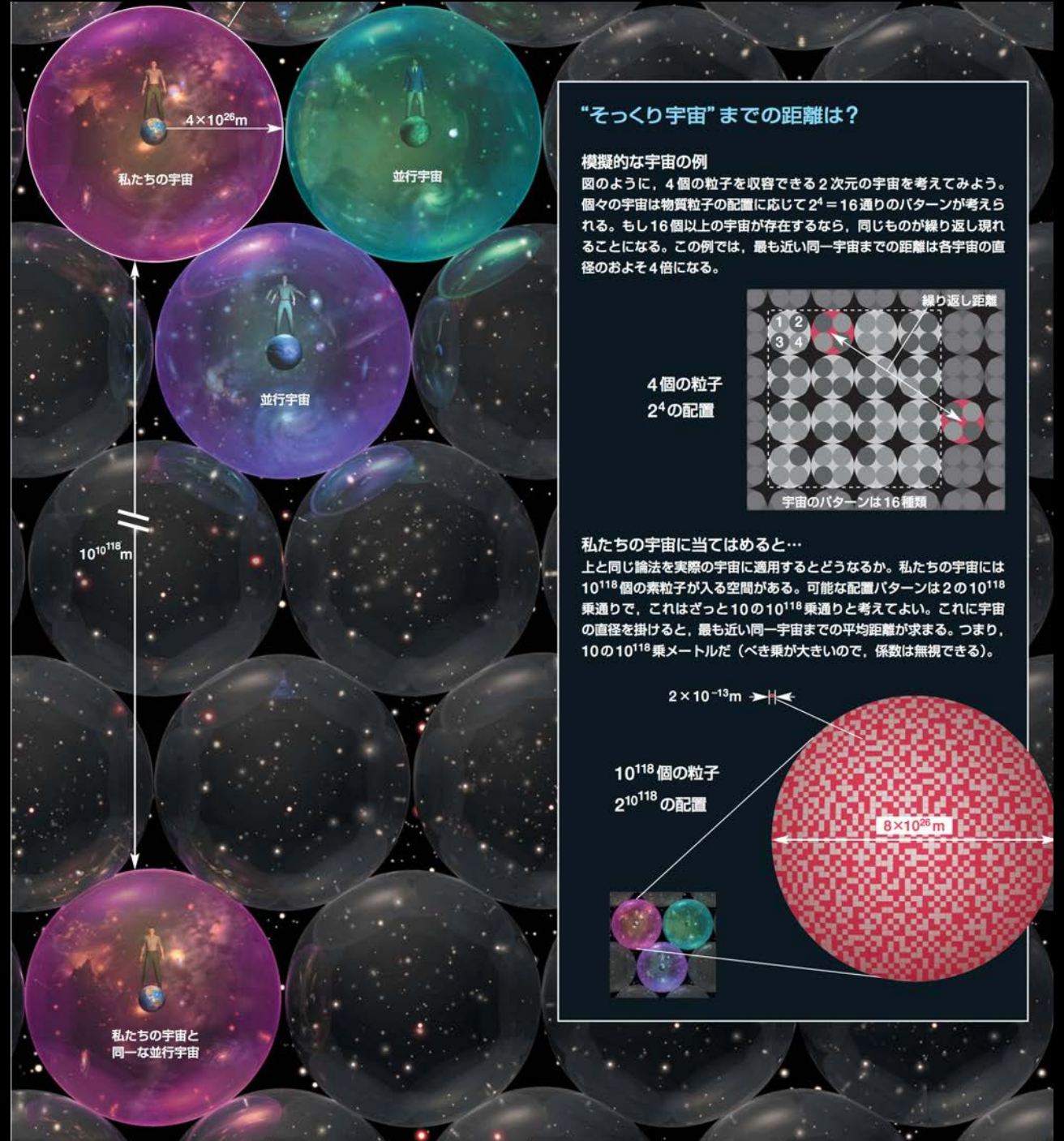
- 水素の原子核の大きさは $\sim 10^{-13}\text{cm}$
- 地平線球の半径138億光年は $\sim 10^{28}\text{cm}$

- この地平線球につめこめる水素の個数は  $(10^{28}/10^{-13})^3 = 10^{123}$ 個 (≡地平線球のエントロピー)
- そこに実際に水素を置くかどうかの2通りの可能性があるので、可能な配置数は2の $10^{123}$ 乗通り
- この半径をもつ地平線球の種類は2の $10^{123}$ 乗通り\*しか\*ない



# 並行宇宙、さらには並行人間は実在するか

- 宇宙が(10の $10^{122}$ 乗)億光年より大きければ(=ほぼ無限体積)、有限自由度の同一の構造は無限個存在するはず
- 同一原子配置をもつ人間は**意識**まで含めて同じ人間(≠クローン人間)となるのか？
- 自由意志と古典的決定論

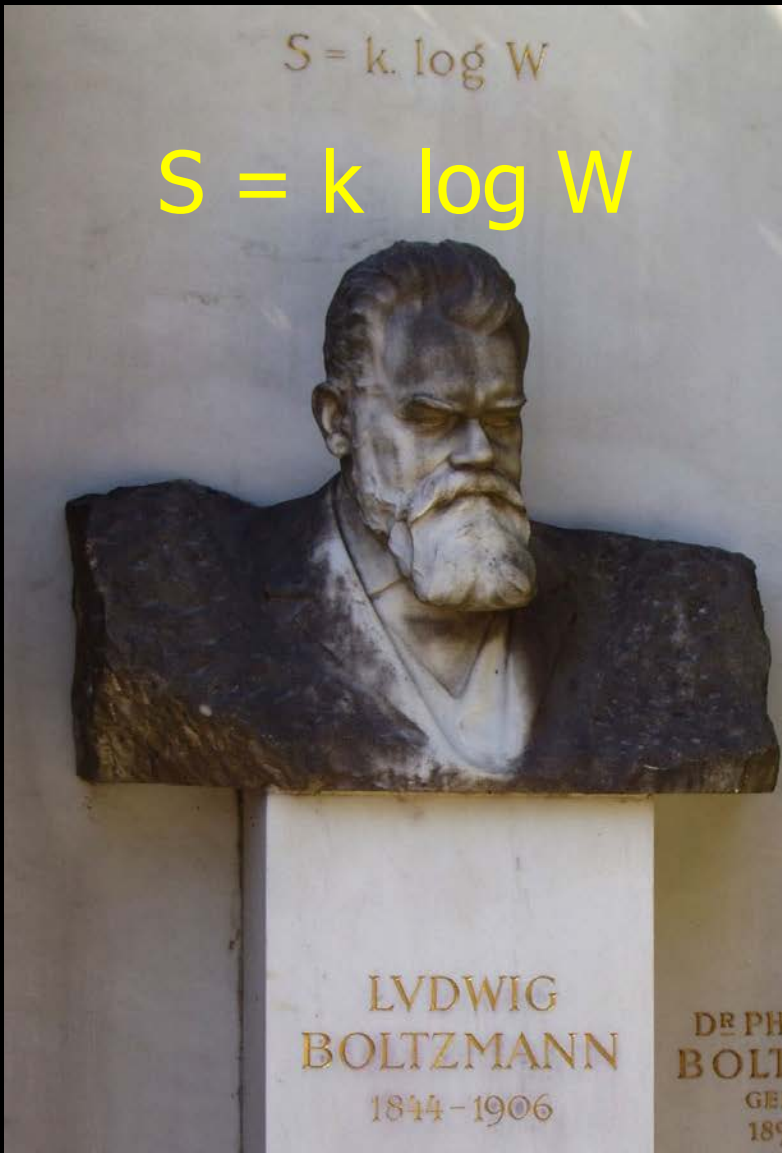


## 2 宇宙のエントロピーと熱的死

# “On Certain Questions of the Theory of Gases”

We assume that the whole universe is, and rests for ever, in thermal equilibrium. The probability that one (only one) part of the universe is in a certain state, is the smaller the further this state is from thermal equilibrium; but this probability is greater, the greater is the universe itself. If we assume the universe great enough, we can make the probability of one relatively small part being in any given state (however far from the state of thermal equilibrium), as great as we please. We can also make the probability great that, though the whole universe is in thermal equilibrium, our world is in its present state. It may be said that the world is so far from thermal equilibrium that we cannot imagine the improbability of such a state. But can we imagine, on the other side, how small a part of the whole universe this world is? Assuming the universe great enough, the probability that such a small part of it as our world should be in its present state, is no longer small.

# ルートヴィッヒ・ボルツマン (1844-1906)



- さすがにボルツマンはキッテルよりも偉いことがわかる論文！
  - というか、宇宙年齢などという「短い時間スケール」にとらわれず、われわれの宇宙の存在を自然に説明しようと試みる姿勢がすごい
  - the universeとour worldを明確に区別している
  - とはいえ真面目すぎるのも問題

# 粒子系のエントロピー

- $S = k \log W$
- N個の粒子からなる系が取りうる異なる状態数を考える
  - $W \sim (1 \text{ 粒子の自由度})^N$ とか $N!$ といった感じの項からなる
  - $\log W \propto N$ あるいは $N \log N - N$ なので、結局 $S$ は $kN$ に比例し、その比例係数は通常 $O(10) \sim O(100)$ 程度
  - アボガドロ数以上の個数の粒子からなる巨視的な系の場合、この比例係数の値はどうしても良いため、 $S/k$ は系の粒子数 $N$ とみなせる
- 例: 単原子理想気体のエントロピー (Sachur-Tetrodeの式)

$$S_{\text{gas}} = kN \ln \left[ e^{5/2} \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{V}{N} \right] = k \ln \left( e^{5/2} \frac{V/N}{V_q} \right)^N$$

粒子のド・ブROI波長で決まる量子体積

# ブラックホールのエントロピー

- Bekenstein (1972), Hawking (1975)

$$S_{\text{BH}} = k \frac{4\pi G M_{\text{BH}}^2}{\hbar c} = \frac{k}{4} \frac{4\pi R_{\text{BH}}^2}{(\ell_{\text{pl}})^2}$$

$$R_{\text{BH}} = \frac{2GM_{\text{BH}}}{c^2}$$

- この式はシュワルツシルド半径  $R_{\text{BH}}$  のブラックホールの表面積だが、 $R_{\text{BH}}$  をド・ブロイ波長とする光子数とも解釈できる

$$= \frac{M_{\text{BH}} c^2}{hc/R_{\text{BH}}} \equiv k N_{\text{BH}}$$

- ブラックホールは、この光子エネルギーに対応する温度 (Hawking temperature) の黒体輻射を出していると考えられる

$$kT_{\text{BH}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G} \frac{1}{M_{\text{BH}}} = \frac{\hbar c}{4\pi} \frac{1}{R_{\text{BH}}}$$

# ドジッター宇宙のエントロピー

- 宇宙定数 $\Lambda$ に支配されている現在の宇宙は、次のドジッター時空に漸近する

実は同じ  
(座標変換  
しただけ)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\ell_\Lambda^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r^2/\ell_\Lambda^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$\ell_\Lambda = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

$$a(t) = e^{t/\ell_\Lambda}$$

- ドジッター時空は地平線を持つ  $\Leftrightarrow$  ブラックホールの $R_{\text{BH}}$ に対応

cosmic  
event horizon

$$R_{\text{CEH}}(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = e^{t/\ell_\Lambda} \int_t^\infty e^{-t'/\ell_\Lambda} dt' = \ell_\Lambda$$

- ドジッター宇宙のエントロピーと温度 (Gibbons & Hawking 1977)

$$S_\Lambda = k \frac{\pi c^3}{\hbar G} \ell_\Lambda^2 = k \frac{3\pi c^3}{\hbar G} \frac{1}{\Lambda}$$

$$\frac{k}{4} \frac{4\pi R_{\text{BH}}^2}{(\ell_{\text{pl}})^2}$$

$$kT_\Lambda = \frac{\hbar c}{2\pi} \frac{1}{\ell_\Lambda} = \frac{\hbar c}{\sqrt{12\pi}} \sqrt{\Lambda}$$

$$\frac{\hbar c}{4\pi} \frac{1}{R_{\text{BH}}}$$



# 現在観測できる(**particle horizon**内の) 宇宙のエントロピー

$$R_{\text{obs}} = a(t) \int_{t'=0}^t \frac{c}{a(t')} dt' = 46.9 \pm 0.4 \text{ Glyr}$$

Egan & Lineweaver  
ApJ 710(2010)1825

Component	Entropy Density $s$ ( $k \text{ m}^{-3}$ )	Entropy $S$ ( $k$ )
SMBHs	$8.4^{+8.2}_{-4.7} \times 10^{23}$	$3.1^{+3.0}_{-1.7} \times 10^{104}$
Stellar BHs ( $2.5\text{--}15 M_{\odot}$ )	$1.6 \times 10^{17+0.6}_{-1.2}$	$5.9 \times 10^{97+0.6}_{-1.2}$
Photons	$1.478 \pm 0.003 \times 10^9$	$5.40 \pm 0.15 \times 10^{89}$
Relic Neutrinos	$1.411 \pm 0.014 \times 10^9$	$5.16 \pm 0.15 \times 10^{89}$
WIMP Dark Matter	$5 \times 10^{7\pm 1}$	$2 \times 10^{88\pm 1}$
Relic Gravitons	$1.7 \times 10^{7+0.2}_{-2.5}$	$6.2 \times 10^{87+0.2}_{-2.5}$
ISM and IGM	$20 \pm 15$	$7.1 \pm 5.6 \times 10^{81}$
Stars	$0.26 \pm 0.12$	$9.5 \pm 4.5 \times 10^{80}$
Total	$8.4^{+8.2}_{-4.7} \times 10^{23}$	$3.1^{+3.0}_{-1.7} \times 10^{104}$
Tentative Components:		
Massive Halo BHs ( $10^5 M_{\odot}$ )	$10^{25}$	$10^{106}$
Stellar BHs ( $42\text{--}140 M_{\odot}$ )	$8.5 \times 10^{18+0.8}_{-1.6}$	$3.1 \times 10^{99+0.8}_{-1.6}$

# Cosmic event horizon 内のエントロピー

Component	Entropy $S$ ( $k$ )
Cosmic Event Horizon	$2.6 \pm 0.3 \times 10^{122}$
SMBHs	$1.2^{+1.1}_{-0.7} \times 10^{103}$
Stellar BHs ( $2.5\text{--}15 M_{\odot}$ )	$2.2 \times 10^{96^{+0.6}_{-1.2}}$
Photons	$2.03 \pm 0.15 \times 10^{88}$
Relic Neutrinos	$1.93 \pm 0.15 \times 10^{88}$
WIMP Dark Matter	$6 \times 10^{86 \pm 1}$
Relic Gravitons	$2.3 \times 10^{86^{+0.2}_{-3.1}}$
ISM and IGM	$2.7 \pm 2.1 \times 10^{80}$
Stars	$3.5 \pm 1.7 \times 10^{78}$
Total	$2.6 \pm 0.3 \times 10^{122}$
Tentative Components:	
Massive Halo BHs ( $10^5 M_{\odot}$ )	$10^{104}$
Stellar BHs ( $42\text{--}140 M_{\odot}$ )	$1.2 \times 10^{98^{+0.8}_{-1.6}}$

Egan & Lineweaver  
ApJ 710(2010)1825

$$R_{\text{CEH}} = a(t_{\text{now}}) \int_{t=t_{\text{now}}}^{\infty} \frac{c}{a(t)} dt$$

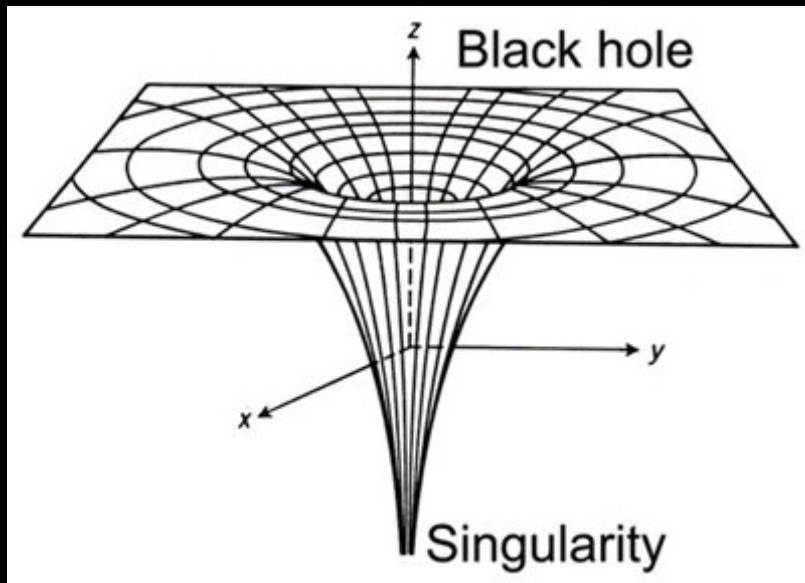
$$R_{\text{CEH}} = 15.7 \pm 0.4 \text{ Gyr},$$

$$\begin{aligned} V_{\text{CEH}} &= 1.62 \pm 0.12 \times 10^4 \text{ Gyr}^3 \\ &= 1.37 \pm 0.10 \times 10^{79} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

この外側にも無限体積の宇宙が広がっているが、 $R_{\text{CEH}}$ の外側の観測者は、内部のわれわれの存在を知ることができない

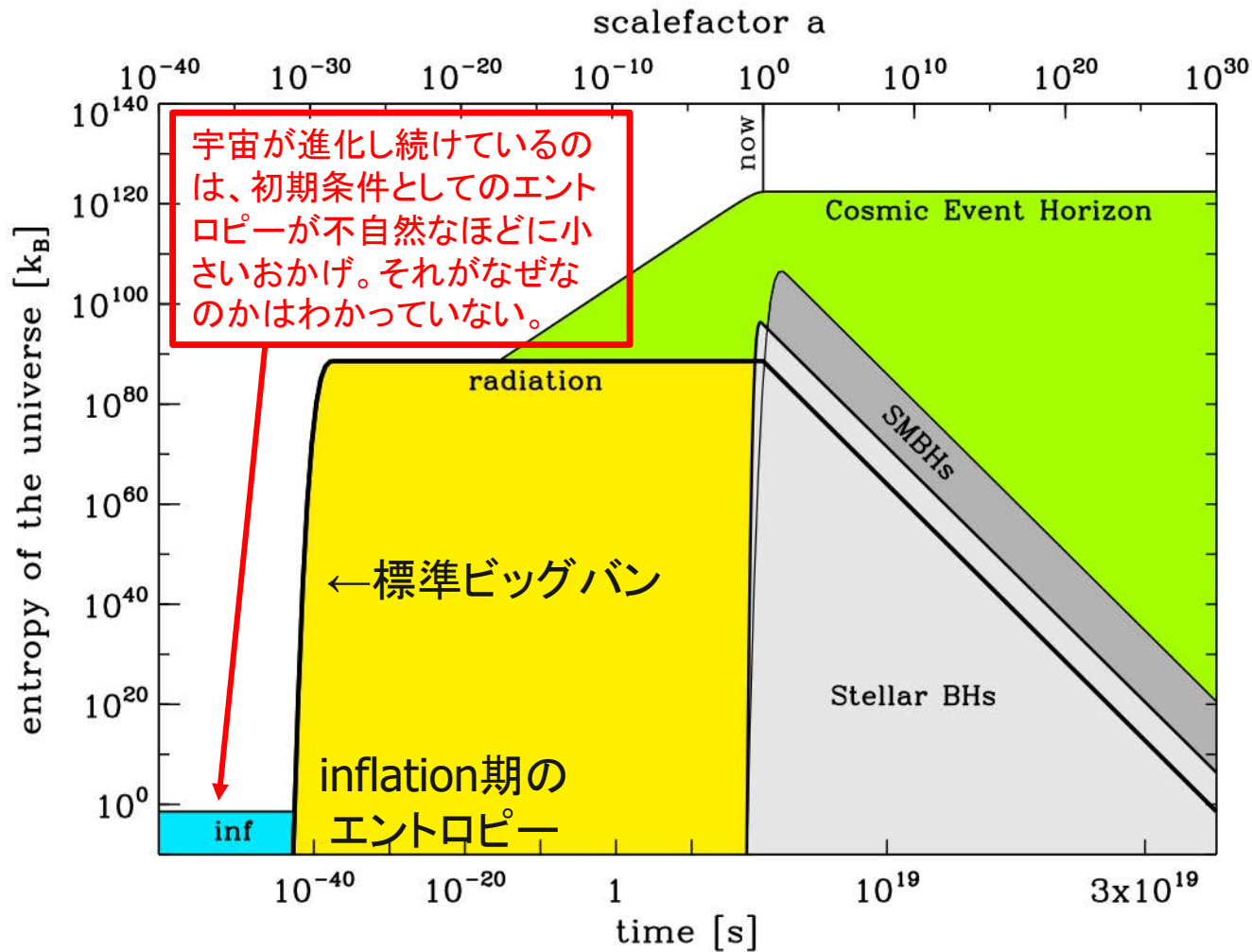
# 宇宙の未来と熱的死

- 宇宙は、エントロピー増加にしたがって物質構造（秩序）を失い一様分布する方向に進化する**わけではない**
- **物質が巨大ブラックホール内に落ち込む（構造の形成）ように進化するほうがエントロピー的にプラス**
  - ブラックホールは内部に膨大な体積をもつからと解釈してもいいかも？



- この宇宙が本当にドジッター時空に漸近するならば（ダークエネルギーが厳密に宇宙定数の場合）、我々を中心とするCEH球は外部の観測者にとっては一つのブラックホールのように振る舞う。CEH内の全エントロピーは、その中のブラックホールではなく、ドジッター時空自体のエントロピーが圧倒的

# 宇宙のエントロピーの時間変化



- 現在の宇宙はドジッター時空に漸近すると予想される
  - すべてのブラックホールはホーキング輻射を出し、やがては蒸発してしまう
  - 宇宙は一つのブラックホールとしてのドジッターエントロピーだけを持つ
- ドジッター温度  $T_{\Delta} \sim 10^{-33} \text{eV}$

# 3 ボルツマン脳

# ゆらぎによって生まれる構造

- 「局所的には」エントロピーの小さな構造が生まれてもよい
  - 自己重力系(星)は、それ自身のエントロピーを減少させるが、その際には外界にそれ以上のエントロピーを放出する。生物の誕生・進化も同じ
- 物理過程を経ることなく、全くのゆらぎから突如として秩序を持った構造が生まれる可能性はどれほど低い？
  - 現在の宇宙 ( $T=3\text{K}$ ) と熱平衡にある  $1\text{kg}$  の構造 (ボツルマン脳) がゆらぎとして生まれる確率

$$\exp\left(-\frac{1\text{kg}}{3\text{K}}\right) = \exp\left(-\frac{6 \times 10^{23} \text{ GeV}}{3 \times 10^{-4} \text{ eV}}\right) = \exp(-2 \times 10^{36}) \sim 10^{-10^{36}}$$

- これに宇宙年齢(138億年)と地平線球体積( $138\text{億光年})^3$ をかけても、確率はほとんど同じ(だからどの単位を使うかすら、もはやどうでもよい)

# ボルツマン脳

- 現在観測できる地平線球内に存在するボルツマン脳の数  
の期待値は10の(マイナス $10^{36}$ )乗なので、通常の人間が圧倒的に多い
- 今から1兆年以上経過すると、人間はおろか通常  
の物質からなる全ての構造は消滅する
  - しかし、その宇宙はドジッター温度 $T_{\Lambda} \sim 10^{-33} \text{eV}$   
以下にはならない
- 十分な時間が経過した宇宙に知性が存在するならば、  
ボルツマン脳のみとなっているはず

$$N_{\text{BB}} \sim t(ct)^3 \exp\left(-\frac{1\text{kg}}{10^{-33}\text{eV}}\right) \sim t^4 10^{-10^{66}} \Rightarrow t \gg 10^{10^{66}} \text{sec} \Leftrightarrow N_{\text{BB}} \gg 1$$

# ボルツマン脳の記憶と世界の歴史

- ボルツマン脳は不安定で、生まれてもすぐに消滅してしまうはずだが、ごくまれには思考する時間がある程度には安定なものがあるかも（ここまで来ると「まれ」という言葉には意味がない）
  - 皆さんと全く同じ記憶を持つ脳すら突然生まれたかもしれない
  - しかしその記憶は、外の世界の歴史とは因果的関係をもたない
- 今から10の(10<sup>66</sup>乗)億年先のほぼすべてが消滅した宇宙(安定な粒子である光子と重力子のみが残っている?)に、突如「天の川銀河太陽系第3惑星日本国高知県安芸市に生まれ高知工科大でセミナーをした」記憶を持つ意識が現れても、それは無意味な信号の集まりとしての記憶でしかない
  - とはいえ、検証する間もなく消滅してしまうだろうが...



## 4 毒食らわば皿まで

# 自分がボルツマン脳でないと言断できるか？

## ■ ゆらぎではないと考えられる(状況)証拠

- 自分は脳として機能する最低限のパーツのみならず、周りの人と似た構造をしている
  - ⇒ **ボルツマン人間**では？
- 自分が生まれたときから成長して現在に至るまでの写真やビデオが記録として残っている
  - ⇒ **ボルツマン一家**では？
- 自分は周囲の人々と同じ記憶を共有している
  - ⇒ **ボルツマン町内会**では？
- 世界中で一度も会ったことのない人達が同じ歴史を共有
  - ⇒ **ボルツマン地球**では？

# ボルツマン地球、ボルツマン銀河...

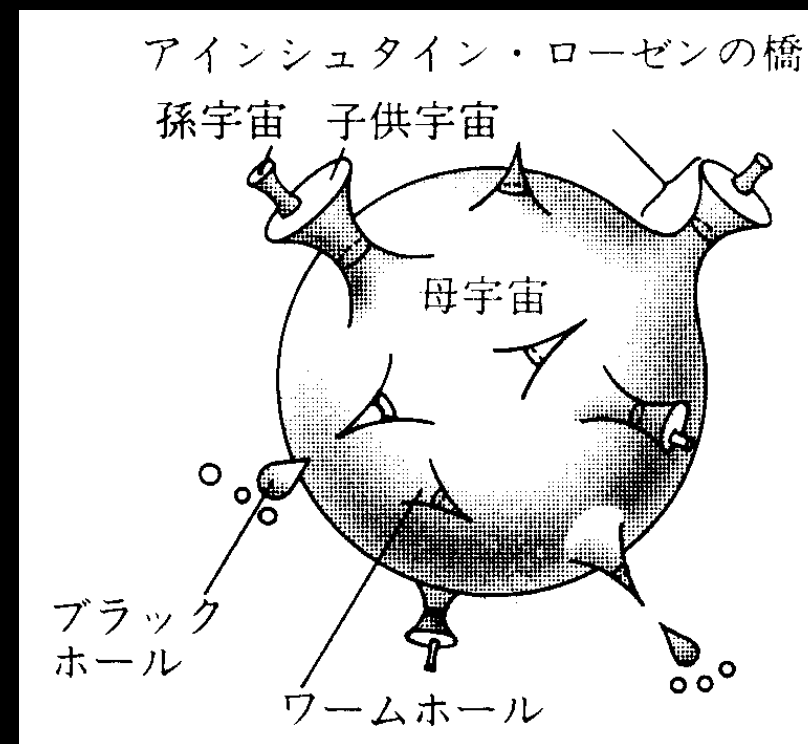
- 確かにこの宇宙で自分だけがゆらぎから生まれたボルツマン脳である可能性はほぼ否定できるだろう
  - 自分の記憶と周りの世界との因果的整合性を確認すればよい
- しかしその周りの世界もまた一挙にゆらぎから生まれて歴史を共有してきたとすれば、互いの因果的整合性は保たれているはず
  - 地球は今から46億年前に突如ゆらぎから誕生したボルツマン地球かも？それが納得できなければ、ボルツマン太陽系、ボルツマン銀河...
  - 国民大衆は(中略)心情の単純な愚鈍さからして、小さな嘘よりも大きな嘘の犠牲となり易いからである。というのは、かれら自身、もちろんしばしば小さな嘘をつくのだが、しかし大きな嘘をつくのはあまりにも気恥ずかしくも感じてしまうからである — アドルフ・ヒトラー『わが闘争』

# ボルツマン宇宙と宇宙の多重発生

- とすれば、論理的にもっとも整合性がとれているのは、観測できる範囲の宇宙そのものが、より大きな宇宙(マルチバース)の中のゆらぎから生まれたボルツマン宇宙である可能性

- これこそが1895年のBoltzmannの論文の本質？
- *But can we imagine, on the other side, how small a part of the whole universe this world is? Assuming that the universe great enough, the probability that such a small part of it as our world should be in its present state, is no longer small.*

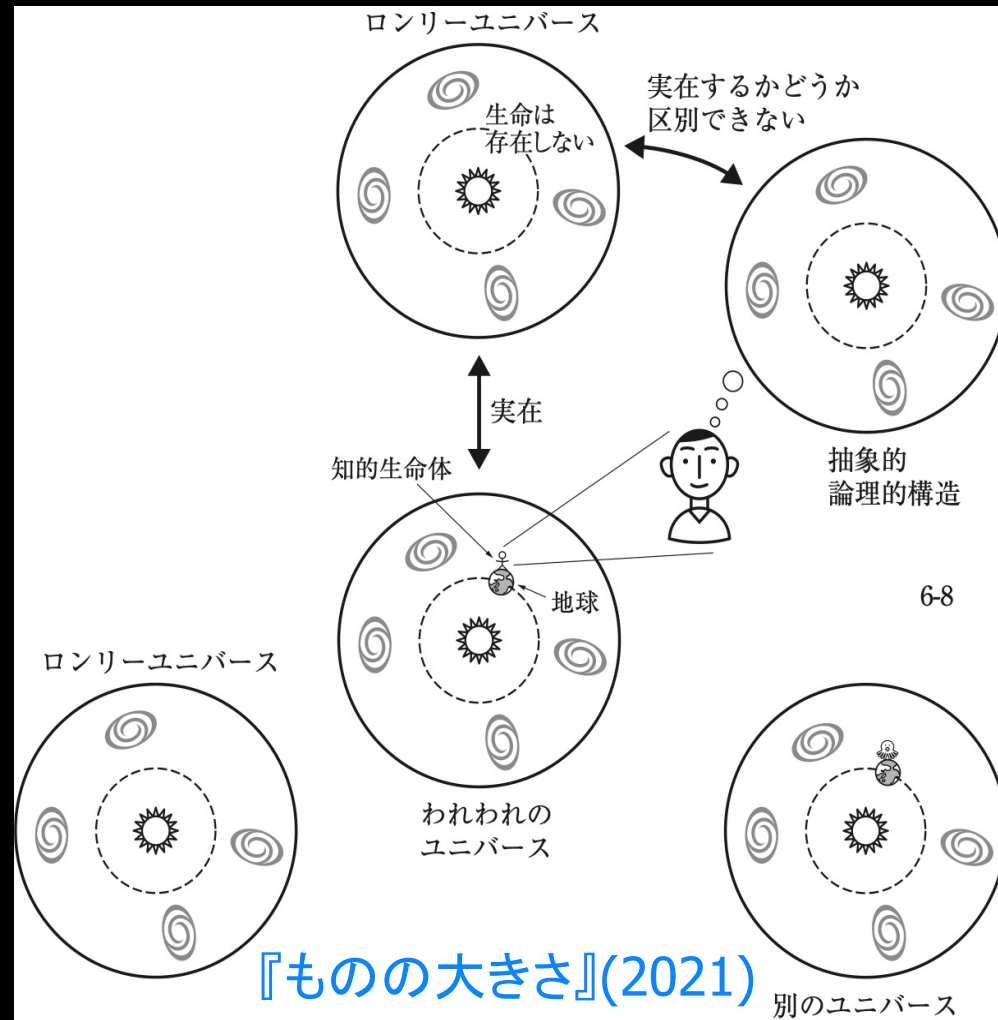
- この思想を、インフレーション宇宙論の枠内で具体的に提案してみせたのが佐藤勝彦たちの論文



K.Sato, H.Kodama,  
K.Maeda & M.Sasaki,  
Phys.Lett.B108  
(1982) 103

# Lonely World/Universe

- 遠い将来、この宇宙では物質からなる秩序と構造がすべて消滅する(そこには宇宙の存在を認識できる意識も存在しない)
- そのような宇宙を「実在」と呼べるのか？もしそれを認めるならば、純粹に数学的に無矛盾な抽象的論理構造もあまねく実在と解釈すべきでは(レベル4マルチバース)？
- あるいは、そのどこかに一時的にボルツマン脳が生まれ、宇宙の存在を確認してくれるのかも？
- われわれの宇宙も、そのようなレベル4マルチバース内のボルツマン宇宙の例かも？



# 5 まとめ

# “On Certain Questions of the Theory of Gases”

We assume that the whole universe is, and rests for ever, in thermal equilibrium. The probability that one (only one) part of the universe is in a certain state, is the smaller the further this state is from thermal equilibrium; but this probability is greater, the greater is the universe itself. If we assume the universe great enough, we can make the probability of one relatively small part being in any given state (however far from the state of thermal equilibrium), as great as we please. We can also make the probability great that, though the whole universe is in thermal equilibrium, our world is in its present state. It may be said that the world is so far from thermal equilibrium that we cannot imagine the improbability of such a state. But can we imagine, on the other side, how small a part of the whole universe this world is? Assuming the universe great enough, the probability that such a small part of it as our world should be in its present state, is no longer small.

# 物理法則に反しない事象は必然的に実現する

- 閉じた系におけるエントロピー増大の法則と、そのなかで局所的にエントロピーの低い秩序構造ができることとは矛盾しない
- その確率はとてつもなく小さいものの、それ以上にとてつもなく大きな時間と空間スケールを考えると、それが実現する期待値は確実に1を上回る
- ほぼ熱的進化を終えた将来の宇宙に、ゆらぎからボルツマン脳が生まれる可能性は0ではない
- 我々が住む「宇宙」は、かつてそのような状況でゆらぎから生まれたボルツマン宇宙なのかもしれない

*Everything not forbidden by the laws of nature is mandatory*  
— Carl Sagan, *Contact*



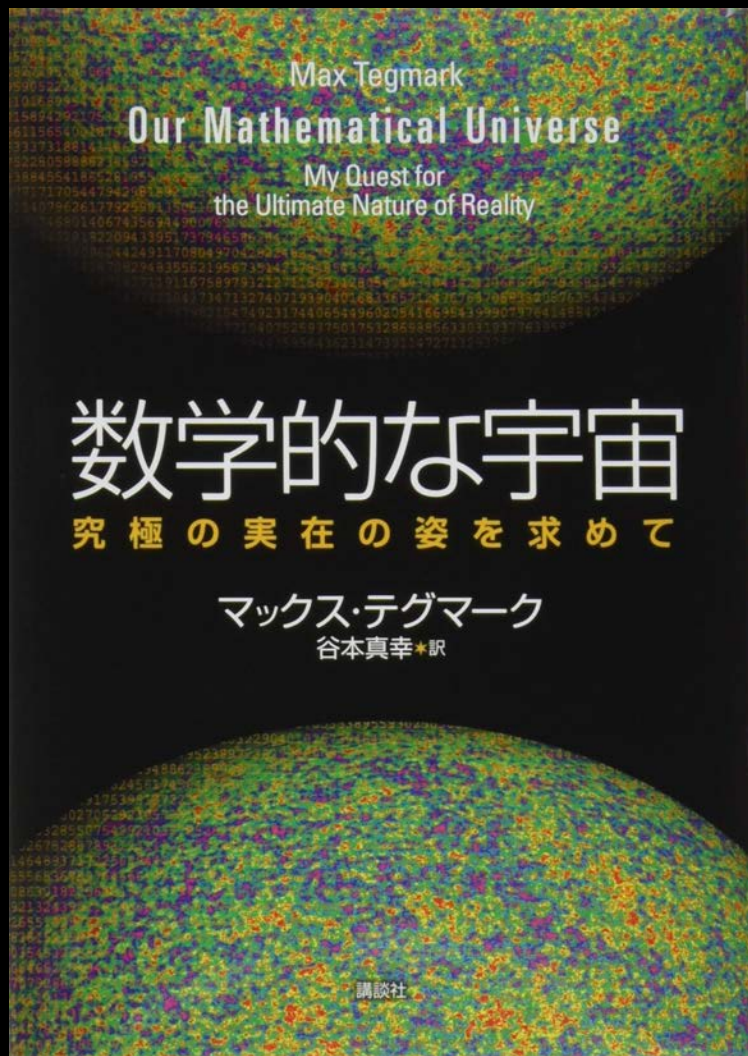
# 参考文献

Sean M. Carroll

“Why Boltzmann Brains are Bad” arXiv:1702.00850



講談社ブルーバックス 2019年



講談社 2016年



東京大学出版会  
初版 2006年 第2版 2021年