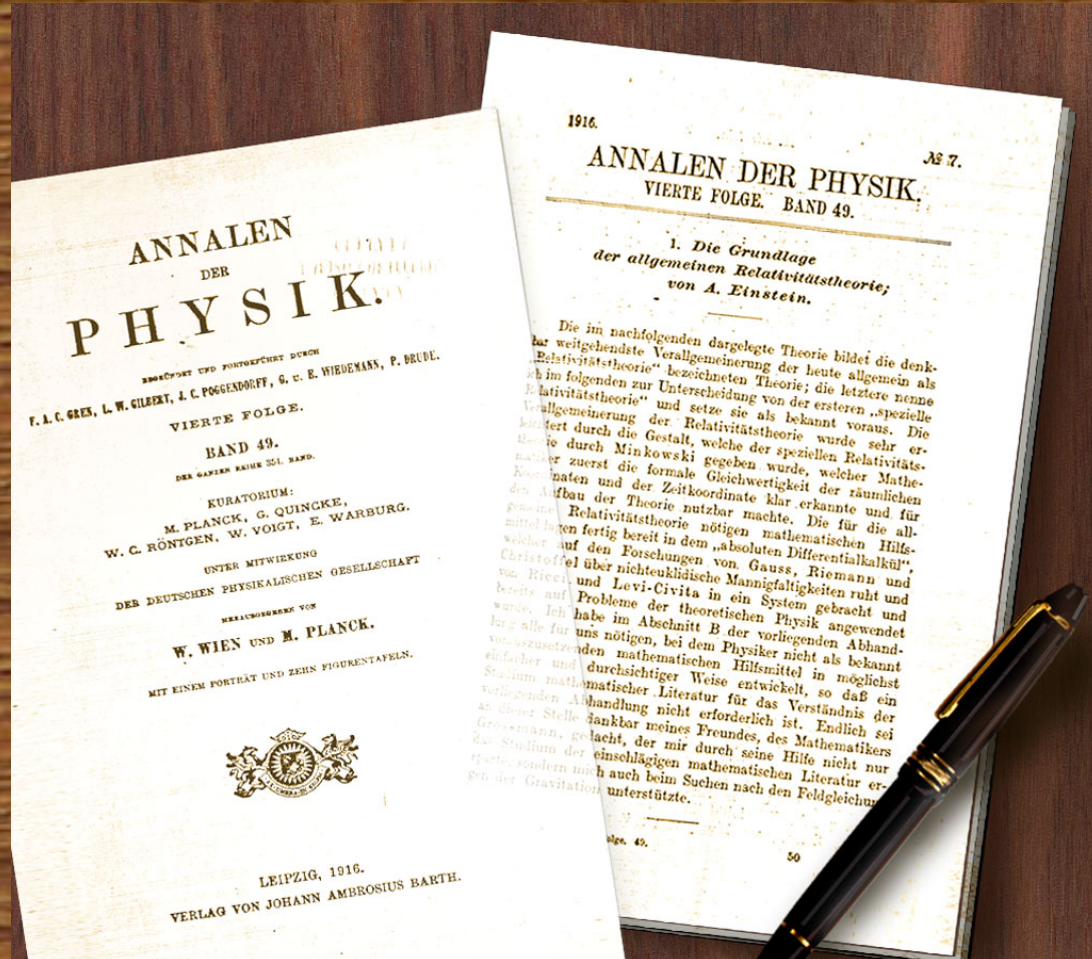
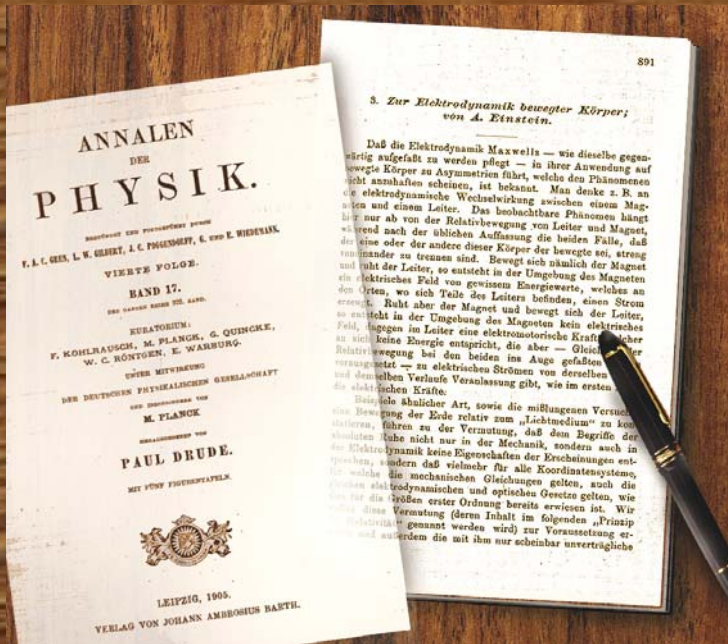


一般相対論の心

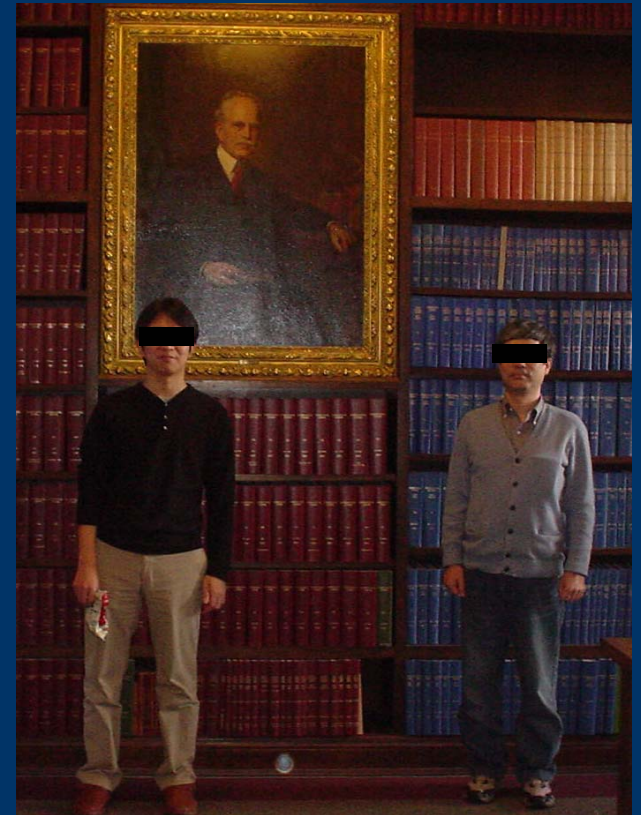
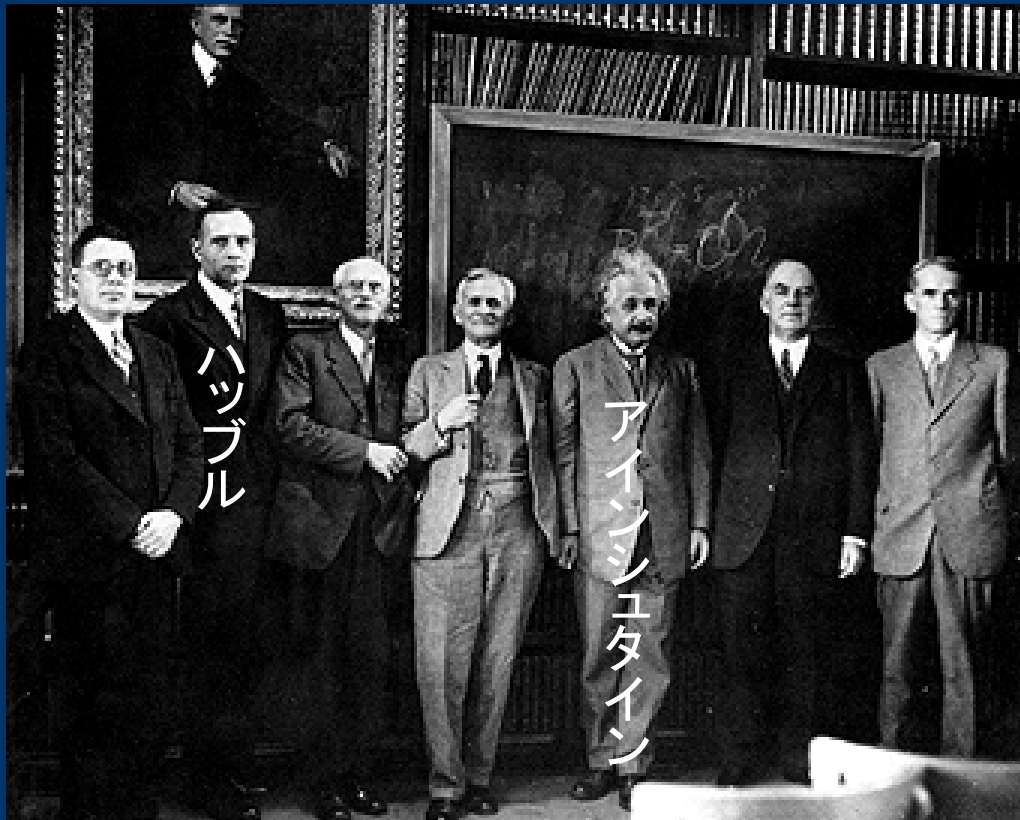


東京大学 理学部
一般相対論講義 第13回
2006年7月11日
須藤 靖

目次

- 一般相対論講義のまとめ
- 一般相対論をめぐるいくつかのトピックの補足
 - 白色矮星・中性子星
 - 重力レンズ
 - 暗黒エネルギー
 - 重力波
- Things that I would encourage you to check by next Tuesday (i.e., final exam. day)

一般相対論講義の まとめ



一般相対論の心

- ミクロの世界を記述する量子力学とならんで、現代物理学におけるもっとも重要な枠組み
 - 単にある現象を説明するモデルといった程度のレベルではなく、
 - 重力とは何か
 - 対称性・保存則とは何か
 - 自然法則とは何か
 - それを記述する表現方法とは何か
- など自然界に対する認識を改めさせてくれる

一般相対論の根底にある指導原理

■ 一般相対性原理

- どんな座標系でも物理法則は同じ方程式
 - 物理法則の共変性
- 一般座標変換に対する不変性
 - そもそも座標系とは、便宜上導入した2次的なものに過ぎず本来はそれを必要としない
- 物理学の幾何学化

■ 等価原理

- 重力と加速度は局所的には区別できない
- 重力の特殊性
- 重力は力か？

アインシュタイン方程式

- 一般相対論および宇宙論の基礎方程式
- 物理学におけるもっとも美しい方程式の一つ
- 両辺にアインシュタインの思想と叡智が満ちている

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$R_{\mu\nu}$: リッチテンソル (時空の曲がり具合を決める)

R : スカラー曲率 (時空の曲がり具合を決める)

$g_{\mu\nu}$: 計量テンソル (時空の性質を決める)

$T_{\mu\nu}$: エネルギー運動量テンソル (物質場の性質を決める)

Λ : アインシュタインの宇宙定数 (実効的に万有斥力を及ぼす)

G : ニュートンの万有引力定数、 c : 光速

μ と ν は0,1,2,3のどれかの値をとる添え字

アインシュタイン方程式の心

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

- 左辺は時空の幾何学で決まる量だけからなる
- 右辺はその時空に存在する物質の性質を表す
- したがって、「標語的」には

時空 = 物質



THE EINSTEIN FIELD EQUATION
 $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$

という関係を具体的に表現したものと言える

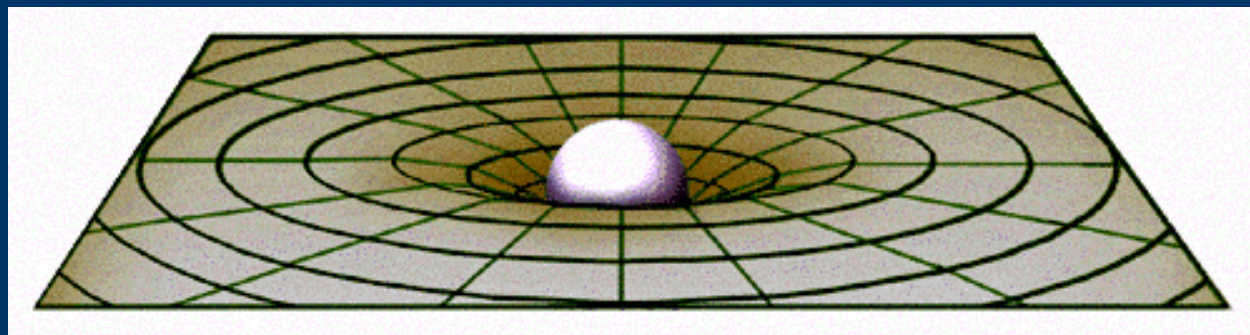
- 実際には
 - 時空の幾何学 → (物質の運動) → 物質分布
 - 時空の幾何学 ← (重力場) ← 物質分布

という関係を通じてアインシュタイン方程式を満たすような時空の幾何学と物質分布の解が同時に決定される

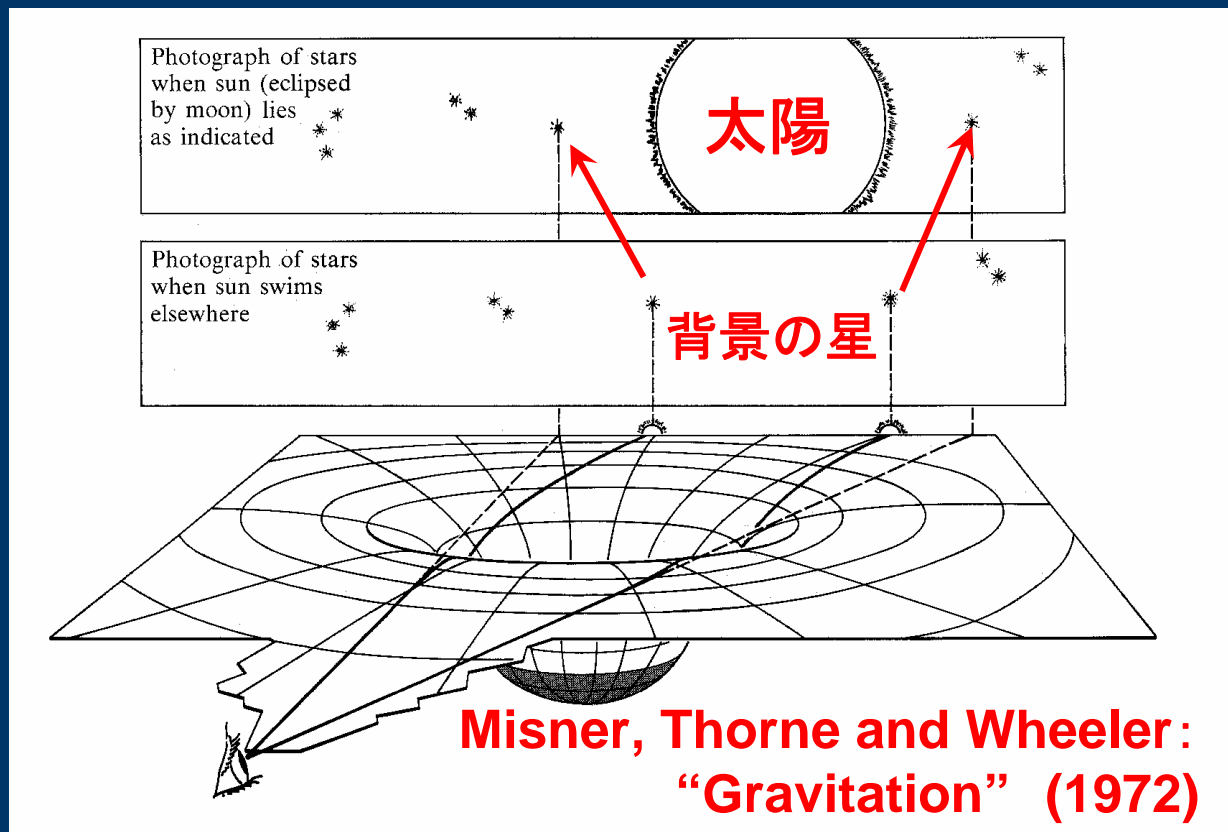
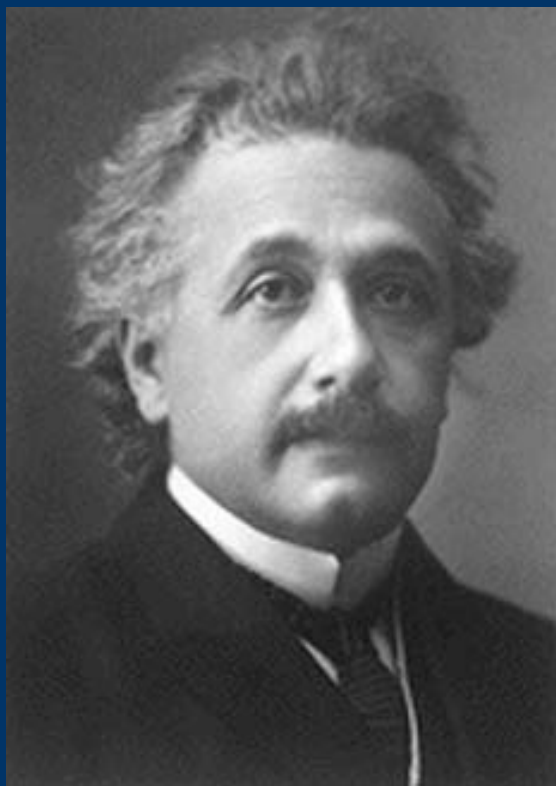
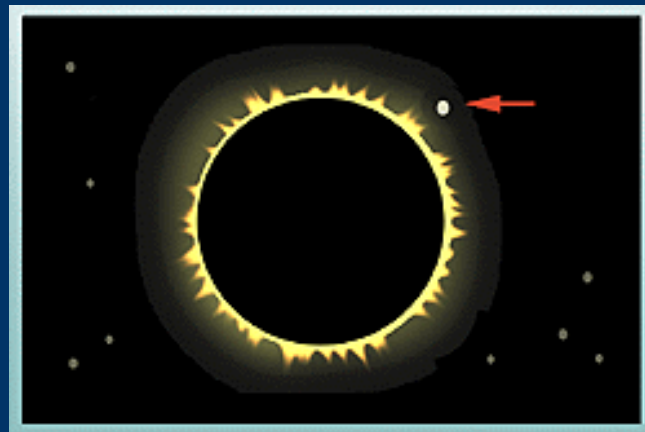
重力＝時空の曲がり

THE EINSTEIN FIELD EQUATION

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

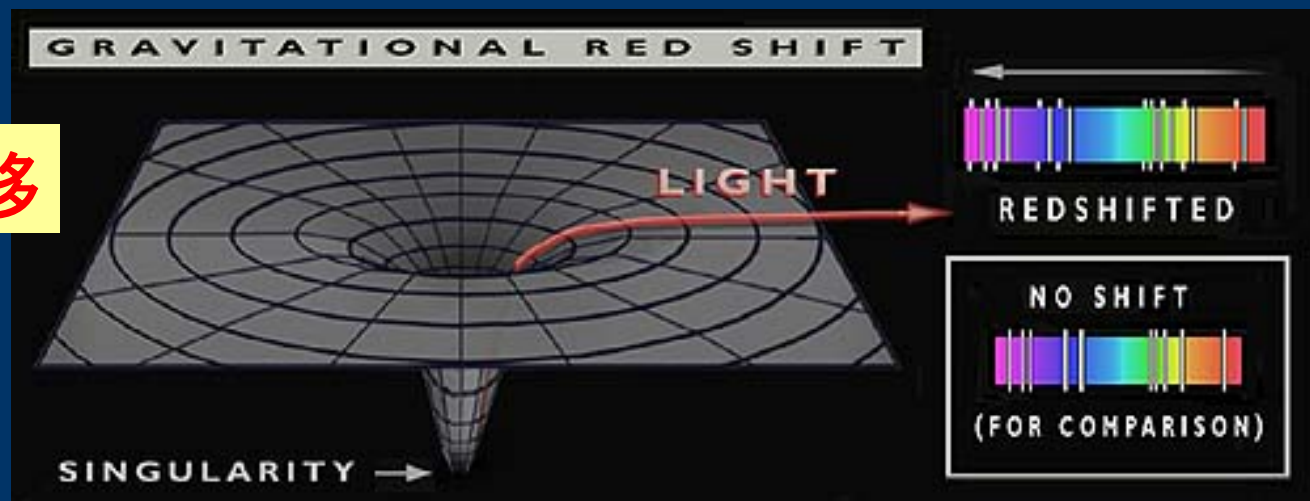


重力による時空の 曲がり

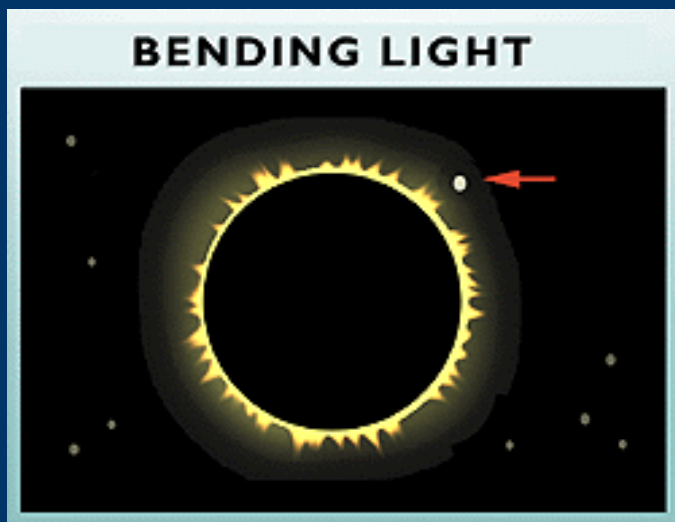


一般相対論の検証

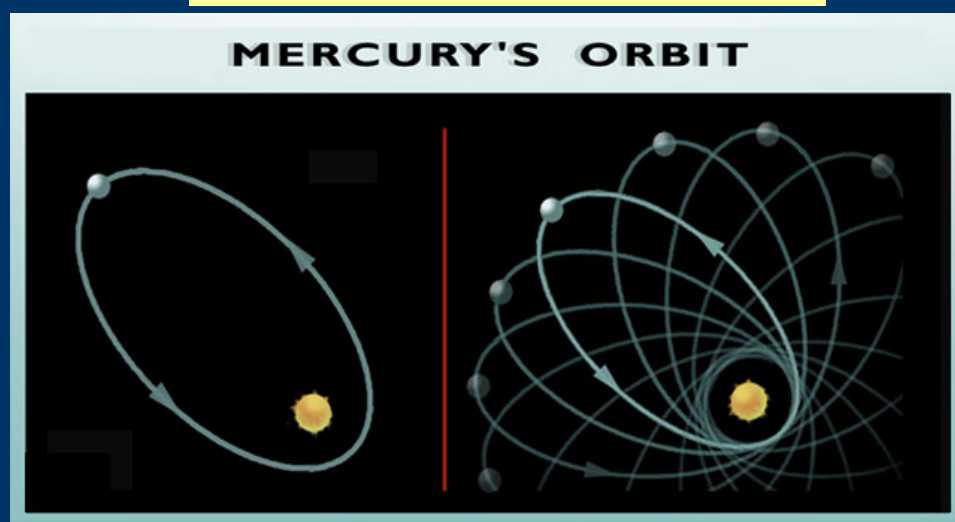
重力赤方偏移



太陽の周りの光線の湾曲



水星の近日点移動

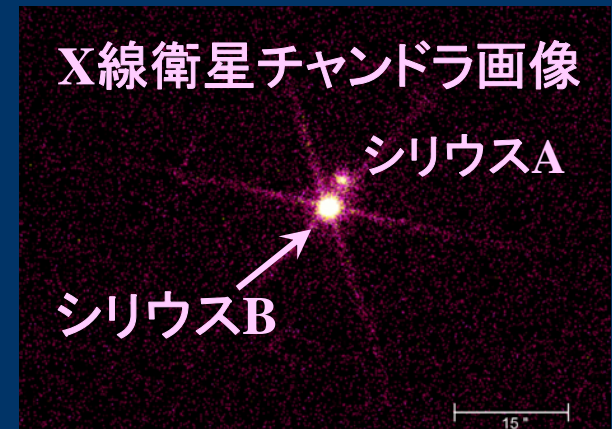


白色矮星・中性子星



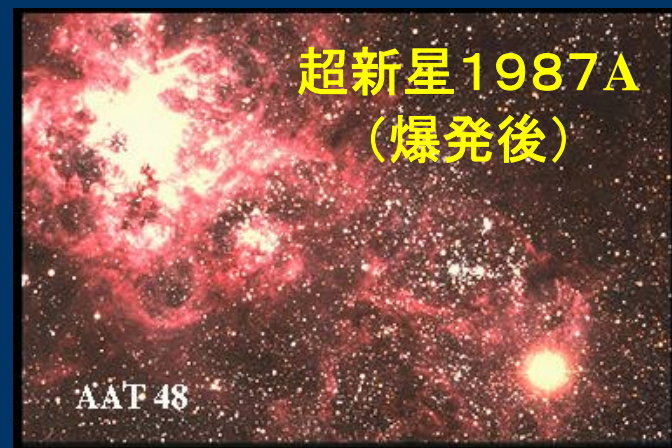
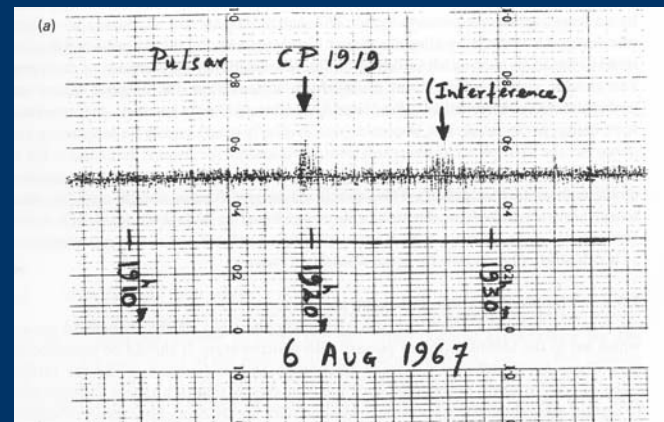
白色矮星

- 1915年 ウォルター・アダムスは、シリウスBが、太陽ほどの質量を持ちながら天王星以下の半径でしかない奇妙な星であることを発見
 - 最初に発見された白色矮星(フェルミディラック統計は1926年、チャンドラセカール質量は1931年)
 - 1.06太陽質量、半径1.1万km、有効温度1.5万度
 - 主星シリウスAは全天で一番明るい星:約50年周期の実視連星
- 現在までに、数百個の白色矮星が発見されている



超新星爆発と中性子星

- 8~30太陽質量の恒星は、進化の最終段階で超新星爆発を起こし、その結果、中性子星が誕生すると考えられている
 - 1932年 Chadwick: 中性子の発見
 - 1932年 Landau (+Bohr): 中性子星の可能性を議論
 - 1934年 Baade & Zwicky: 中性子星のアイデア+中性子星が超新星で誕生するとまで予言
 - 1939年 Oppenheimer & Volkoff: 中性子星の構造モデル
 - 1967年 Hewish & Bell: パルサーの発見
 - 1968年 Gold: パルサー=高速自転中性子星

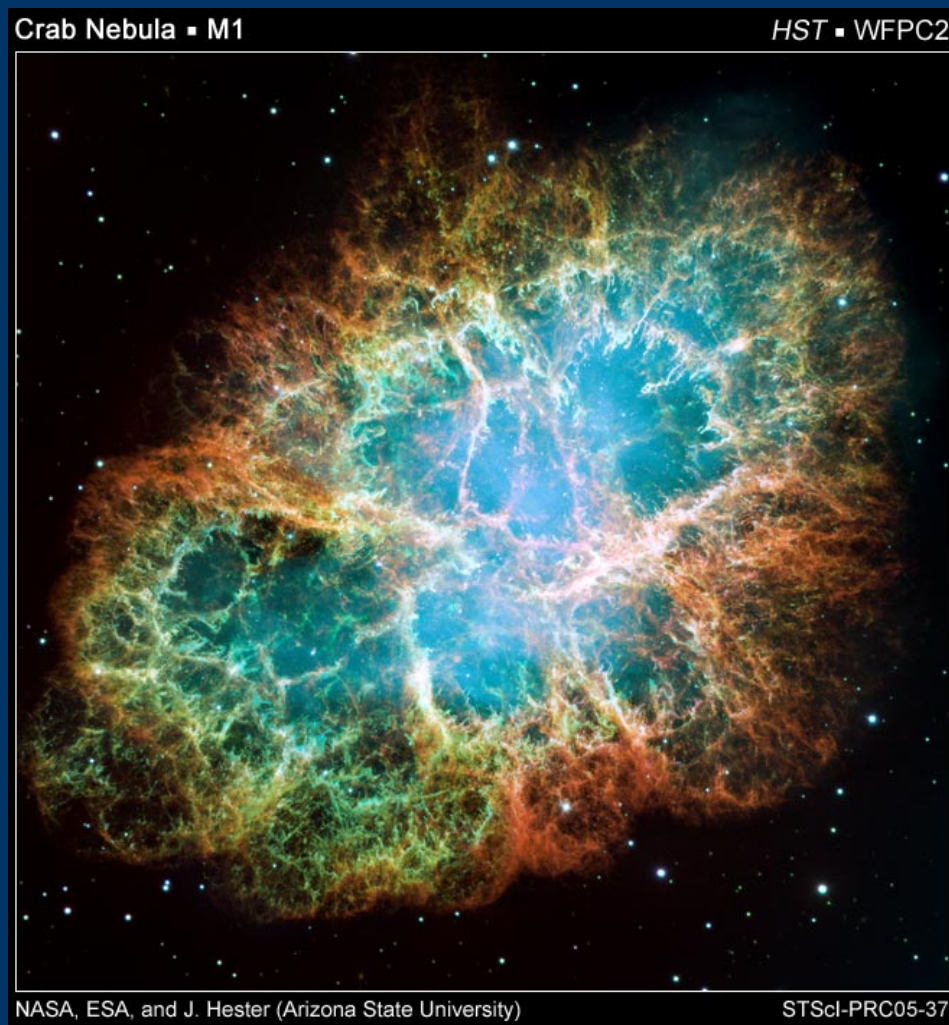
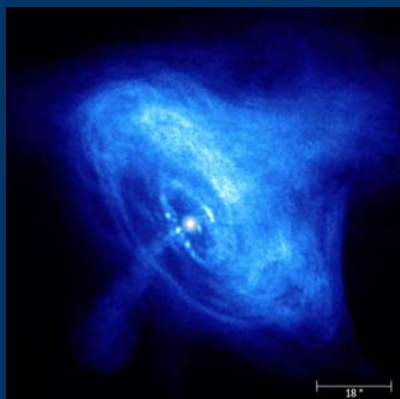


パルサー＝(超新星残骸中の)中性子星

■ かにパルサー@おうし座



X線観測衛星
チャンドラによる
X線イメージ



孤立した中性子星

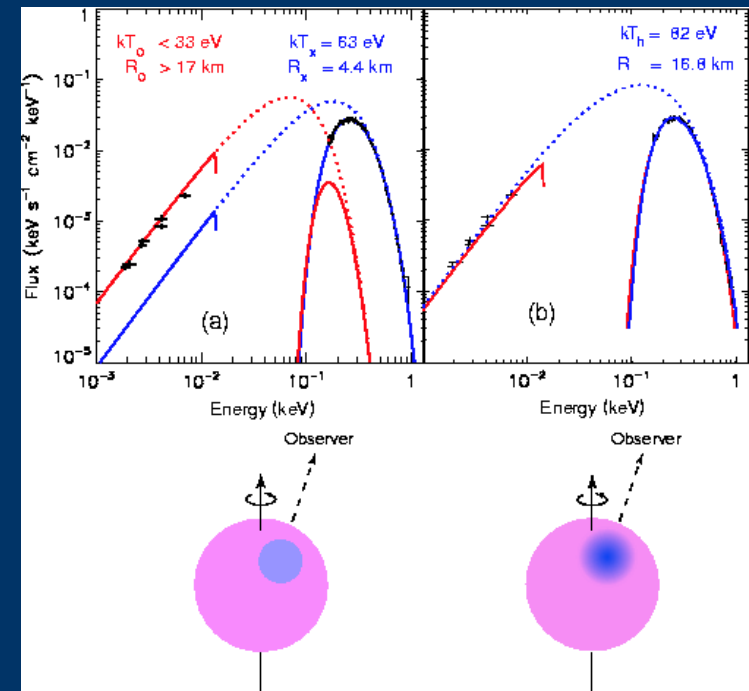
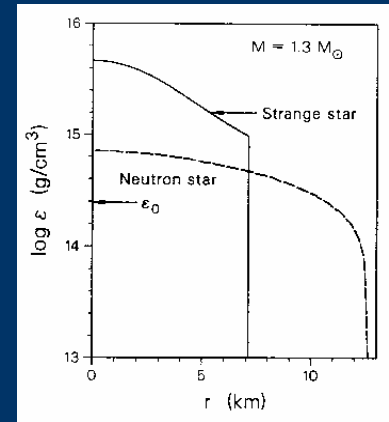
X線観測衛星チャンドラ
によるX線イメージ

■ RX J1856.35-3754

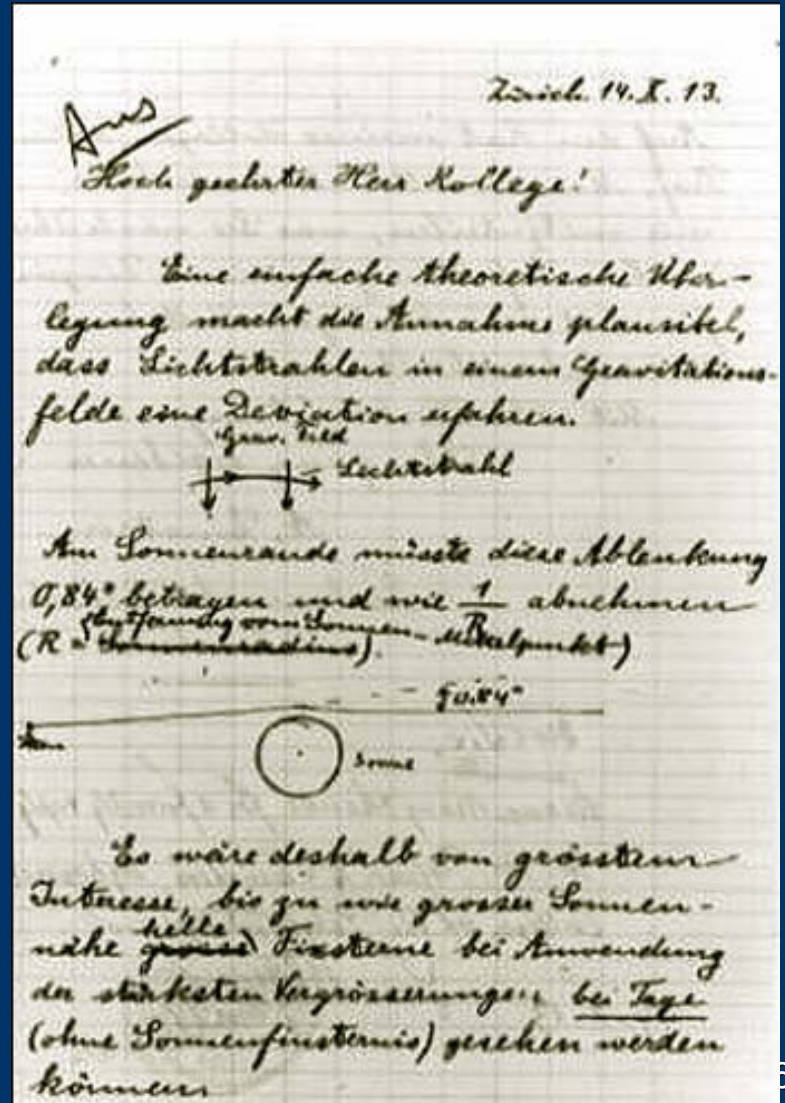
- 距離が分かっている
- 表面からX線放射が観測されている
- 放射強度から半径がわかる
(ステファンボルツマンの式)
- スペクトルから温度がわかる

■ 高密度物質の状態方程式が 検証できる

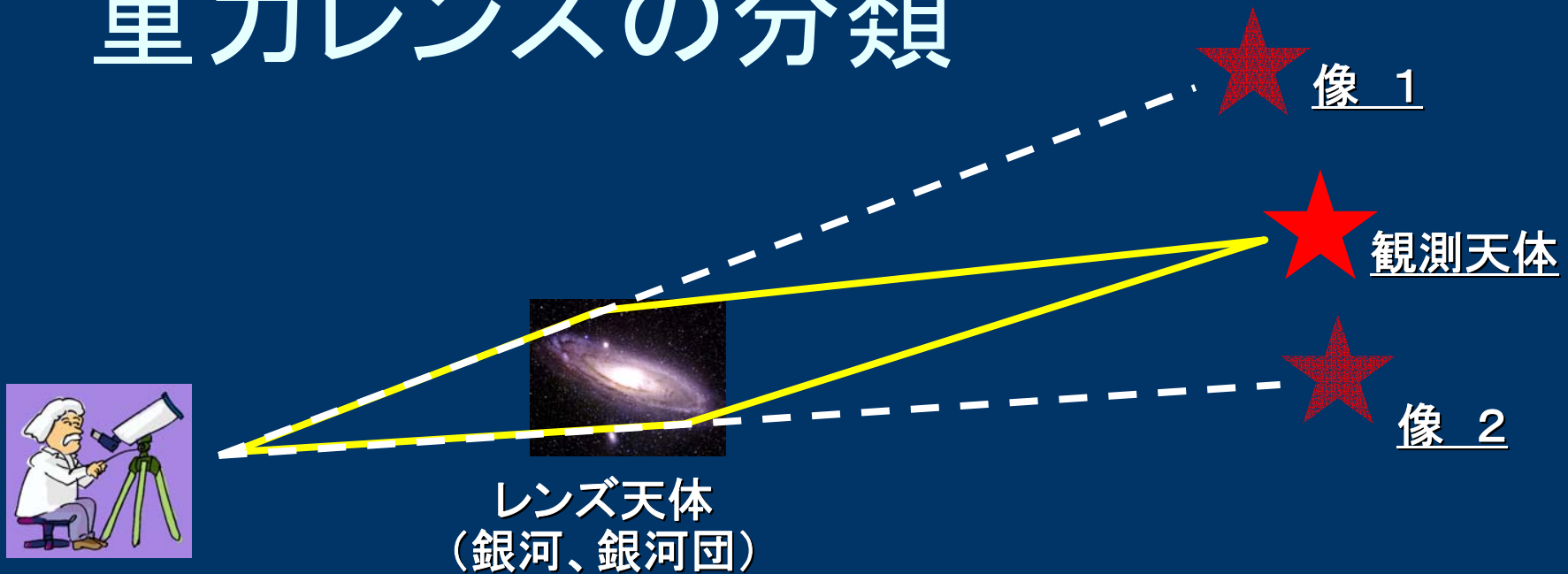
- 通常モデルでは説明できないほど小さい(半径4-8km)とされ、クォーク星である可能性が検討されたが今では問題ないと考えられている。



重カレンズ

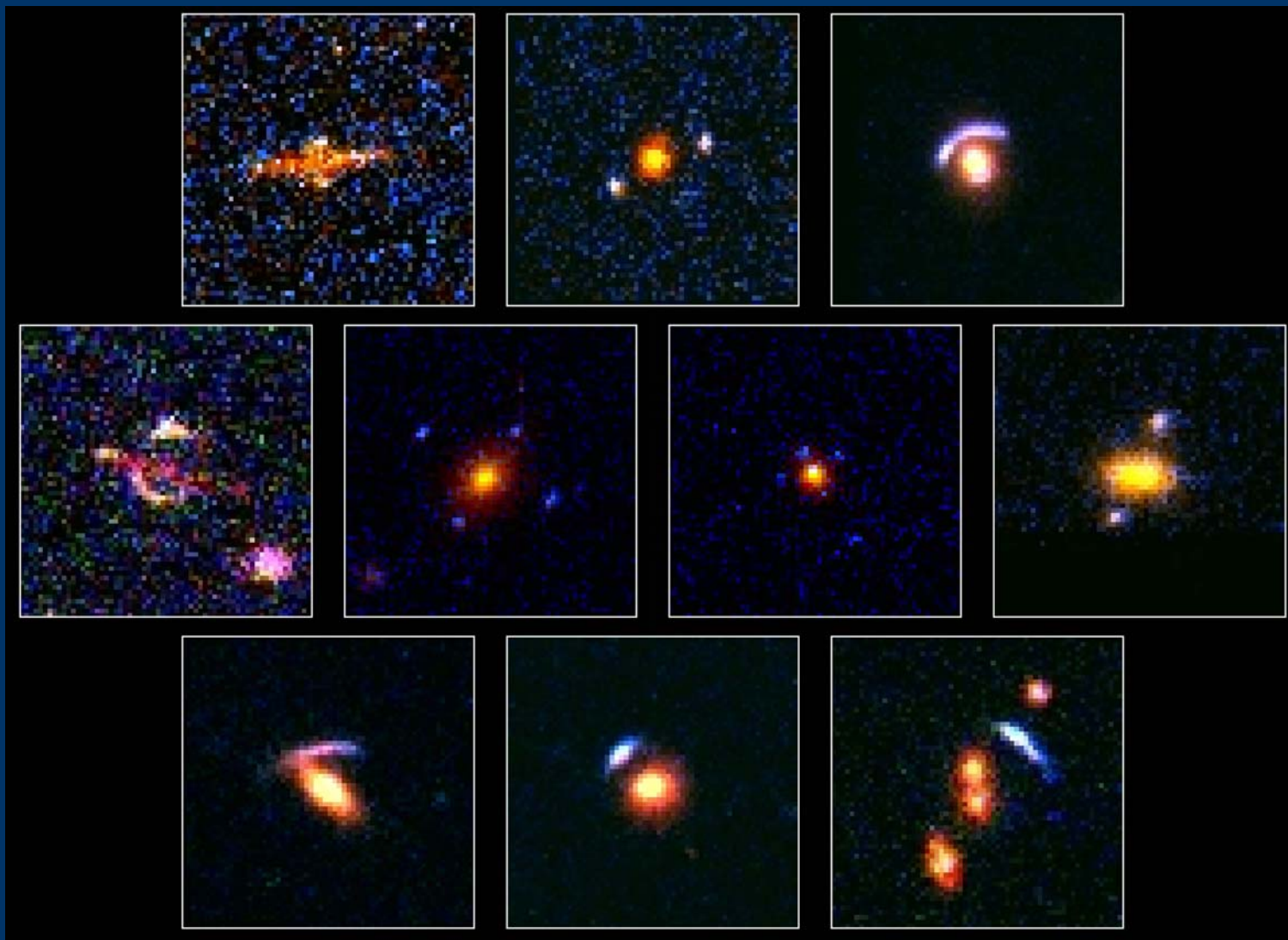


重力レンズの分類



- 光線は重力場によって曲げられる
 - 天体が多重像をつくる(強い重力レンズ)
 - 天体の形状が変形を受ける(弱い重力レンズ)
 - 天体の見かけの明るさが増光する(マイクロレンズ)

HSTによる強い重カレンズ像

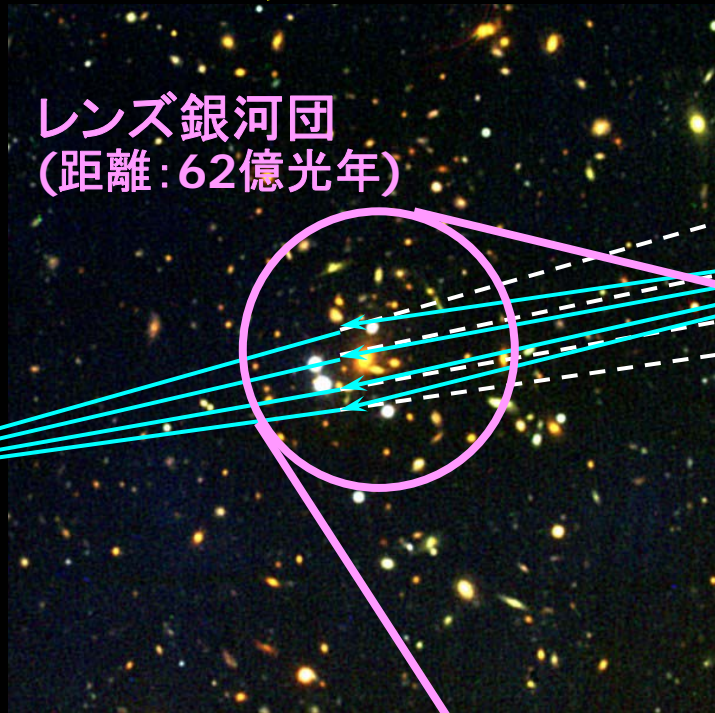


すばるが見た最大のクエーサー重力レンズ

すばる 8.2m
望遠鏡



すばる望遠鏡の画像



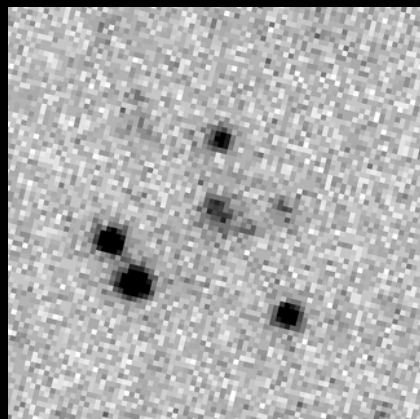
レンズ銀河団
(距離: 62億光年)

稲田、大栗ほかSDSSグループ
Nature 426 (2003) 810

クエーサー
SDSS J1004
(98億光年)

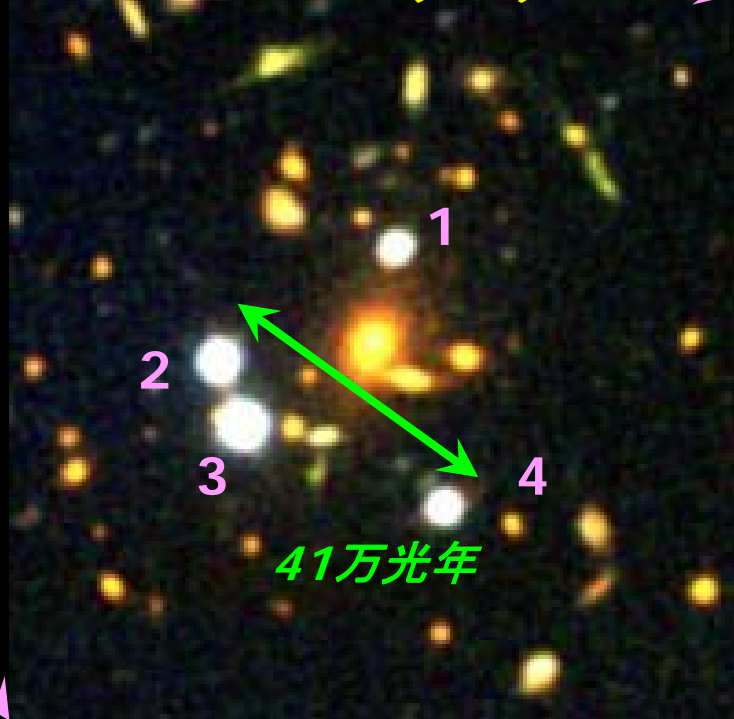


SDSS専用
2.5m望遠鏡



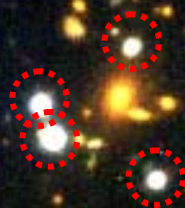
SDSSの画像

すばる望遠鏡の画像(拡大)



41万光年

100億光年先からの一般相対論的蟹気楼 (SDSS J1004+4112)



2003年に東京大学の稲田直久と大栗真宗がSDSSで発見、すばるで確認
Inada et al. Nature 426(2003)810

98億光年先にある
クエーサー

銀河団の重力を受けてクエーサーからの光線が曲げられてみかけ上5つの異なる天体として観測される

62億光年先にある
銀河団

重力レンズ天体
SDSS J1004+4112 :
一般相対論的蜃気楼



*The red crescents represent lensing arcs —
Smearred images of background galaxies.

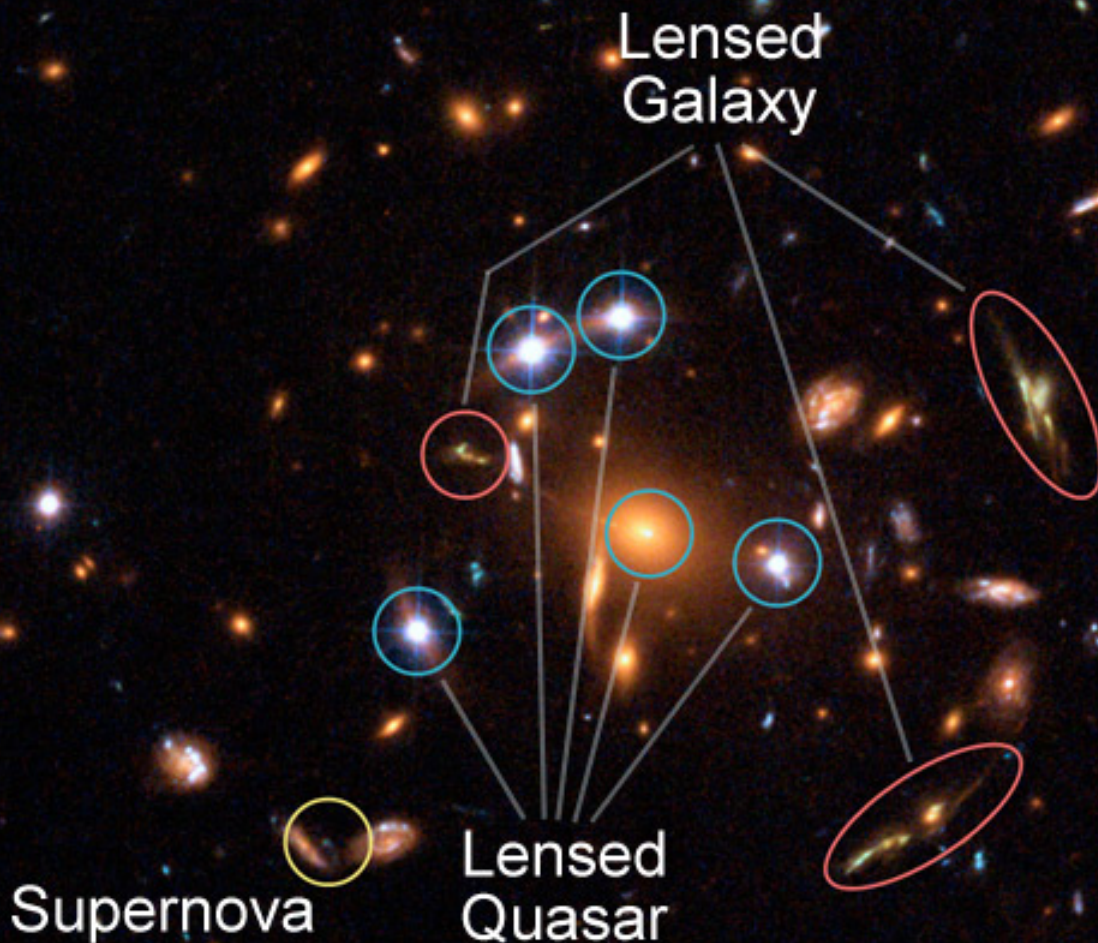
<http://hubblesite.org/newscenter/newsdesk/archive/releases/2006/23/>



Galaxy Cluster SDSS J1004+4112

HST ACS/WFC

ハッブル望遠鏡で見たSDSS J1004+4112



2006年5月23日 ハッブル望遠鏡 写真公開

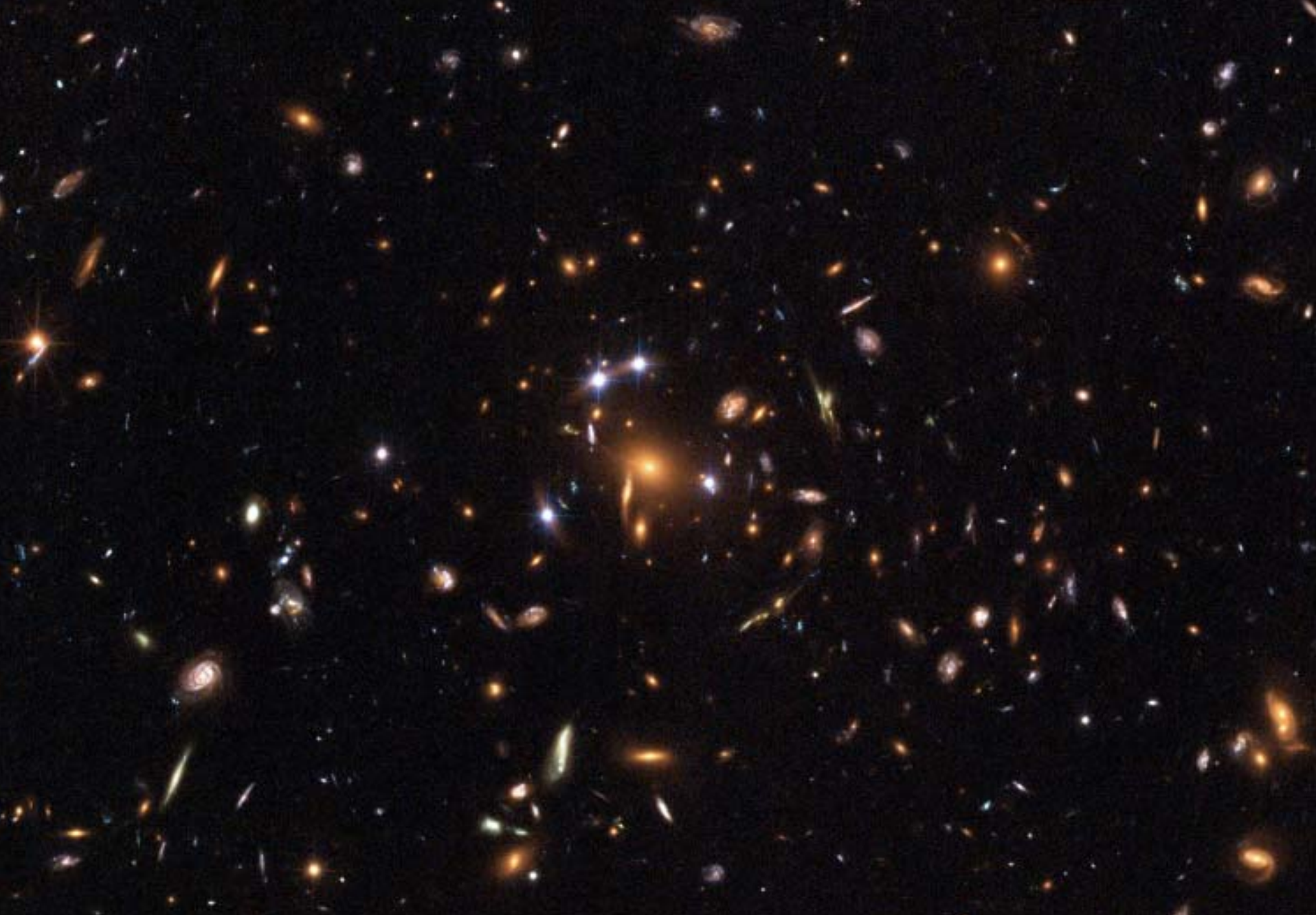
<http://hubblesite.org/newscenter/newsdesk/archive/releases/2006/23/>

100億年を遡る



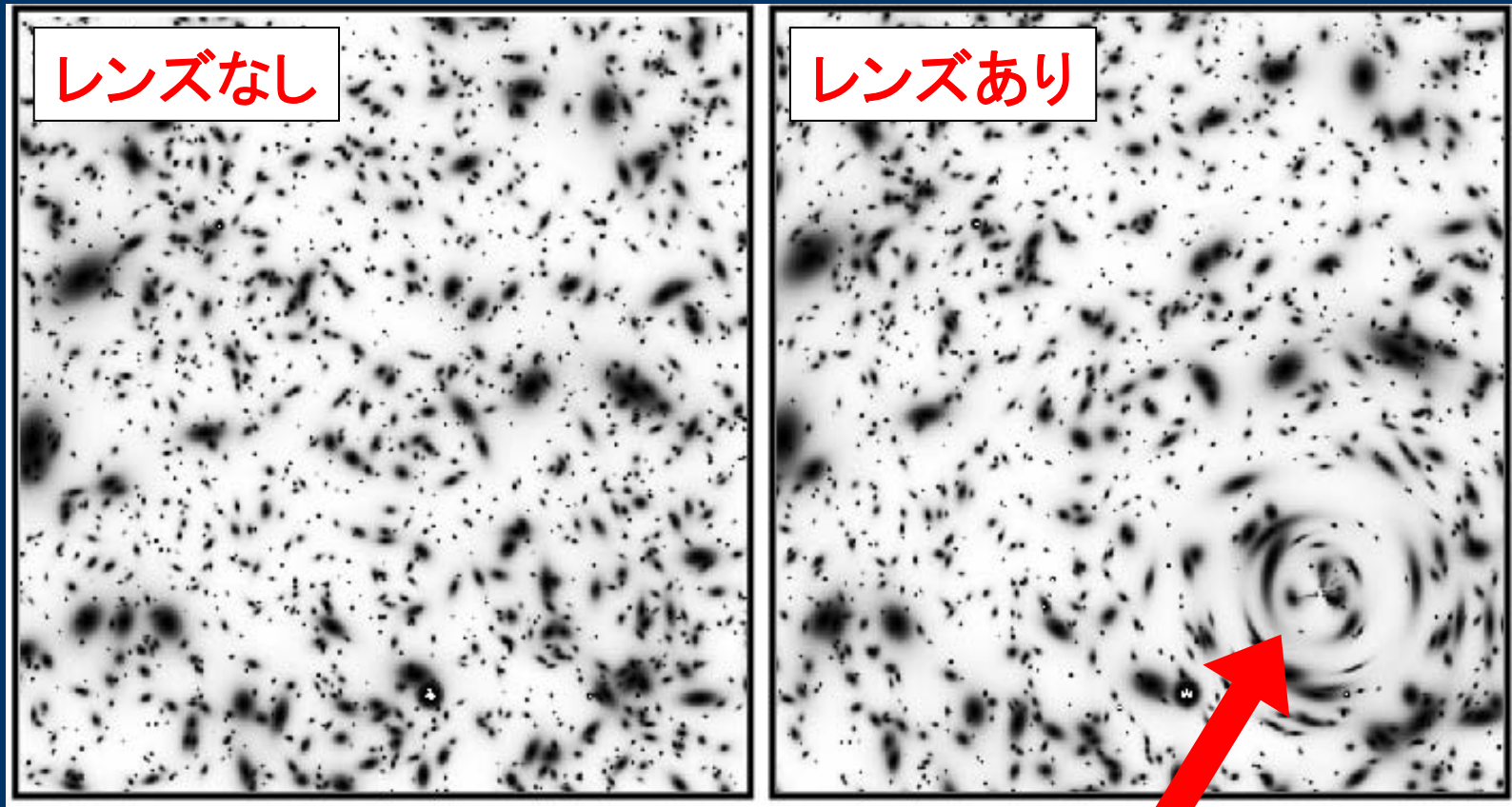
2006年5月23日 ハッブル望遠鏡 写真公開

<http://hubblesite.org/newscenter/newsdesk/archive/releases/2006/23/>



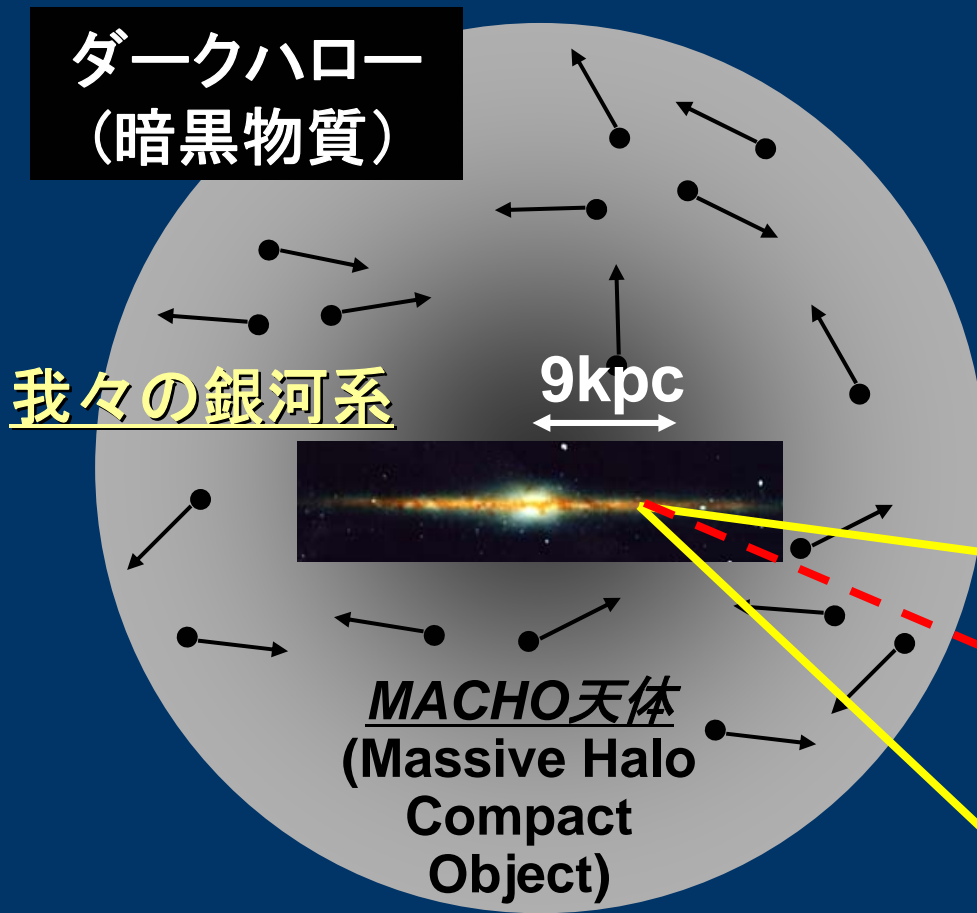
SDSS J1004+4112

弱い重力レンズ



$z=0.3$ に 10^{14} 太陽質量の重力レンズ天体がある
場合に予想されるイメージ

重カマイクロレンズによるMACHO探査

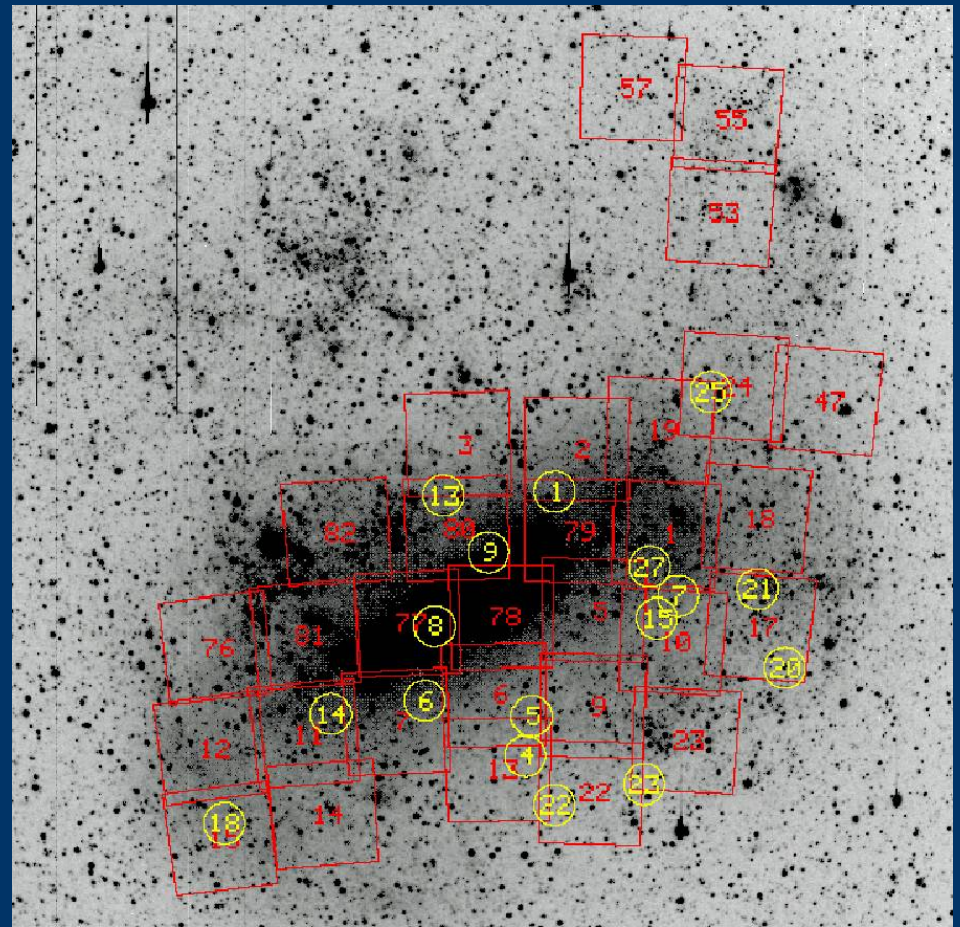
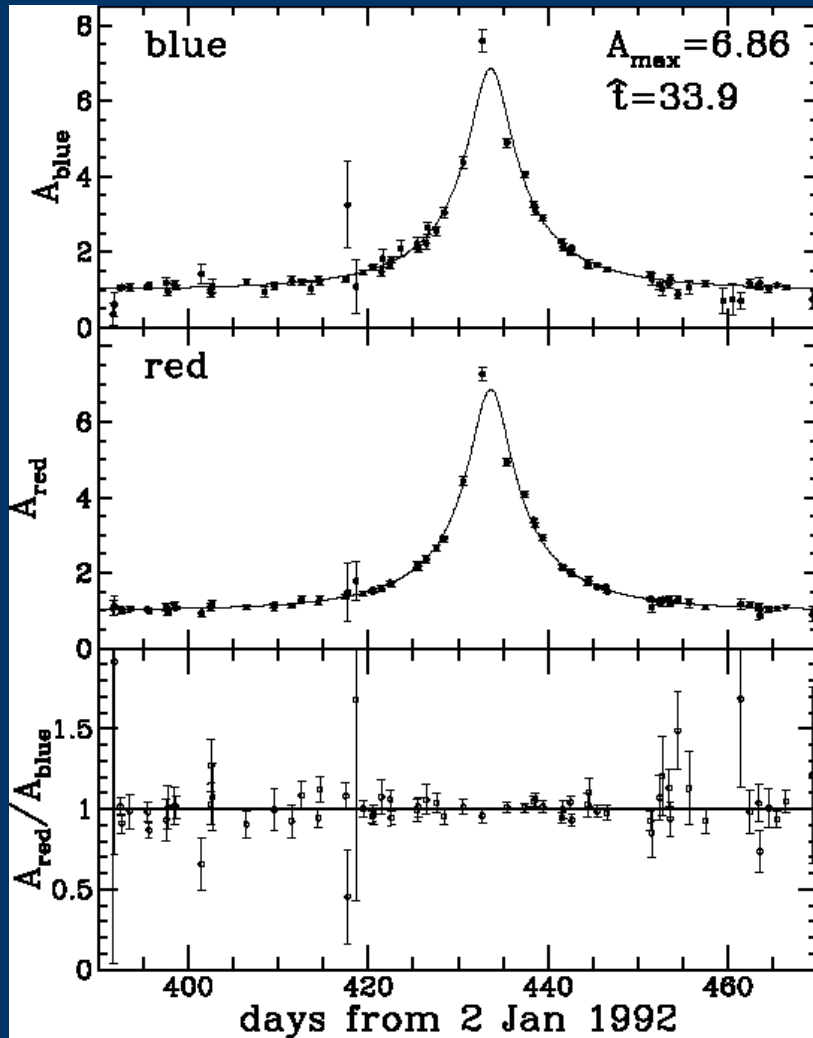


- 銀河系ハローのMACHO天体による重カマイクロレンズ現象で大マゼラン星雲の星が増光する兆候を探す

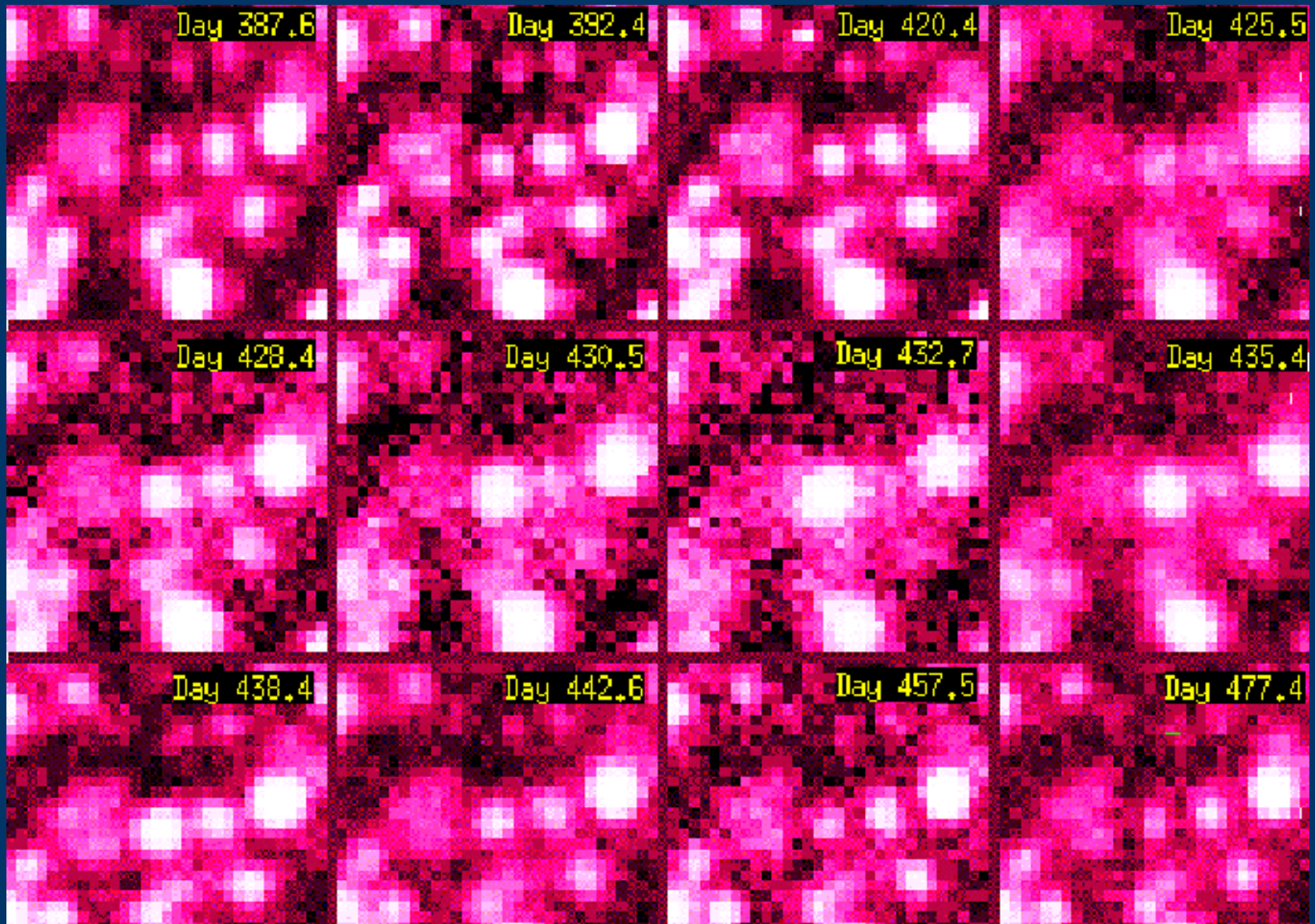
50kpc



MACHOイベントの光度曲線

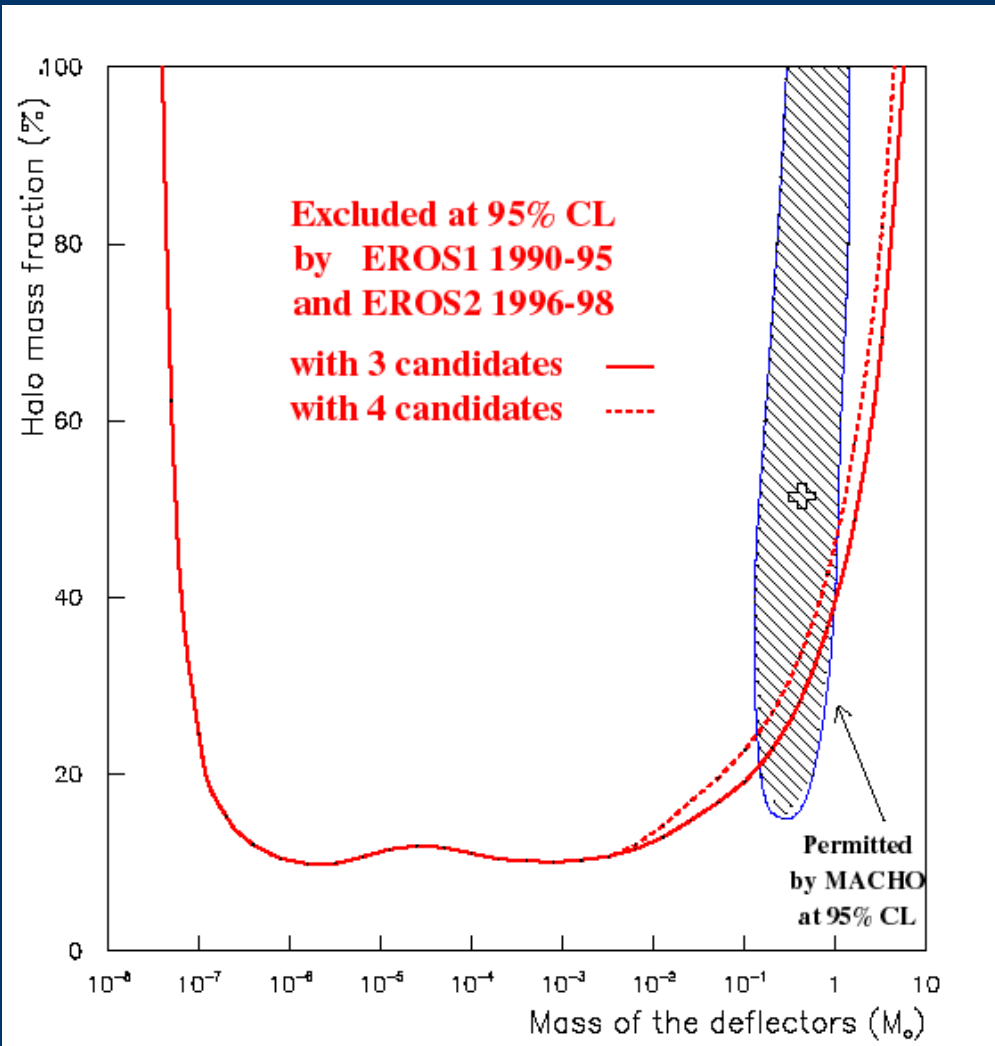


Massive Compact Halo Objectの発見



最初に発見された重カマイクロレンズ現象 (Alcock et al. 1993)

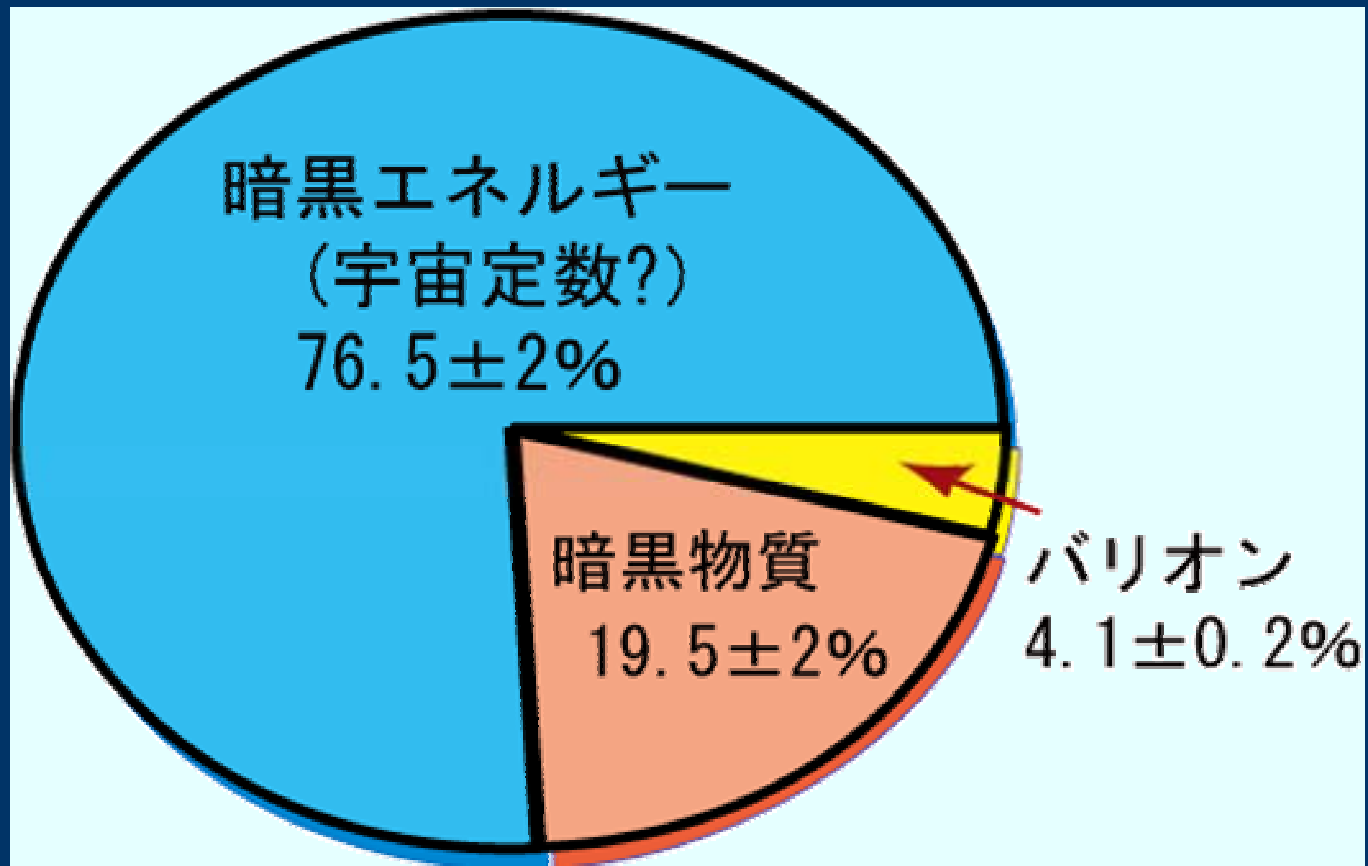
銀河系ダークマターの組成



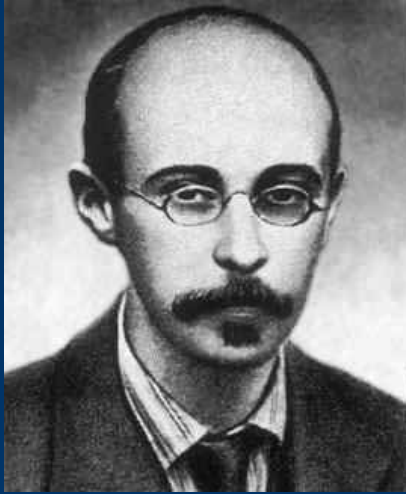
- 銀河系ハローには確かにMACHOが存在する
- 質量は太陽の0.1から1倍程度
- ハロー全体に占める質量は2割程度(つまり、それ以外のダークマターも存在する)

MACHO mass fraction
Lasserre et al. (2000):
EROS collaboration

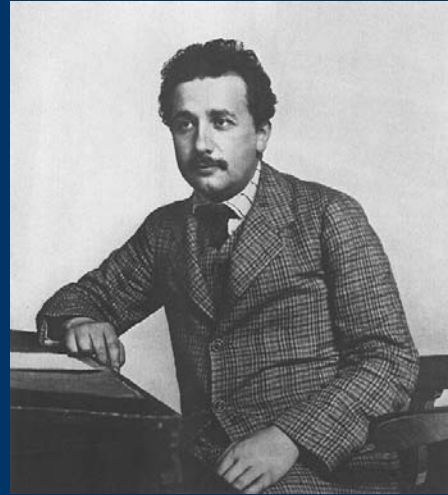
暗黒エネルギー



フリードマン方程式



Alexander Friedmann
(1888-1925)



Albert Einstein
(1879-1955)



Georges Édouard Lemaître
(1894-1966)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\text{アインシュタイン方程式})$$

宇宙の曲率 宇宙定数

フリードマン方程式

$$\underline{H^2(t)} = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \underline{\rho(t)} - \frac{K}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}$$

ハッブルパラメータ

スケールファクター

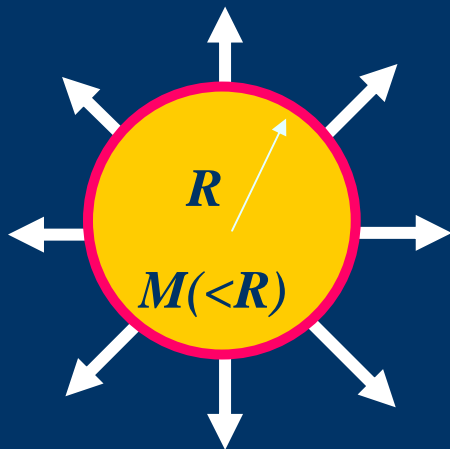
平均質量密度

膨張宇宙の運動方程式

- ニュートン力学による球殻の運動方程式

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM(<R)}{R^2} = -\frac{G}{R^2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho R^3 \right) = -\frac{4\pi G}{3} \rho R$$

- 一般相対論による宇宙膨張の方程式もほぼ同じ
 - 質量密度のみならず圧力もまた重力源となる
 - 万有斥力に対応する「宇宙項」(Λ)が存在し得る

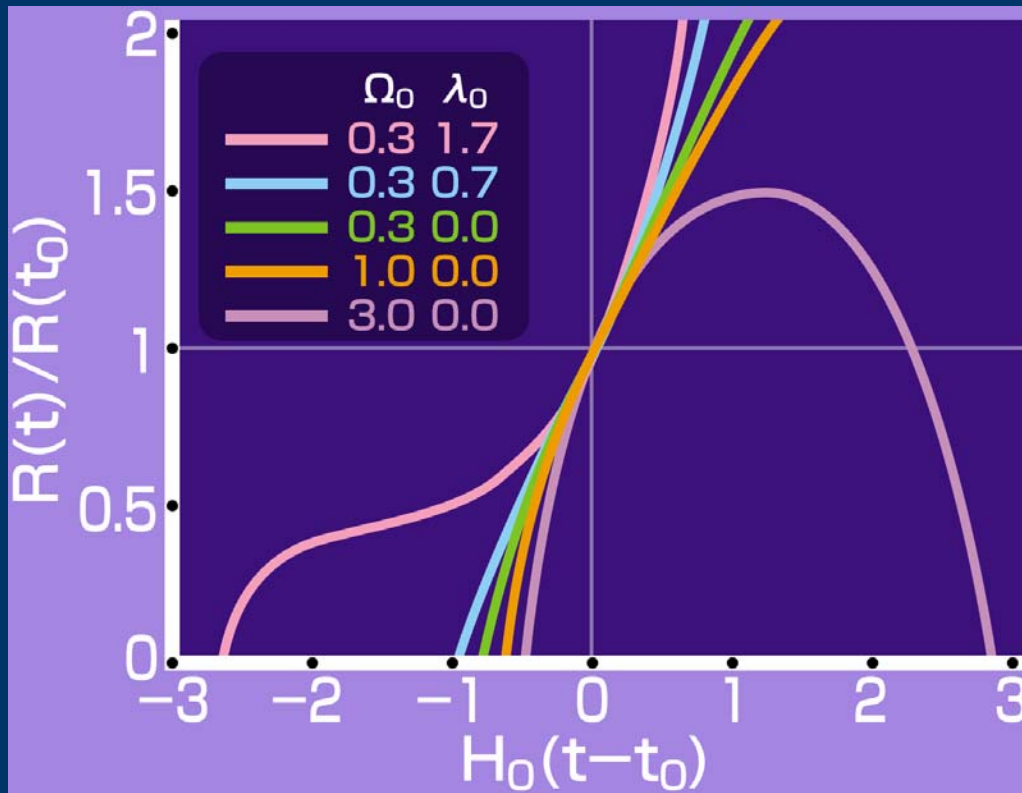


$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi G} \right) R$$

フリードマン方程式

宇宙論パラメータ

- ハッブル定数に加えて、ダークマターと宇宙定数（ダークエネルギー）の値が宇宙膨張を支配する
- 宇宙の構造とその進化の観測を通じてこれらの値が決定できる（**観測的宇宙論**）



ダークマターと宇宙定数の
量を表す無次元パラメータ

密度パラメータ

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_c}$$

宇宙定数

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$$

臨界密度 :

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 2 \times 10^{-29} h^2 \text{g/cm}^3$$

$$\Omega_m \approx 0.3, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.7$$

宇宙定数(≡ダークエネルギー)の歴史

- 1916年：一般相対論
- 1917年：アインシュタインの静的宇宙モデル
- 1980年代以降：真空のエネルギー密度

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

宇宙定数 (時空の幾何学量)
移項
物質場 (真空のエネルギー密度?)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \right)$$

- 宇宙定数の自然な大きさ：プランク密度

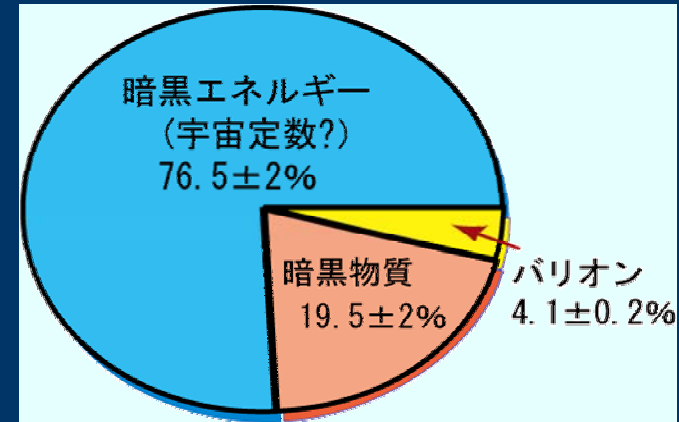
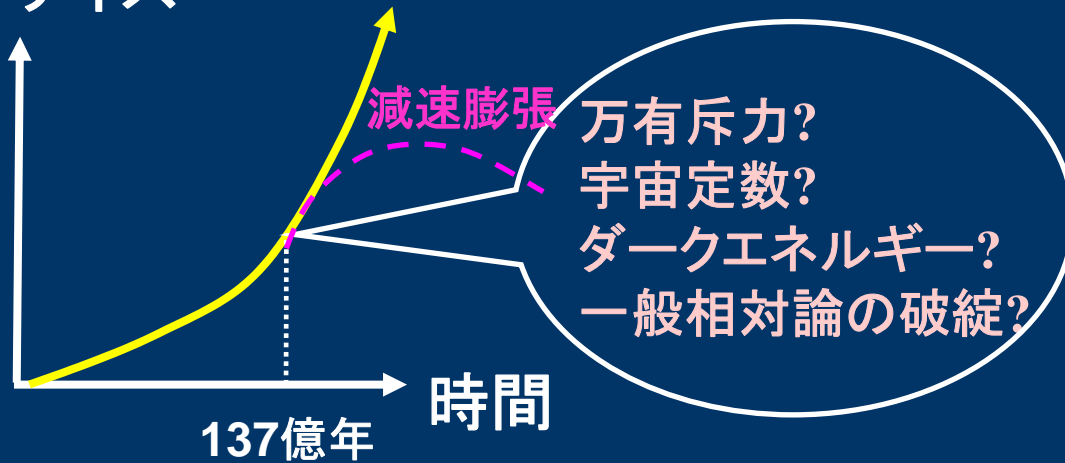
$$\Lambda = \frac{c^5}{\hbar G} \approx 5.2 \times 10^{93} \text{ g/cm}^3 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \approx 10^{121}$$

- 観測的制限： $\Omega_{\Lambda} \approx 0.7$ 物理学史上最大の理論と観測の不一致！

暗黒エネルギーとは何か

宇宙の
サイズ

宇宙の加速膨張



Science誌が選んだ
breakthrough of the year
1998年 宇宙の加速膨張
2003年 ダークエネルギー

- 宇宙の加速膨張の発見(1998年)
 - 重力は引力なので必ず減速膨張
 - 重力を打ち消すような「万有斥力」が必要
- 加速膨張の原因は何か?
 - 万有斥力を及ぼす奇妙な物質(ダークエネルギー)?
 - アインシュタインの宇宙定数(1917年)?
 - 「真空」がもつエネルギー?
 - 宇宙論スケールでの一般相対論(重力法則)の破綻
- いずれも未知の物理学を切り拓く鍵



ダークエネルギーの登場

- **理論と観測の120桁の違いを説明するには**
 - 宇宙論的観測の解釈がおかしく、やはり Λ の値は0
 - fine tuningを認める、あるいはそのようなモデルをでっちあげる
 - 人間原理に持ち込む
 - Λ は素粒子論的な起源をもつものではない
- アインシュタイン方程式の左辺にいる限り、エネルギー運動量保存則より、 Λ は定数しか許されない(宇宙定数)
- 一方、いったん、**右辺に移項してしまえば、定数である必然性はなくなる** (「時間変化する宇宙定数」 \Rightarrow 全くうけなかった)
- 超新星の観測によって、 Λ の値が0でない可能性が高くなると、単なる定数ではなく、宇宙を満たす物質の性質として特徴付けようという一般的な観点が格好よさげに見えてきた

ダークエネルギーと宇宙の状態方程式

■ 宇宙の状態方程式

- 圧力とエネルギー密度の比が $w \Rightarrow \rho = w \rho$
- $w=0$: ダークマター、 $w=1/3$: 輻射、 $w=-1$: 宇宙定数
- 相対論では重力は
 $\Delta \phi = 4 \pi G (\rho + 3p) = 4 \pi G \rho (1 + 3w)$ なので

$w < -1/3 \Rightarrow$ 万有斥力

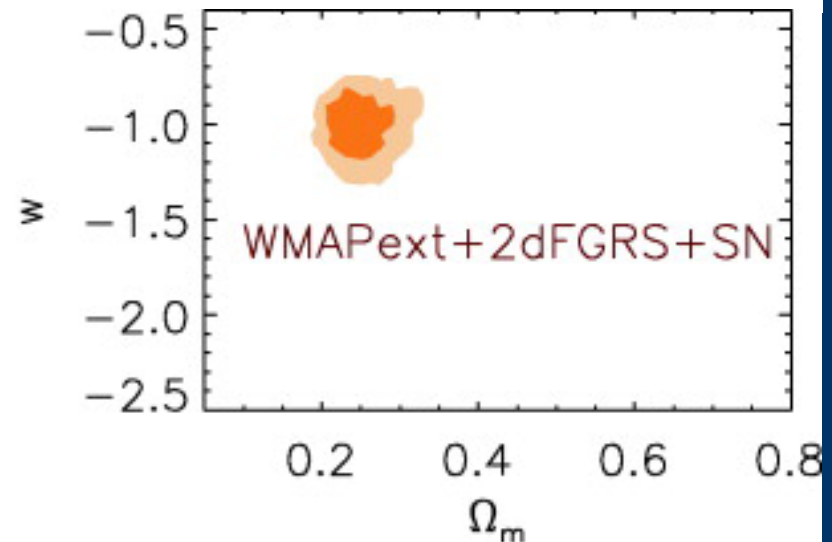
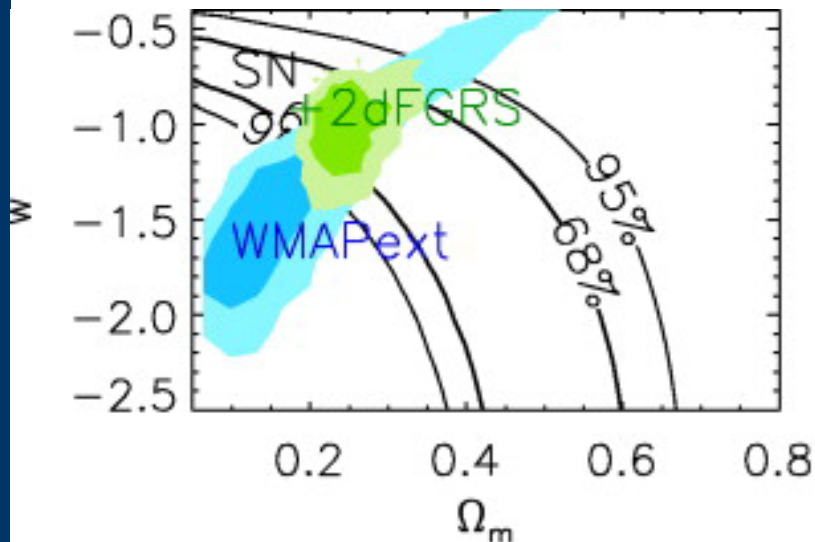
- w が時間に依存しなければ $\rho(t) \propto a(t)^{-3(w+1)}$
- $-1 < w < 0$: (一般の)ダークエネルギー
- ここまでくると、 **w が定数である理由すらなくなる**

$w = w(t)$

ダークエネルギーは宇宙定数か？

- **ダークエネルギーの状態方程式**（現時点では物理ではない、単なるパラメトリゼーション）
 - $p=w\rho \Rightarrow \rho(t) \propto a(t)^{-3(w+1)}$
 - $w=-1$: 宇宙定数
 - $-1 < w < -1/3$: (一般の)ダークエネルギー
- **WMAP+others $\Rightarrow w = -0.98 \pm 0.12$**

Spergel et al. ApJS 148(2003)175

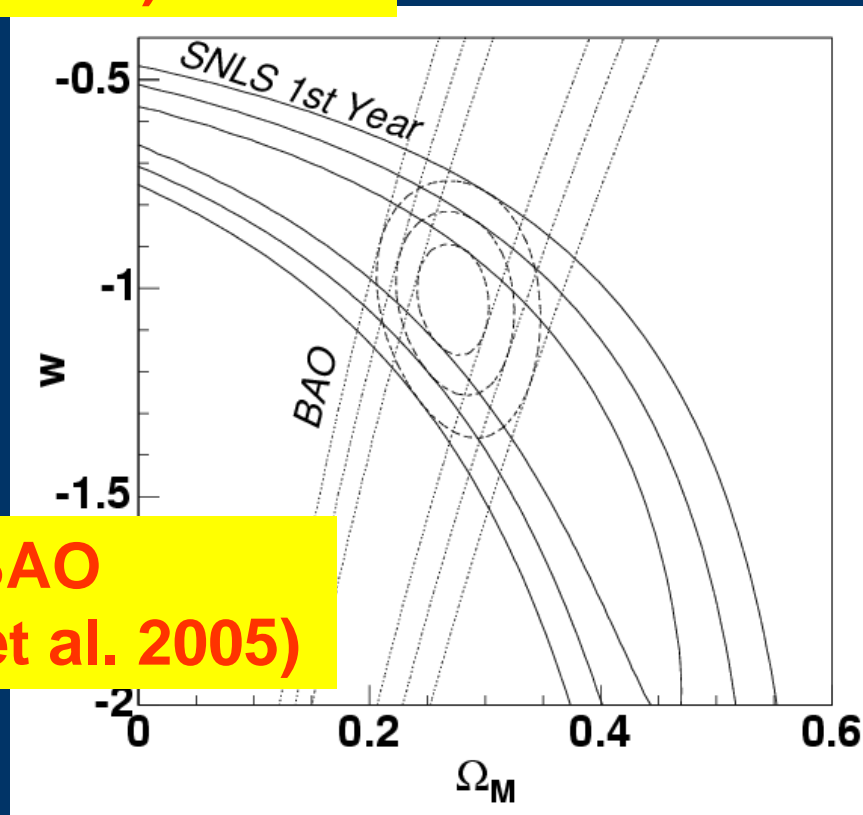
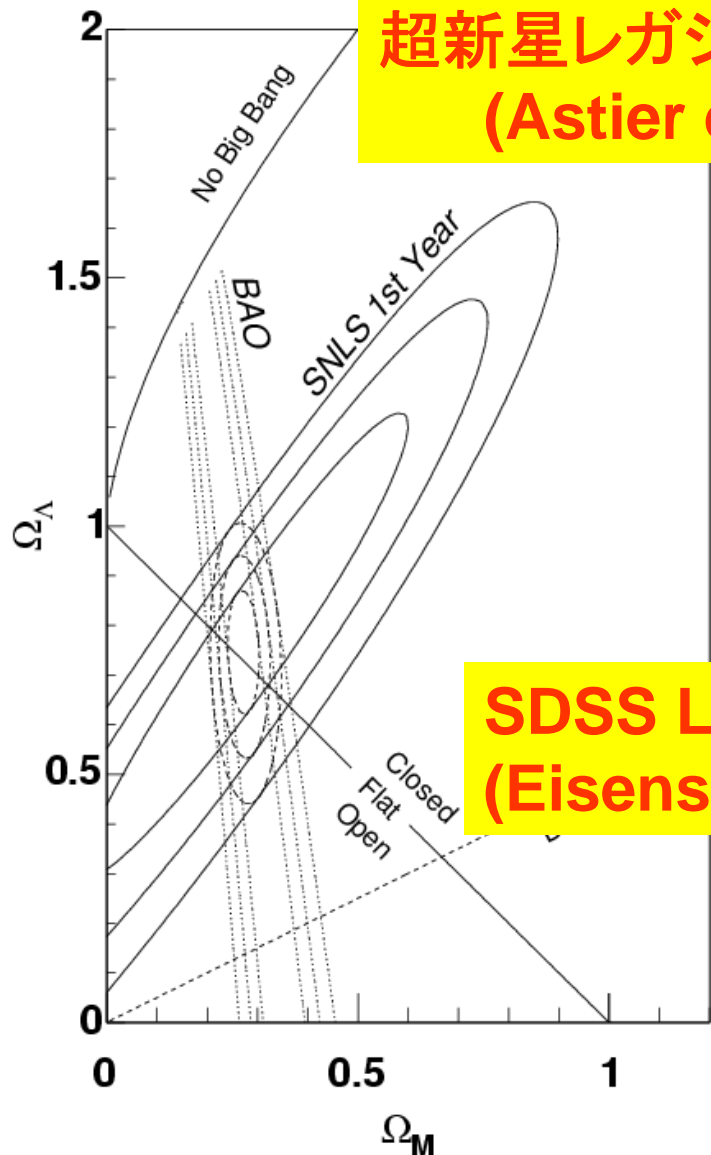


超新星と銀河分布からのダークエネルギーへの制限

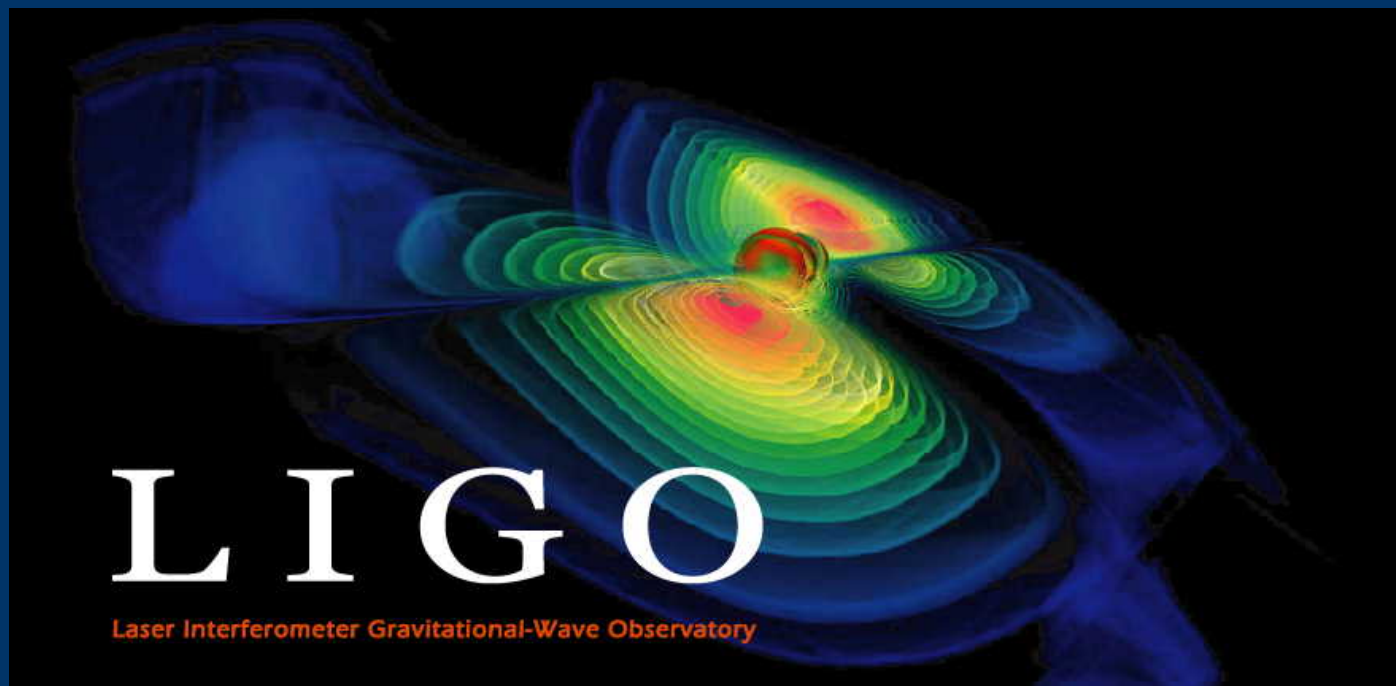
超新星レガシーサーベイ1年目
(Astier et al. 2006)

SDSS LRG BAO
(Eisenstein et al. 2005)

$w = -1.023 \pm 0.090$ (系統誤差)
 ± 0.054 (統計誤差)

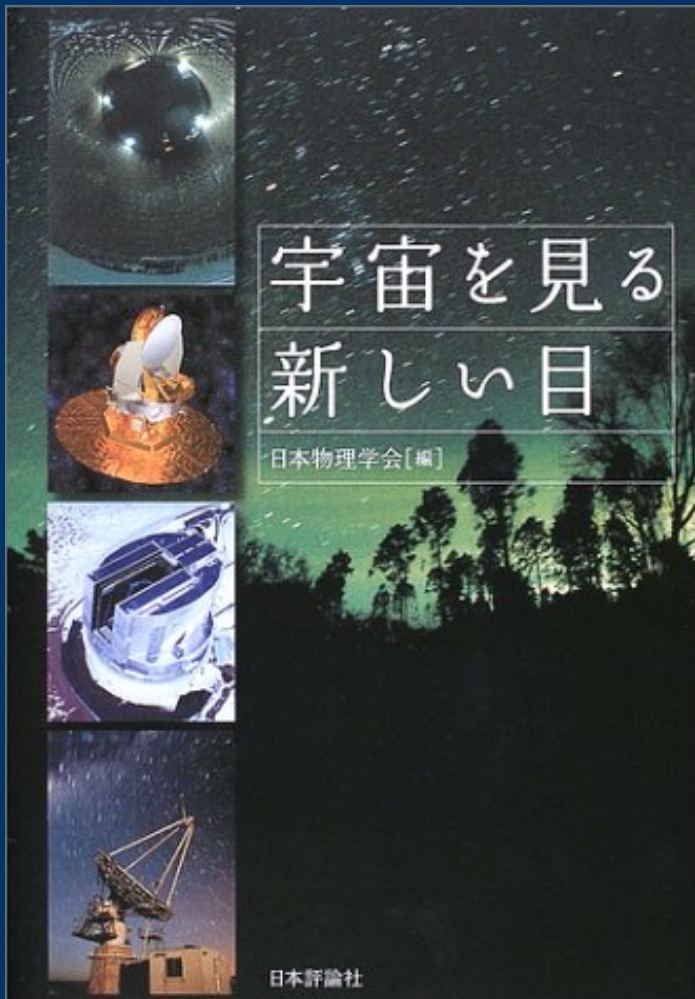


重力波



「宇宙を見る新しい目」(日本評論社)

日本物理学会編:2004年3月刊



1章 宇宙マイクロ波背景輻射で見る宇宙...小松英一郎

2章 X線で見る宇宙...大橋隆哉

3章 ガンマ線で見る宇宙...谷森達

4章 重力波で見る宇宙...三尾典克

5章 最高エネルギー宇宙線...手嶋政廣

6章 コンピュータシミュレーションから見る宇宙...吉田直紀

7章 超新星で測る宇宙膨張とダークエネルギー...土居守

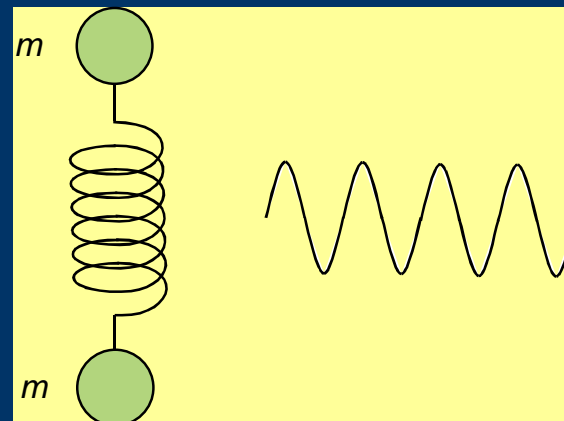
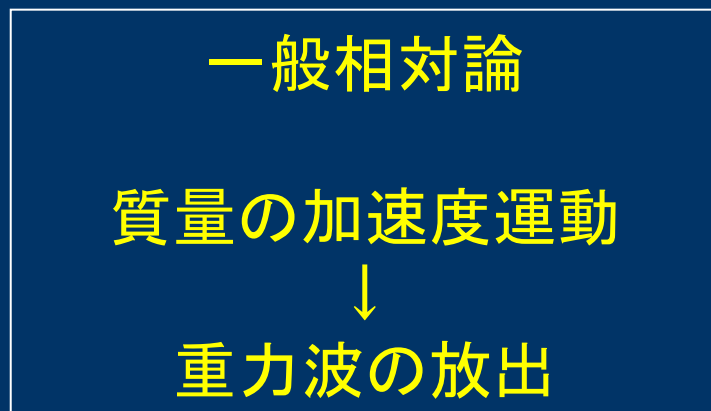
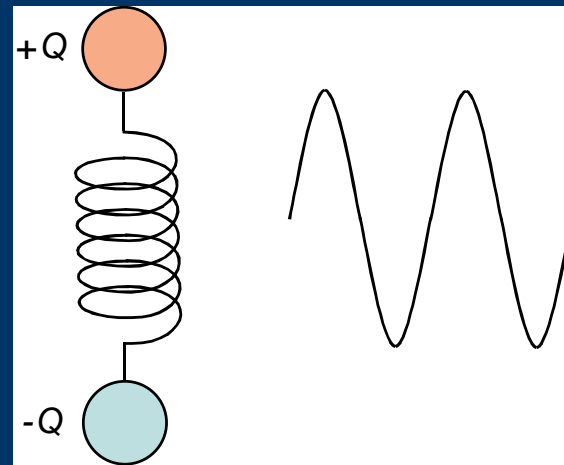
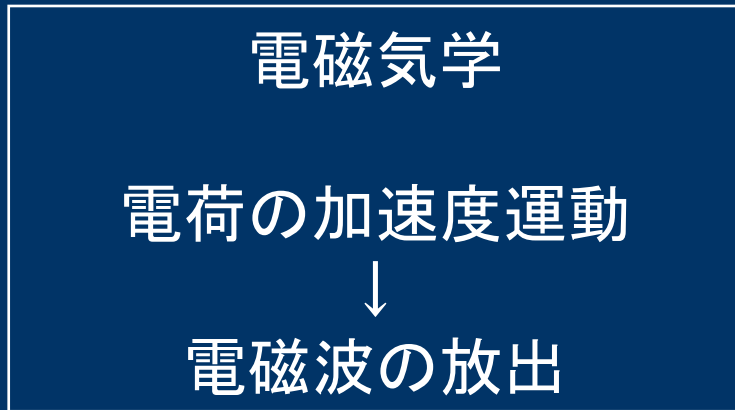
8章 ニュートリノと素粒子物理...梶田隆章

9章 超新星ニュートリノで見る宇宙...佐藤勝彦

10章 究極の宇宙論:太陽系外惑星探査...須藤靖

重力波とは

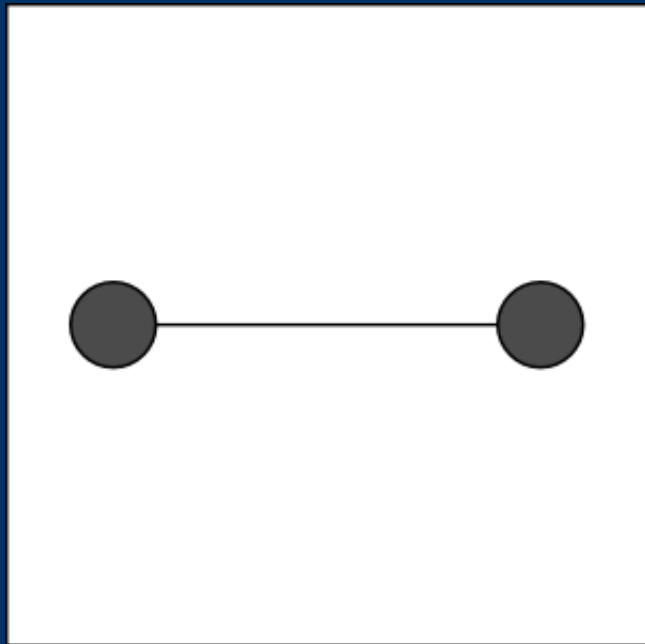
- 一般相対性理論から予言される重力の波動現象



回転体からの重力波

- 単位時間当たり放出されるエネルギー

$$W = (\text{質量})^2 \times (\text{半径})^4 \times (\text{周波数})^6$$



地上の物体:

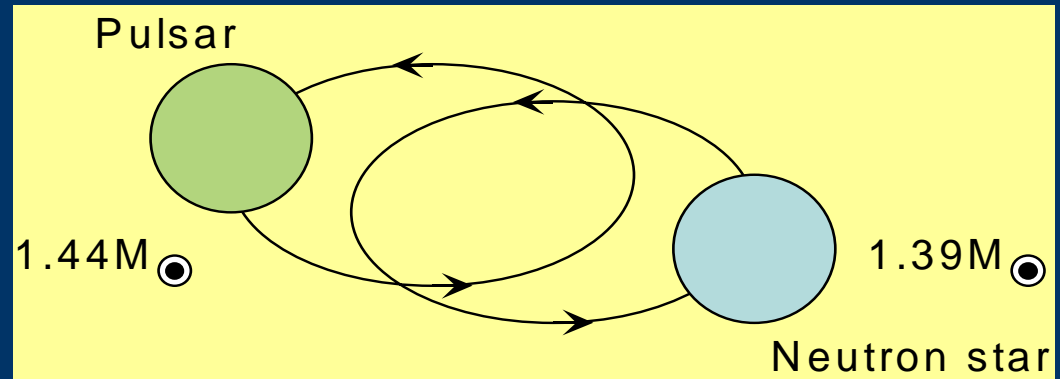
検出不可能な大きさ

天体現象からの
重力波を狙う

重力波存在の間接的証拠

- 連星中性子星
PSR1913+16

- 公転周期：
7.75時間



公転周期の変化率： $(-2.425 \pm 0.002) \times 10^{-12} \text{s/s}$

重力波の放出によってエネルギーを失い、 3×10^8 年後に合体

一般相対論： $(-2.4196 \pm 0.005) \times 10^{-12} \text{s/s}$

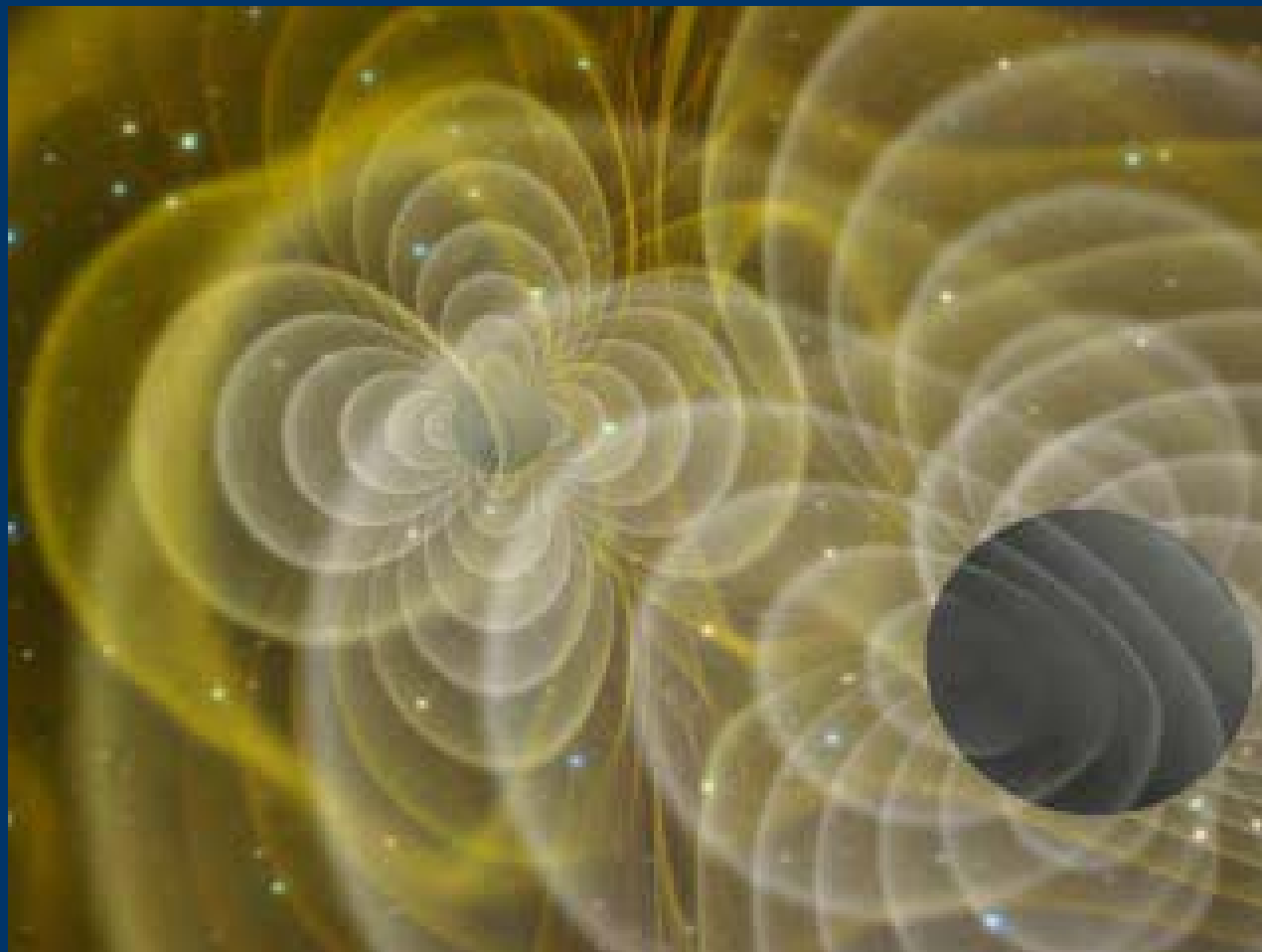
理論と観測の差は1%以下→重力波の存在の証明

1993年ノーベル物理学賞：テイラー&ハルス

天文学的重力波源

- 連星中性子星の合体
 - 頻度: 200Mpcの範囲内で年に数回
 - 期待される振幅 $h = 10^{-22} \sim 10^{-21}$
- ブラックホールの合体
- 超新星爆発
 - 頻度: 10Mpcの範囲内で月に1回
 - 期待される振幅 $h < 10^{-22}$?
- パルサー
 - 連続波、 $h < 10^{-26}$?
- 初期宇宙起源の背景重力波

中性子星合体にともなう重力波放射 の数値シミュレーション



重力波の検出

- 期待される重力波の振幅: $h \sim 10^{-21}$

太陽地球間の距離の変化を、原子半径程度の精度で決定するようなもの

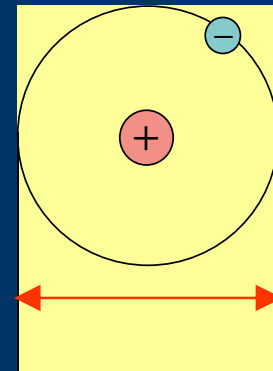
太陽



地球



水素原子



$$L = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$$

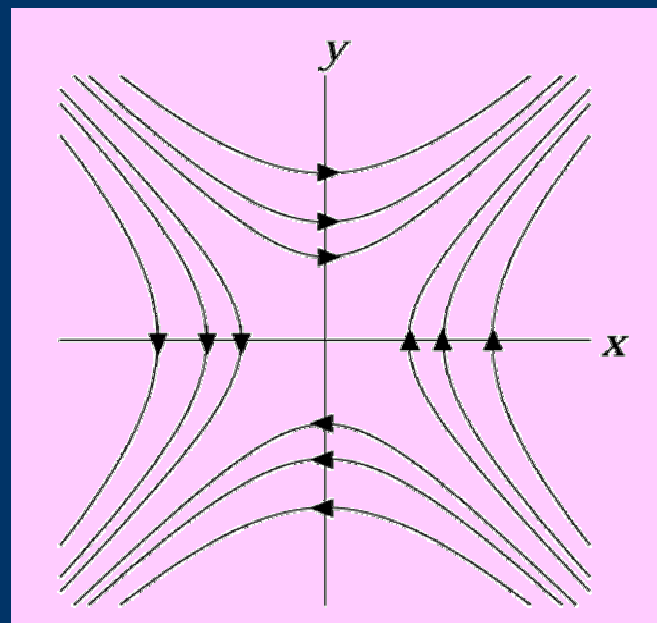
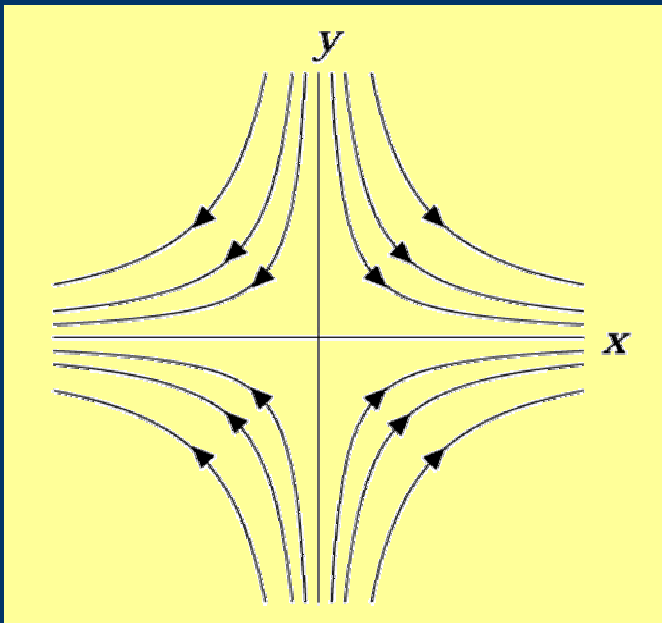
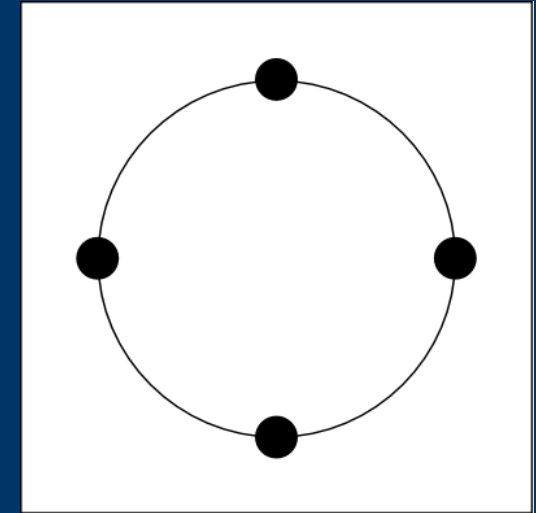
$$\Delta L = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$$

重力波の偏光パターン

■ 2つの偏光を持つ横波

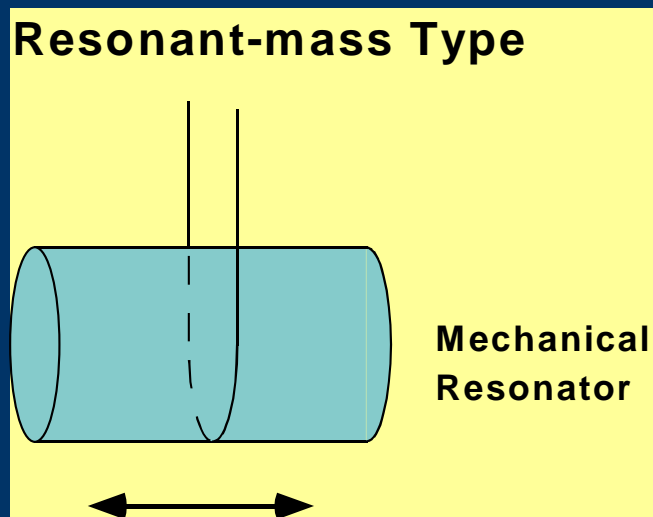
時間変動の様子

重力波の力線



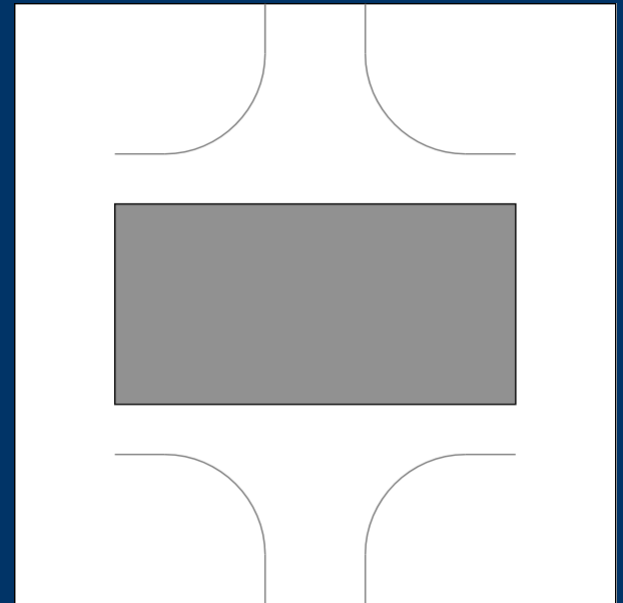
共振型重力波検出器

- メリーランド大学のWeberが開発
- 弾性体の共振を利用



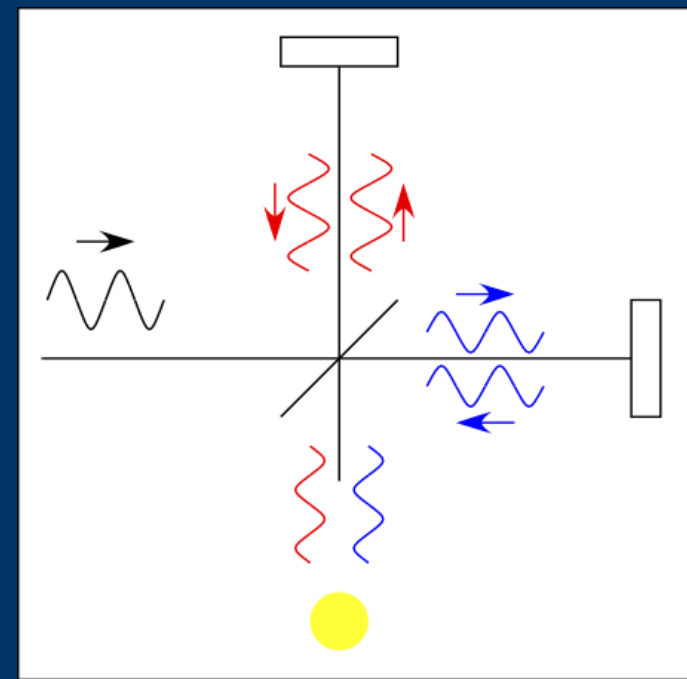
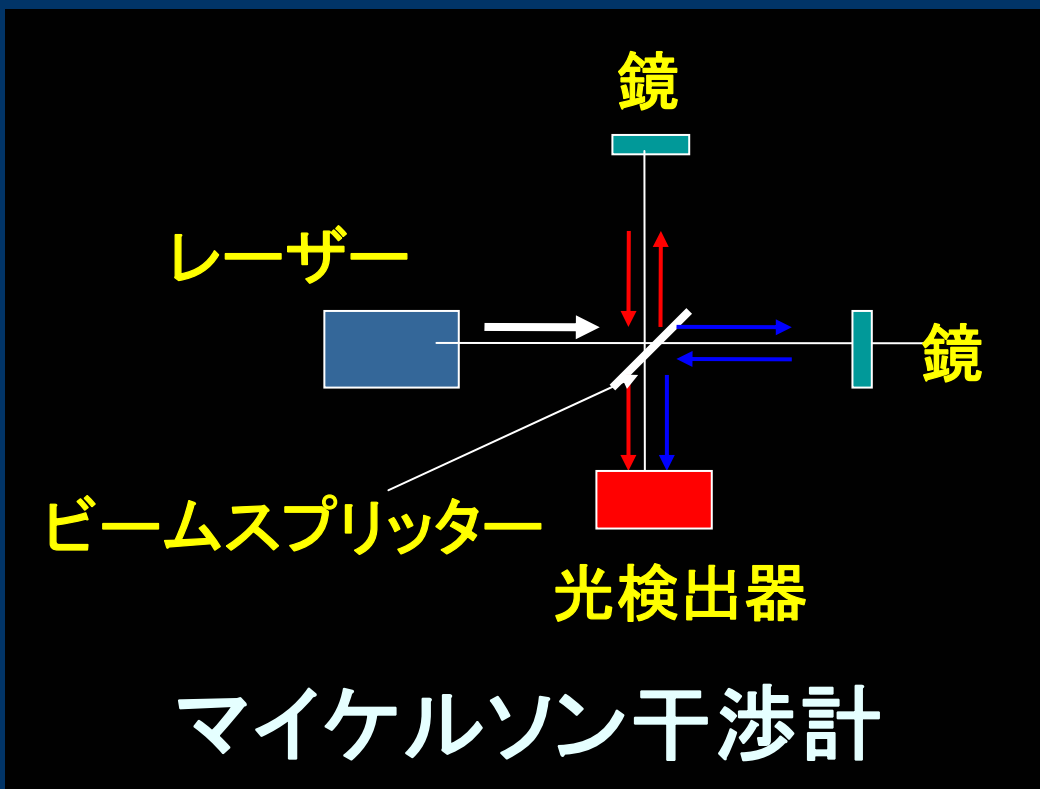
共振周波数: 約1kHz

$$h \sim 5 \times 10^{-19}$$



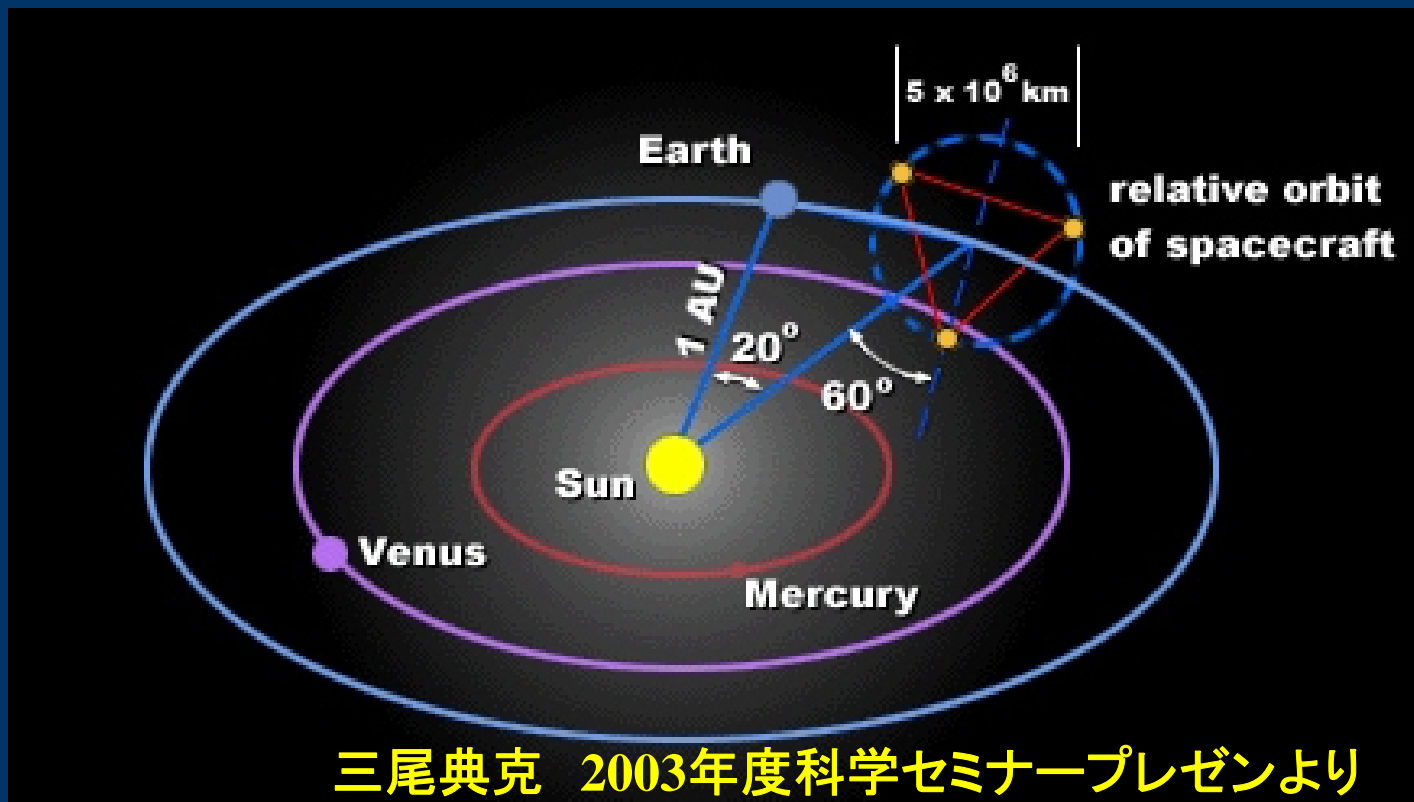
レーザー干渉計重力検出器

- 光の干渉を用いた高性能な計測装置



宇宙レーザー干渉計:LISA

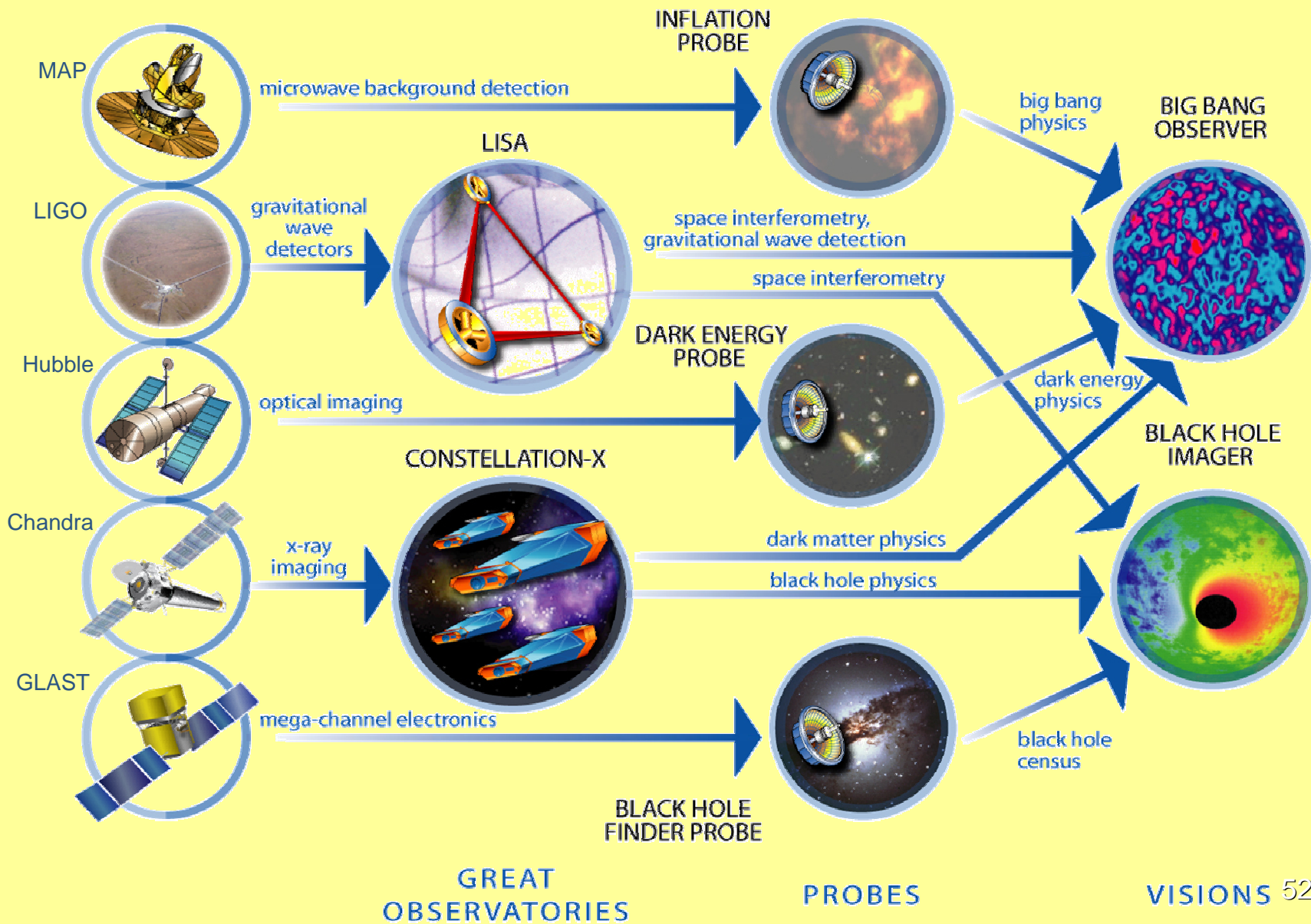
- **LISA**: **L**aser **i**nterferometer **s**pace **a**ntenna
 - NASA(米国)とESA(欧州)の共同プロジェクト
 - 3台の飛翔体の距離 (5×10^6 km)をレーザーで測定



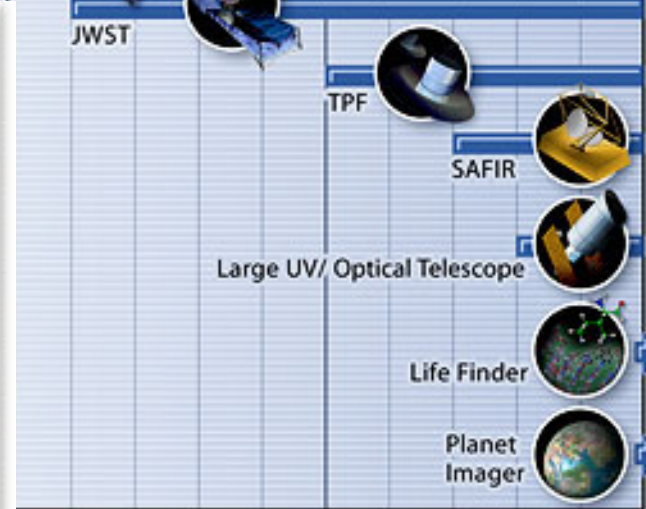
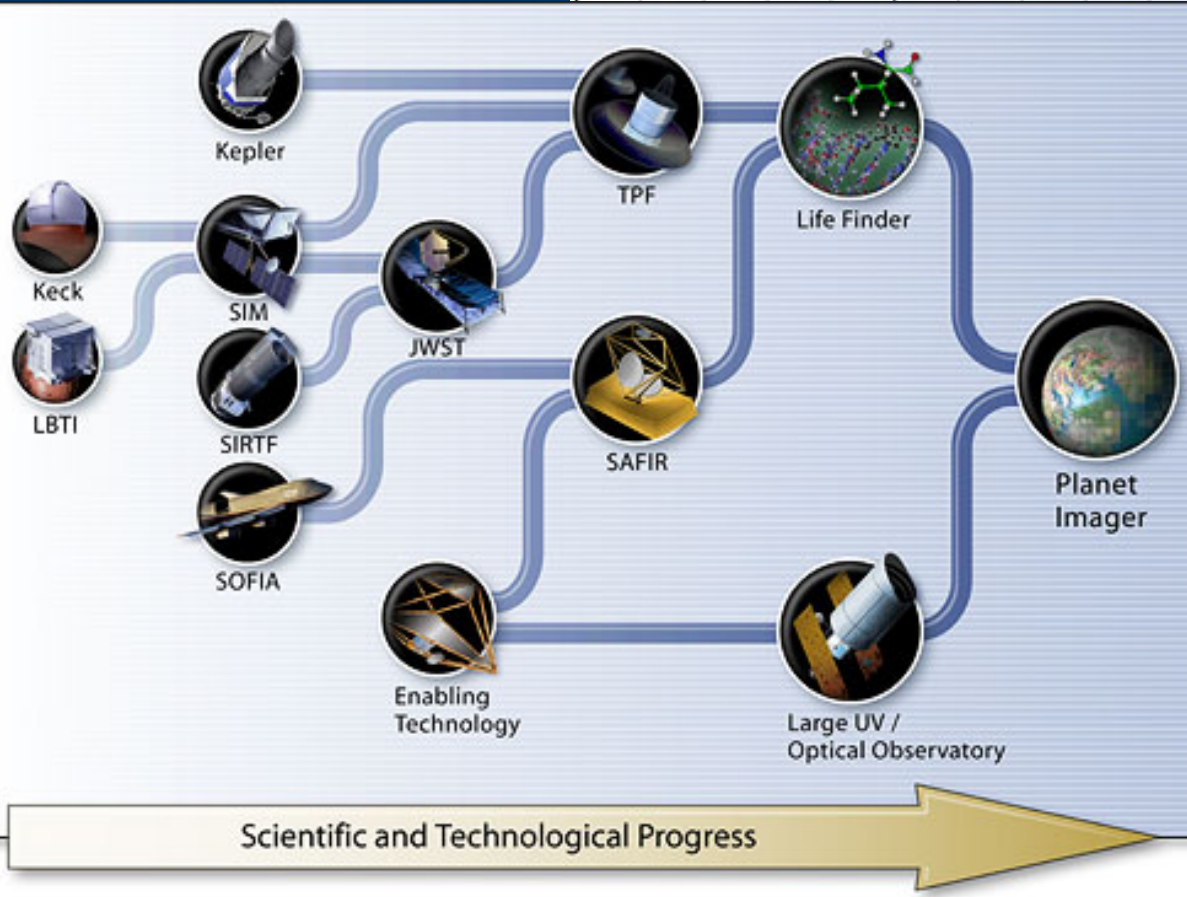
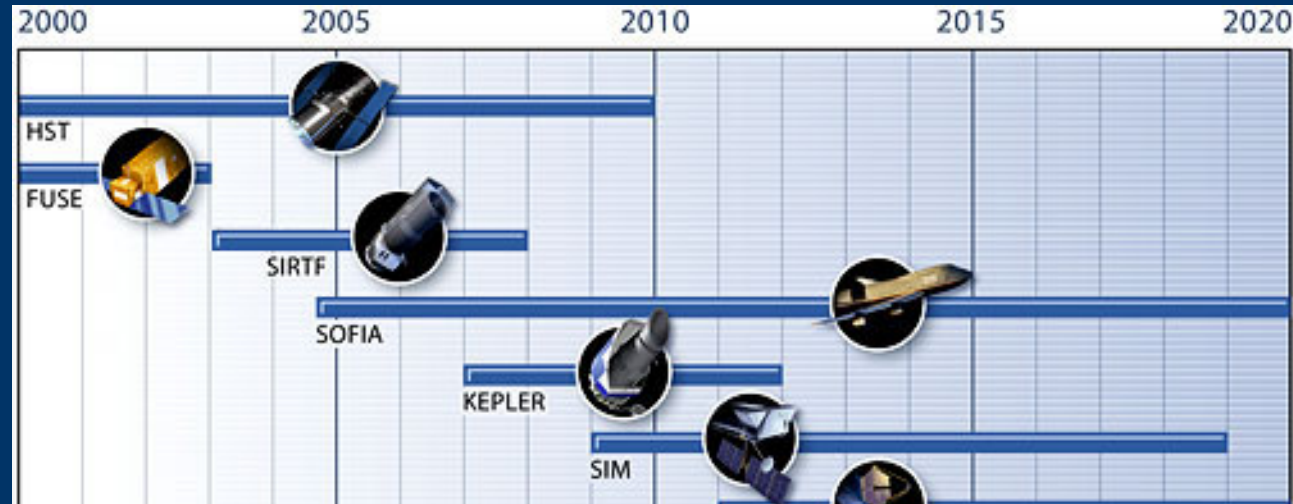
NASA "Beyond Einstein Program"

<http://universe.nasa.gov/>

Science and Technology Precursors



NASA “Origins”



米国の宇宙科学
ロードマップ

<http://origins.jpl.nasa.gov>

Things that I would encourage you to do by next Tuesday

- solve all the problems in the mid-term exam. (once again) by yourself
- the role of the energy-momentum conservation law in general relativity
- the Einstein equations from the variational principle
- derivation of the Schwarzschild solution

相対論的人生観

- 世の中に絶対的な幸せはない
- 世の中はすべて相対的
 - みんな平等に貧しければ貧しさなど気づかない
 - 本来は十分満ち足りていても、周りがもっと裕福に見えると不満を感じてしまう
 - 貧しければ自然に助け合い、人間関係が濃くなる
 - 富めば富むほど、面倒な人間関係を嫌い利己的になる
 - 「むずかしい」勉強をやっていることが重要ではなく、今まで知られていたことに「相対的」にどのような新しいものを付け加えたかが勝負
- 「次はどうする」、よりも、「いつ(どこまできたら)やめるか」のほうが重要でかつ難しい
 - 実際には、既存のしがらみのために極めて困難だが、、、

貧しいけど幸せ・貧しいから幸せ

