銀河団の多波長観測と宇宙論

2002年度夏学期6月18日~20日

東京工業大学集中講義

須藤 靖

平成14年6月20日

目 次

第1章	銀河団とは	1
1.1	なぜ 銀河団?	1
1.2	可視光観測:Abell Clusters	1
1.3	銀河団からの X 線輻射	2
	1.3.1 line emission \ldots	3
	1.3.2 continuum emission: 熱制動輻射	3
1.4	なぜ銀河団を X 線でみるのか?	5
第2章	銀河団ガスの密度分布	7
2.1	静水圧平衡とビリアル質量・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	7
2.2	等温 β モデル	8
第3章	Sunyaev – Zel'dovich 効果	11
3.1	銀河団内高温ガスによるマイクロ波背景輻射光子の逆コンプトン散乱:Kom-	
	paneetz 方程式	11
3.2	SZ 効果による CMB スペクトルの変形	12
3.3	y パラメータのプロファイル	15
3.4	SZ 効果を用いた angular diameter distance の推定	20
第4章	Press – Schechter 理論	23
4.1	球対称非線形モデル・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	23
4.2	ダークハローの質量関数	25
4.3	密度揺らぎの線形成長率・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	29
第5章	ダークハローの普遍密度分布	31
5.1	ダークハローの密度プロファイルの重要性	31
5.2	数値シミュレーションによるハロー密度プロファイルの過去の研究	32
5.3	普遍密度プロファイルへの観測的制限	43
	5.3.1 質量・回転曲線プロファイル	43
	5.3.2 銀河団 X 線ガス密度分布:β モデルの起源?	45
	5.3.3 Collisional dark matter	46
5.4	ハロー密度プロファイルの理論モデル	48
	5.4.1 2 点相関関数に対する自己相似解と非線形漸近解	48
	5.4.2 ピークのまわりの密度プロファイル	51

第1章 銀河団とは

1.1 なぜ 銀河団?

銀河団は百個から千個程度の銀河が互いの重力で引き合うことによって形成されている 天体である。典型的には、太陽質量 (M_{\odot}) の 10^{14} 倍で数百万光年の広がりをもっており、系 全体の重力的進化の時間スケールは

$$t_{\rm dyn} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \sqrt{\frac{(2 \times 10^6 \times 3.1 \times 10^{18})^3}{6.7 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^{33} \times 10^{14}}} \mathcal{P} \sim 40 \,\text{\&fm}$$
(1.1.1)

これは、宇宙年齢(約100億年)よりは短い(力学的平衡状態の近似ができる)が、短すぎるわけではない(宇宙の初期条件をまだとどめているはず)。さらに、銀河団は、銀河・銀河間ガス・ダークマターの主要3成分からなる比較的単純な系であるとともにそれらの絶妙なバランスによって様々な観測を可能にする。

明るい 遠く (=過去)の宇宙まで観測できるプローブ

大きい 進化の時間スケールが宇宙年齢と同程度 宇宙の初期条件を記憶している

多波長 銀河 (光学)、高温ガス (X線、電波)、ダークマター (重力レンズ) の3成分の多波長 観測が可能

これが、銀河団の研究が宇宙論にとって極めて重要であると考えられている理由である。さらに最近、宇宙論的に形成された自己重力系(ダークハロー)の密度分布が普遍的でかつ中心にカスプ ($\rho \propto r^{-1.5}$)をもつことが数値シミュレーションから示唆されており、銀河団の観測データとの比較からダークマターの性質までを議論するという試みも活発に行われている。

1.2 可視光観測: Abell Clusters

実は銀河団の定義は曖昧である。理科年表によると、「50個より多数の銀河が1000万光 年程度の大きさの領域に密集している集団」とされている。これは、1958年にG.O.Abell が発表した Abell clusters の定義に準拠しており、銀河団の研究においてある種の標準を与 えている。

Abell カタログ

Palomar Observatory Sky Survey の写真乾板の表面輝度密度の enhancement を、以下の 基準に従い Abell が眼視で選びだしたもの (G.O.Abell, ApJS 1958, 3, 211)。

- 1. 銀河団中で3番目に明るい銀河の見かけの等級を m_3 とする。このとき、 $m_3 < m_3 + 2$ かつ、中心から角半径 θ_A/z 内に背景銀河を差し引いた後、50個以上のメンバー銀河が存在すること。この個数から、richness class R を定義する。
- 2. このメンバー銀河中、10番目に明るいものの等級 m_{10} から推定した赤方偏移 z が $0.02 \le z \le 0.20$ であること。この m_{10} から、distance class D を定義する。

Abell カタログには、全部で 2712 個の銀河団があるが、そのうち 1682 個が上の 2 つの条件 を満たす。それ以外の 1030 個は、その過程で見つけられたもので finding list として付け加 えられた。以上より明らかなように、Abell clusters は主観的な選択基準に基づいており、 かつ、天球上での projection contamination の影響を強く受けやすい。

Abell **半径:**

$$R_A = \frac{cz}{H_0} \theta_A = 3000 h^{-1} \text{Mpc} \times \frac{\pi}{180} \times \frac{1.7}{60} \approx 1.48 h^{-1} \text{Mpc}$$
(1.2.1)

R	メンバー銀河数	銀河団数	D	m_{10}	$z_{\rm est}$	銀河団数
0	30-49	—	1	13.3 - 14.0	0.027	9
1	50-79	1224	2	14.1 - 14.8	0.038	2
2	80-129	383	3	14.9 - 15.6	0.067	33
3	130-199	68	4	15.7 - 16.4	0.090	60
4	200-299	6	5	16.5 - 17.2	0.140	657
5	≥ 300	1	6	17.3 - 18.0	0.180	921
			7	> 18		_

表 1.1: Abell clusters の分類	湏
---------------------------	---

ACO カタログ

北天の Abell カタログの、南天版が ACO カタログで、 $m_3 < m < m_3 + 2$ に 30 個以上 のメンバー銀河をもつ銀河団 4073 個が登録されている (G.O.Abell, H.G. Corwin, & R.P. Olowin, 1989, ApJS, 70, 1)。

1.3 銀河団からのX線輻射

歴史的には銀河団の観測的研究は可視域から出発した。これは銀河団が可視域でみたメンバー銀河の分布から定義されていることからも当然といえる。しかしその後、銀河団が強い X 線源であることが認識されたことによって、その研究は大きな発展を遂げる。実は銀河団は本来 X 線で同定すべきであると言っても過言ではないことは次のように簡単に理解できる。銀河団はごく大雑把には、 $M_{cl} \sim 10^{14} M_{\odot}$ の質量が半径 $R_{cl} \sim 2$ Mpc 程度の領域に集中した球状の天体である。このような重力系が平衡状態に落ち着けば、その運動エネルギーは重力ポテンシャルエネルギーとほぼ等しくなる。この運動エネルギーに対応する

$$k_B T_{\rm cl} \sim m_p V_{\rm cl}^2 \sim \frac{G m_p M_{\rm cl}}{R_{\rm cl}} \sim 2 \text{keV} \left(\frac{2 \text{Mpc}}{R_{\rm cl}}\right) \left(\frac{M_{\rm cl}}{10^{14} M_{\odot}}\right)$$
(1.3.1)

となる $(m_p \text{ は陽子の質量})$ 。まさに、典型的な X 線に対応する温度である。

1.3.1 line emission

銀河団ガスの温度、電離状態、元素組成のプローブ。例えば、水素状イオンのイオン化 エネルギーは

$$m_{e} \frac{v^{2}}{r} = \frac{Ze^{2}}{r^{2}} \quad \& \quad 2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{m_{e}v}$$

$$\rightarrow \qquad \chi_{n} = \frac{m_{e}v^{2}}{2} - \frac{e^{2}}{r} = -\frac{m_{e}Z^{2}e^{4}}{2n^{2}\hbar^{2}} \sim -\frac{13.6Z^{2}\text{eV}}{n^{2}} \qquad (1.3.2)$$

より、 χ_1 が (1-10)keV の X 線領域に対応するのは $Z = 8 \sim 27$ 。これは、酸素から鉄という、宇宙に多く存在する元素に対応している。



図 1.1: 太陽近傍の元素組成。水素の個数密度を1とした場合の個数密度の比。

1.3.2 continuum emission: 熱制動輻射

銀河団の出すX線輻射のスペクトルは、熱制動輻射の予言とよく一致していることが観 測的に知られている。これは、温度TのMaxwell分布:

$$f(v) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right)$$
(1.3.3)

をしている電子の、イオンによる制動輻射。

表 1.2: 主な元素の水素状イオンの場合の Lya(=Ka) 線の波長とエネルギー

_	元素	輝線波長 [Å]	エネルギー [keV]
-	0	19.0	0.7
	Ne	12.2	1.0
	Mg	8.4	1.5
	Si	6.2	2.0
	Ca	3.0	4.1
	Fe	1.8	6.9

emissivity (erg/s/cm³/Hz)

$$\frac{d^2 L_X}{dV d\nu} = \frac{2^5 \pi e^6}{3m_e c^3} \left(\frac{2\pi}{3m_e kT}\right)^{1/2} n_e \sum_i Z_i^2 n_i e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{\rm ff}(T,\nu).$$
(1.3.4)

 $n_e \ge n_i$ は、電子および *i* 番目のイオンの個数密度、 Z_i は電子および *i* 番目のイオンの 電荷、 $\bar{g}_{\rm ff}(T,\nu)$ は free-free に対する量子論的補正で (velocity averaged) Gaunt factor と呼ばれ、 $h\nu$, kT がともに (0.1–10)keV の範囲内であれば

$$\bar{g}_{\rm ff}(T,\nu) \approx 0.9 \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^{-0.3} \tag{1.3.5}$$

という近似が成り立つ。

bolometric luminosity per unit volume (erg/s/cm³)

$$\frac{dL_X}{dV} = \frac{2^4 e^6}{3\hbar m_e c^3} \left(\frac{2\pi}{3m_e kT}\right)^{1/2} n_e \sum_i Z_i^2 n_i \bar{g}_{\rm ff}(T).$$
(1.3.6)

 $\bar{g}_{\rm ff}(T)$ は (frequency averaged) Gaunt factor で、1.1 ~ 1.5 程度の値をとる。通常は、 1.2 としておけば、20 パーセント程度の精度で正しいらしい (Rybicki & Lightman 1979)。

オーダーの評価

$$\frac{dL_X}{dV} \approx 5 \times 10^{-24} \left(\frac{T}{1 \text{keV}}\right)^{1/2} \left(\frac{n_e}{1 \text{cm}^{-3}}\right)^2 \text{ erg/s/cm}^3.$$
(1.3.7)

典型的な銀河団のサイズ R_{cl} を 1 Mpc とすれば、その体積と密度は

$$V_{\rm cl} = R_{\rm cl}^3 \approx 3 \times 10^{73} \left(\frac{R_{\rm cl}}{1 \,{\rm Mpc}}\right)^3 \,{\rm cm}^3$$
 (1.3.8)

$$n_{\rm cl} \approx \frac{\Omega_{\rm b} M_{\rm cl}}{m_p V_{\rm cl}} \approx 3 \times 10^{-3} \Omega_{\rm b} \left(\frac{M_{\rm cl}}{10^{14} M_{\odot}}\right) \left(\frac{1 \,{\rm Mpc}}{R_{\rm cl}}\right)^3 \,{\rm cm}^{-3}.$$
 (1.3.9)

したがって、銀河団のX線光度は典型的に

$$L_X \approx V_{\rm cl} \frac{dL_X}{dV} \approx 10^{43} \xi \left(\frac{\Omega_{\rm b}}{0.1}\right)^2 \left(\frac{T}{1\,{\rm keV}}\right)^{1/2} \left(\frac{M_{\rm cl}}{10^{14}M_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{1Mpc}{R_{\rm cl}}\right)^3 \,\,{\rm erg/s.} \ (1.3.10)$$

ここで、実際には銀河団の密度は一様でなく、中心部はずっと大きい。この効果を $\xi \sim 10$ という係数で表した。このように、典型的には銀河団は数 keV の温度で、 10^{44} erg/s 程度の X 線光度を持つ。

1.4 なぜ銀河団をX線でみるのか?

X線は熱制動輻射によるから、放射率は電子の個数密度 n_e の 2 乗に比例する (荷電中性 の条件から陽子の個数密度も n_e と同じとしてよい)。おおざっぱに銀河団内部で、電子密 度 n_e と銀河密度 n_{gal} の比が場所によらずほぼ一定であるとすれば、これは n_{gal} の 2 乗に比 例すると言い替えられる。一方、可視域での放射はメンバー銀河からの放射の寄与の総和 であり、単純に n_{gal} に比例する。銀河団の同定は天球上で放射率を視線方向に積分した表 面輝度に基づいて行われるが、放射率の n_e (すなわち n_{gal})依存性の違いは重大な影響を 持つ。これは銀河団の存在しない方向からの表面輝度との比を考えれば理解できる。まず、 可視域では

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\rm opt} \sim \frac{\int_{-R_{\rm cl}}^{R_{\rm cl}} n_{\rm gal}({\rm cluster})dl}{\int_{0}^{R_{\rm H}} \langle n_{\rm gal} \rangle_{\rm universe}dl} \sim \frac{\langle n_{\rm gal} \rangle_{\rm cl}}{\langle n_{\rm gal} \rangle_{\rm universe}} \frac{2R_{\rm cl}}{c/H_0} \sim 1$$
(1.4.1)

となる。ここで、 n_{gal} (cluster)は銀河団中での銀河の個数密度で、 $\langle n_{gal} \rangle_{cl} \sim 10/(h^{-1} \text{Mpc})^3$ が その平均値、 $R_{H} = c/H_0 \sim 3000 h^{-1} \text{Mpc}$ は宇宙の地平線サイズ、 $\langle n_{gal} \rangle_{universe} \sim 10^{-2}/(h^{-1} \text{Mpc})^3$ は全宇宙で平均したときの銀河の個数密度である。これらの典型的な値を代入すれば、(1.4.1)式は1となる。つまり、「銀河団の存在する領域とそうでない領域とで、可視光で観測する限り表面輝度にはほとんど違いがない」。これに対して、X線領域では

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\rm X} \sim \frac{\langle n_{\rm gal}^2 \rangle_{\rm cl}}{\langle n_{\rm gal} \rangle_{\rm universe}^2} \frac{2R_{\rm cl}}{c/H_0} > \frac{\langle n_{\rm gal} \rangle_{\rm cl}^2}{\langle n_{\rm gal} \rangle_{\rm universe}^2} \frac{2R_{\rm cl}}{c/H_0} \sim 10^3 \tag{1.4.2}$$

となり、何と1000倍もの違いとなる。つまり、銀河団は可視光観測で見つけるのは難しい が、X線観測を用いればその同定は比較的容易であることを意味する。これが、銀河団観 測においてはX線観測が重要となる理由であり、図2.1をみればその違いが一目瞭然であ ろう。



図 1.2: 左:銀河団 RXJ1347-1145の光学・X 線 2 次元マップ。A から E の記号で示されてい るのは、この銀河団の重力レンズ効果を受けてゆがんでいる遠方銀河のイメージである。右: 銀河団 RXJ1347-1145のスニャーエフ・ゼルドヴィッチ効果によるミリ波マップを Chandra 衛星の X 線強度等高線と重ねたもの。中心から ~ 20″ 南東にある構造が明確に見える。



図 1.3: 銀河団 A2218の電波・X 線マップ (シカゴ大学 J.Carlstrom 及び M. Joy 氏提供)、及 び可視域画像 (ハッブル宇宙望遠鏡のウェブサイト http://oposite.stsci.edu/pubinfo/pr/2000/08/index.html よ り転載)。

第2章 銀河団ガスの密度分布

2.1 静水圧平衡とビリアル質量

「ガスと銀河、およびダークマターの3成分が球対称で平衡状態にある場合の密度分布 は何か?」

ガスの静水圧平衡

$$\frac{1}{\rho_{\rm gas}} \frac{\partial P_{\rm gas}}{\partial r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \tag{2.1.1}$$

ガスの状態方程式:

$$P_{\rm gas}(r) = n_{\rm gas}(r)kT(r) = \frac{\rho_{\rm gas}(r)}{\mu m_p}kT(r)$$
 (2.1.2)

ここで、 μ は mean molecular weight で、完全電離した H と He の 2 成分ガスの場合、

$$(n_e + n_H + n_{\rm He})\mu m_p = m_H n_H + m_{\rm He} n_{\rm He}$$

$$\rightarrow \quad \mu = \frac{n_H + 4n_{\rm He}}{2n_H + 3n_{\rm He}} = \frac{4}{5X + 3} \approx 0.59 \text{ (for } X = 0.75\text{)}. \quad (2.1.3)$$

銀河の力学平衡: Jeans 方程式 一般に 銀河団の力学的進化(ケプラー運動)の時間スケー ルは現在の宇宙の年齢の 1/10 程度であるから、すでに銀河団は全体として力学的平 衡状態に達していると考えられる。この場合、銀河団の質量は球対称を仮定し、その なかのメンバー銀河をテスト粒子と考えた時の力学平衡の式 (Jeans 方程式):

$$\frac{1}{\rho_{\rm gal}}\frac{\partial}{\partial r}(\rho_{\rm gal}\sigma_{\rm r}^2) + \frac{2}{r}(\sigma_{\rm r}^2 - \sigma_{\rm t}^2) = -\frac{GM(r)}{r^2}$$
(2.1.4)

が成り立つと考えられる。ここで、 $\sigma_{\mathbf{r}}(r)$ と $\sigma_{\mathbf{t}}(r)$ は、それぞれ動径方向、動径と垂直方向の銀河の速度分散。

ビリアル質量

$$M(R) = -\frac{R^2}{G} \left[\frac{1}{\rho_{\text{gal}}(R)} \frac{d \ \rho_{\text{gal}}(R) \sigma_r^2(R)}{d \ R} + 2 \frac{\sigma_r^2(R) - \sigma_t^2(R)}{R} \right],$$
(2.1.5)

$$M(R) = -\frac{k_B T_{\rm gas}(R)R}{G\mu m_H} \left[\frac{d \ln n_{\rm gas}(R)}{d \ln R} + \frac{d \ln T_{\rm gas}(R)}{d \ln R} \right]$$
(2.1.6)

銀河の質量密度 ρ_{gal} と、銀河団の中心方向及びその直交方向の銀河の速度分散の大き σ_r, σ_t は、銀河の光学的な観測から得ることが出来る。一方、高温ガスの個数密度

n_{gas} と温度 T_{gas} は X 線観測データから推定することが出来る。ここで定義された質量は、銀河団中の銀河あるいはガスの質量ではなく、それらの観測を用いて推定された銀河団の力学的全質量であることに注意。

今のところ最も信頼できる光学的および X 線観測がなされているのは 髪の毛座銀河 団であり (図 2.1)、その中心から $1h^{-1}$ Mpc 以内にある質量はいずれの方法からも 40% 程度の誤差範囲で $M_{\rm vir} = 6 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ と一致する。これに対して同じ半径内の可 視域光度は $L = 1.8 \times 10^{12} h^{-2} L_{\odot}$ であるから、M/Lはおよそ 300 となる。



図 2.1: かみのけ座銀河団の中心から 1 Mpc 四方の可視域 (左) および X 線 (右: NASA Goddard Space Flight Center, S.L.Snowden 氏提供による) イメージ。

2.2 等温*β*モデル

さらに、

- (i) 等温: T(r), $\sigma_{\rm r}(r)$, $\sigma_{\rm t}(r)$ は r に依存しない定数。
- (ii) 等方: $\sigma_{\rm r} = \sigma_{\rm t}$. これは銀河の速度分布関数が等方ということであり、密度分布の球対称近似とは独立。
- (iii) King model: 銀河の空間分布に関する経験的な近似モデル

$$n_{\rm gal}(r) = n_{\rm gal,0} \left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right]^{-3/2}$$
 (2.2.1)

を仮定すると、(2.1.1) 式と(2.1.4) 式から M(r) を消去して、

$$\frac{\partial \ln n_{\text{gas}}}{\partial r} = \underbrace{\frac{\mu m_p \sigma_r^2}{kT}}_{\equiv \beta} \frac{\partial \ln n_{\text{gal}}}{\partial r} \longrightarrow n_{\text{gas}}(r) = n_0 \left[\frac{n_{\text{gal}}(r)}{n_{\text{gal},0}}\right]^{\beta}.$$
(2.2.2)

これらをまとめると、等温 β モデル:

$$n_{\rm gas}(r) = n_{\rm gas,0} \left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right]^{-3\beta/2}, \quad \beta = \frac{\mu m_p \sigma_{\rm r}^2}{kT}, \quad r_0: \exists \mathcal{P} \# \mathcal{E}$$
(2.2.3)

が得られる。これは、銀河団のX線観測データの解析において広く用いられているモデル であるが、実際には重力ポテンシャルに対して Poisson 方程式を解いているわけではなく、 銀河分布に関する (2.2.1) 式から出発しているにすぎないことに注意。



図 2.2: X 線輝度分布の計算。

等温 β モデルは、X 線表面輝度分布がほとんど同じ形の解析式で表されるという便利な 性質を持つ。つまり、

$$S_{X}(\theta) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{dL_{X}}{dV} \propto \int_{-\infty}^{\infty} dl \ n_{gas}^{2}(r = \sqrt{l^{2} + d_{A}^{2}\theta^{2}})$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} dl \left[1 + \frac{l^{2} + d_{A}^{2}\theta^{2}}{r_{0}^{2}}\right]^{-3\beta}$$

$$= \left[1 + \frac{\theta^{2}}{r_{0}^{2}/d_{A}^{2}}\right]^{-3\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dl \left[1 + \frac{l^{2}}{r_{0}^{2} + d_{A}^{2}\theta^{2}}\right]^{-3\beta}$$

$$= 2r_{0} \left[1 + \left(\frac{\theta}{\theta_{0}}\right)^{2}\right]^{-3\beta+1/2} \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^{2})^{3\beta}}}_{\Gamma(3\beta-1/2)\sqrt{\pi/2}/\Gamma(3\beta)} (\theta_{0} \equiv r_{0}/d_{A})$$

$$= \sqrt{\pi}r_{0} \frac{\Gamma(3\beta - 1/2)}{\Gamma(3\beta)} \left[1 + \left(\frac{\theta}{\theta_{0}}\right)^{2}\right]^{-3\beta+1/2} . \qquad (2.2.4)$$

ここで、 $\theta_0 \equiv r_0/d_A$ はコア角半径、 d_A は銀河団までの angular diameter distance と呼ばれる宇宙論的距離で、

$$d_{A}(z) = \frac{c}{H_{0}(1+z)} \begin{cases} \sin\left(\chi\sqrt{\Omega_{0}+\lambda_{0}-1}\right)/\sqrt{\Omega_{0}+\lambda_{0}-1} & (\Omega_{0}+\lambda_{0}-1>0)\\ \chi & (\Omega_{0}+\lambda_{0}-1=0)\\ \sinh\left(\chi\sqrt{1-\Omega_{0}-\lambda_{0}}\right)/\sqrt{1-\Omega_{0}-\lambda_{0}} & (\Omega_{0}+\lambda_{0}-1<0) \end{cases}, \quad (2.2.5)$$

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}}$$
(2.2.6)

で与えられる。



図 2.3: Angular diameter distance $d_A(z)$ の宇宙論パラメータ依存性。

第3章 Sunyaev – Zel'dovich効果

3.1 銀河団内高温ガスによるマイクロ波背景輻射光子の逆コ ンプトン散乱:Kompaneetz方程式

銀河団は、可視域(メンバー銀河からの輻射の足し合わせ)、X線領域(高温ガスからの熱制動輻射)に加えて、スニャーエフ・ゼルドヴィッチ (SZ)効果と呼ばれる現象を通じて電波領域でも観測できる。これは、 $T_{CMB} = 2.7$ Kのマイクロ波背景輻射 (CMB: Cosmic Microwave Background) 光子が銀河団を通過する際に、典型的に $T_{\rm e} \sim$ 数 keVの温度を持つ電子との逆コンプトン散乱によってエネルギーをもらうためである。この結果、銀河団方向とそれ以外の方向との CMB の "温度"に差が生じる。興味深いことに、波長 1.38mmを境にして、短波長側 (サブミリ波領域) では温度が上昇するが、長波長 (ミリ波・マイクロ波領域)では、温度が低下する。



図 3.1: スニャーエフ・ゼルドヴィッチ効果の概念図。

この物理過程は、カンパニエーツ (Kompaneetz) 方程式とよばれる以下の式によって記述 される。

$$t_{\rm c}\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{kT_{\rm e}}{m_{\rm e}c^2}\right)\frac{1}{x_{\rm e}^2}\frac{\partial}{\partial x_{\rm e}}\left[x_{\rm e}^4\left\{\frac{\partial f}{\partial x_{\rm e}} + f(f+1)\right\}\right]$$
(3.1.1)

$$t_{\rm c} \equiv \frac{1}{n_{\rm e}\sigma_T c} (\mathbf{\Psi} \mathbf{D} \mathbf{\Phi} \mathbf{\nabla} \mathbf{F} \mathbf{B}), \qquad x_{\rm e} \equiv \frac{h\nu}{kT_{\rm e}}. \tag{3.1.2}$$

ここで、 $f = f(\nu, t)$ は時刻 t における周波数 ν を持つ光子の分布関数、 t_c はその光子が電子と衝突する平均時間間隔、 x_e は電子のエネルギーで規格化した光子のエネルギーである。 Bose-Einstein 分布はこの方程式の定常解になっている。

今興味があるのは、銀河団に入射する時刻 (t = 0とする) に、温度 T_{CMB} のプランク分布:

$$f(\nu, t = 0) = \frac{1}{\exp(h\nu/kT_{CMB}) - 1}$$
(3.1.3)

を持っていた光子が、銀河団を通過する際にどのようなスペクトル変形を受けるかである。 そこでまず (3.1.1) 式を次に定義する *x* とコンプトンの *y* パラメータ:

$$x \equiv \frac{h\nu}{kT_{CMB}} = \frac{T_{\rm e}}{T_{CMB}} x_{\rm e}, \qquad y(t) \equiv \int_0^t \frac{k(T_{\rm e} - T_{CMB})}{m_{\rm e}c^2} n_{\rm e}\sigma_T c dt$$
(3.1.4)

を用いて書き直すと、

$$f(f+1) \approx -\frac{\partial f}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$
 (3.1.5)

3.2 SZ効果によるCMBスペクトルの変形

(3.1.4)式は、半径 $R_{\rm cl}$ 、電子密度 $n_{\rm e}$ を持つ銀河団に対しては近似的に

$$y = \int_{-R_{\rm cl}}^{R_{\rm cl}} \frac{kT_{\rm e}}{m_e c^2} \sigma_{\rm T} n_{\rm gas} dl$$
(3.2.1)

となる。この式は、上述の t_c と光子の銀河団を通過する時間 t_{cross} :

$$t_{\rm c} = \frac{1}{n_{\rm e}\sigma_T c} \approx 5 \times 10^{16} \left(\frac{10^{-3} {\rm cm}^{-3}}{n_{\rm gas}}\right) \mathcal{P}, \quad t_{\rm cross} \approx \frac{2R_{\rm cl}}{c} \approx 3 \times 10^{14} \left(\frac{R_{\rm cl}}{1.5 {\rm Mpc}}\right) \mathcal{P} \quad (3.2.2)$$

を用いて、

$$y \approx \frac{kT_{\rm e}}{m_e c^2} \frac{t_{\rm cross}}{t_{\rm c}} \sim 10^{-4} \left(\frac{T_e}{10 \rm keV}\right) \left(\frac{R_{\rm cl}}{1.5 \rm Mpc}\right) \left(\frac{10^{-3} \rm cm^{-3}}{n_{\rm gas}}\right).$$
(3.2.3)

yパラメータは、銀河団を通過する光子の散乱確率に比例しており、典型的には $\sim 10^{-4}$ 程度の値をとる。つまり、銀河団は CMB 光子に対しては光学的に薄い。したがって (3.1.5)式は、逐次近似で解くことができる。

具体的には、

$$f(x,y) \approx f(x,0) + \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial}{\partial x} f(x,0) \right)$$
 (3.2.4)

$$f(x,0) = \frac{1}{e^x - 1} \tag{3.2.5}$$

として、計算すれば、

$$f(x,y) \approx \frac{1}{e^x - 1} + \frac{xye^x}{(e^x - 1)^2} \left[x \coth \frac{x}{2} - 4 \right]$$
(3.2.6)

となる。この結果から、

輻射強度 $I_{\nu}(\nu)$:

$$I_{\nu}(x,y) \equiv \frac{1}{4\pi} 2 \frac{h\nu}{c^2} 4\pi \nu^2 f(x,y) = x^3 f(x,y) \frac{2(kT_{CMB})^3}{h^2 c^2}$$

$$\approx i_0 x^3 f(x,0) + i_0 \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} y \left[x \coth \frac{x}{2} - 4 \right]$$
(3.2.7)

ΞΞ Ĉ, $i_0 \equiv \frac{2(kT_{CMB})^3}{h^2 c^2} \approx 2.6 \times 10^{-15} \text{erg/s/cm}^2/\text{Hz/str} \approx 2.2 \times 10^4 \text{mJy/arcmin}^2.$ (3.2.8)

したがって、相対的変化分は

$$\frac{\Delta I_{\nu}}{I_{\nu}} \approx y \frac{x e^x}{e^x - 1} \left(x \coth \frac{x}{2} - 4 \right). \tag{3.2.9}$$

輝度温度 $T_B(\nu)$:

$$f(x,y) \equiv \left(\exp\frac{h\nu}{kT_B} - 1\right)^{-1} \to T_B(x,y) = \frac{xT_{CMB}}{\ln[f^{-1}(x,y) + 1]}.$$
 (3.2.10)

(3.2.6) 式を代入すると、

$$\ln[f^{-1}(x,y)+1] \approx x - yx\left(x \coth\frac{x}{2} - 4\right).$$
 (3.2.11)

したがって、相対的変化分は

$$\frac{\Delta T_B}{T_{CMB}} \approx y \left(x \coth \frac{x}{2} - 4 \right). \tag{3.2.12}$$

Rayleigh – Jeans temperature $T_{RJ}(\nu)$: Rayleigh – Jeans 領域では、

$$I_{\nu} \equiv \frac{2\nu^2}{c^2} k T_{\rm RJ} \tag{3.2.13}$$

として温度を定義することがある。この定義に従えば、

$$\frac{\Delta T_{\rm RJ}}{T_{\rm CMB}} \approx y \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \left(x \coth \frac{x}{2} - 4 \right). \tag{3.2.14}$$

kinematic SZ 効果 ΔI_{ν}^{K} : ここまでは、銀河団中の高温電子の熱制動輻射による熱的 SZ 効果であるが、実はこれ以外に銀河団の観測者の視線方向への特異速度 v に起因した項

もあり、kinematic SZ 効果と呼ばれている。その相対的変化分は

で与えられる。

以上をまとめたものが図 3.2 と図 3.3 である。SZ 効果の周波数 ν 依存性は、個々の銀河 団の性質とは無関係に、 $x \equiv h\nu/kT_{CMB} \approx 11.8(0.45 \text{mm}/\lambda)$ だけに依存した普遍的な関数に 比例する。熱的 SZ 効果の符号は $x \coth(x/2) - 4$ によって決まるが、その零点は

$$x = 3.83, \quad \nu = 218 \text{GHz}, \quad \lambda = 1.38 \text{mm}$$
 (3.2.16)

である。したがって、熱的 SZ 効果のために銀河団は、ある臨界波長 (1.38mm) 以下のサブミ リ波領域では正、それ以上の電波領域では実効的に負のソースとなる。一方、kinematic SZ 効果の符号は、特異速度の向きによって決まり、逆にその振幅が最大になる場所が (3.2.16) 式で与えられる。

また、 $x \to 0$ の Rayleigh–Jeans 極限を取れば、

$$\frac{\Delta I_{\nu}}{I_{\nu}} = \frac{\Delta T_B}{T_{CMB}} = \frac{\Delta T_{\rm RJ}}{T_{CMB}} = -2y \tag{3.2.17}$$

となる。





図 3.2: SZ効果による CMB スペクトル変形。SZ 輻射 強度 $\Delta I_{\nu} \approx i_0 y x^4 e^x / (e^x - 1)^2 [x \coth(x/2) - 4]$, SZ 相対 輻射強度比 $\Delta I_{\nu} / I_{\nu} \approx y x e^x / (e^x - 1) [x \coth(x/2) - 4]$, SZ 相対輝度温度比 $\Delta T_B / T_{CMB} \approx y [x \coth(x/2) - 4]$, kinematic SZ 相対輻射強度比 $\Delta I_{\nu}^{\rm K} / I_{\nu} \approx y x e^x / (e^x - 1) (v/c) \tau$.

図 3.3: SZ 効果による輻射スペク トル。上図:SZ 効果による変形 がある場合 (y = 0.1) とない場合 のマイクロ波背景輻射のスペクト ル。下図:SZ 効果のスペクトル。



 \boxtimes 3.4: Projected views of cluster A at z = 1 and $z \approx 0$. A box of $(4 \text{Mpc})^3$ (in physical lengths) located at the center of each cluster is extracted. The X-ray emission-weighted temperature (T_X) , X-ray surface brightness (S_X) , and the SZ surface brightness at mm and submm bands ($|\Delta I_{\rm mm}|$ and $\Delta I_{\rm submm}$) are plotted on the projected X-Y plane by integrating over the line-of-sight direction (Z). (Yoshikawa, Itoh & Suto 1998)

3.3 yパラメータのプロファイル

再び、等温 β モデル:

$$n_{\rm gas}(r) = n_{\rm gas,0} \left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right]^{-3\beta/2}, \quad \beta = \frac{\mu m_p \sigma_{\rm r}^2}{kT}, \quad r_0: \exists \mathcal{P} \# \mathcal{E}$$
(3.3.1)

を採用して、yパラメータのプロファイルを求めてみよう。(2.2.4)式と同様にして、

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kT_{\rm e}}{m_e c^2} \sigma_{\rm T} n_{\rm gas}(r) dl = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3\beta/2 - 1/2)}{\Gamma(3\beta/2)} \left(\frac{kT_{\rm e}}{m_e c^2}\right) \sigma_{\rm T} n_{\rm gas,0} r_0 \left[1 + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right]^{-3\beta/2 + 1/2}.$$
 (3.3.2)

意味もなく式が複雑になってきたので、オーダーを考えてみる。典型的には、銀河団は、 $\beta \sim 1, T \sim 5 \text{keV}, n_{\text{gas},0} \sim 3 \times 10^{-3} \text{cm}^{-3}, r_0 \sim 0.3 \text{Mpc}, z = 0.1 (d_A(z) \sim 300 \text{Mpc})$ という 値をとり、これらを具体的に代入すれば、コア角半径は $\theta_0 \sim 3', y(\theta)$ は、

$$y(\theta) \approx \frac{4 \times 10^{-5}}{1 + (\theta/3')^2}$$
 (3.3.3)

といったところである。



 \boxtimes 3.5: Three views of the cluster A2218: (a) The HST image of the central core region (Kneib et al. 1996) (b) The BIMA 28.5 GHz naturally weighted contours with VLA D-array NVSS observations in the background. The small rectangle roughly indicates the region of the HST image. (c) The detected SZE, after accounting for the bright radio sources. The background of this map is the ROSAT PSPC image, smoothed with a 20" FWHM Gaussian (Carlstrom et al. astro-ph/9804149).



図 3.6: スニャーエフ・ゼルドヴィッチ効果で観測された銀河団の例。Images of the Sunyaev-Zel'dovich effect toward twelve distant clusters with redshifts spanning 0.83 (top left) to 0.14 (bottom right). The evenly spaced contours are multiples starting at ± 1 of 1.5σ to 3σ depending on the cluster, where σ is the rms noise level in the images. The noise levels range from 15 to 40 μ K. The data were taken with the OVRO and BIMA mm-arrays outfitted with low-noise cm-wave receivers. The filled ellipse shown in the bottom left corner of each panel represents the FWHM of the effective resolution used to make these images (Carlstrom et al. astro-ph/9905255).

cluster	z	$T_e \; [\text{keV}]$	$L_X[10^{44}h_{50}^{-2} \text{ erg s}^{-1}]$	band [keV]
MS $1137.5 + 6625$	0.784	$5.7^{+1.3}_{-0.7}$	5.4	0.3 - 3.5
MS $0451.6 - 0305$	0.550	$10.4^{+1.0}_{-0.8}$	20.0	0.3 - 3.5
$Cl \ 0016 + 16$	0.546	$7.55_{-0.58}^{+0.72}$	14.6	0.3 - 3.5
RX J1347.5 -1145	0.451	$9.3\substack{+0.7 \\ -0.6}$	73.0	0.1 - 2.4
Abell 370	0.374	$6.6\substack{+0.7\\-0.5}$	11.7	0.1 - 2.4
MS $1358.4 + 6245$	0.327	$7.48^{+0.50}_{-0.42}$	10.6	0.3 - 3.5
Abell 1995	0.322	$8.59\substack{+0.86\\-0.67}$	13.4	0.1 - 2.4
Abell 611	0.288	$6.6^{+0.6}_{-0.6}$	8.6	0.1 - 2.4
Abell 697	0.282	$9.8^{+0.7}_{-0.7}$	19.2	0.1 - 2.4
Abell 1835	0.252	$8.21\substack{+0.19\\-0.17}$	32.6	0.1 - 2.4
Abell 2261	0.224	$8.82^{+0.37}_{-0.32}$	20.6	0.1 - 2.4
Abell 773	0.216	$9.29_{-0.36}^{+0.41}$	12.1	0.1 - 2.4
Abell 2163	0.202	$12.2^{+1.1}_{-0.7}$	37.5	0.1 - 2.4
Abell 520	0.202	$8.33\substack{+0.46\\-0.40}$	14.5	0.1 - 2.4
Abell 1689	0.183	$9.66\substack{+0.22\\-0.20}$	20.7	0.1 - 2.4
Abell 665	0.182	$9.03_{-0.31}^{+0.35}$	15.7	0.1 - 2.4
Abell 2218	0.171	$7.05_{-0.21}^{+0.22}$	8.2	0.1 - 2.4
Abell 1413	0.142	$7.54_{-0.16}^{+0.17}$	10.9	0.1 - 2.4

表 3.1: Cluster Sample (L_X is computed for EdS model).

表 3.2: ICM Parameters

cluster	eta	$ heta_c$ ["]	$S_{\rm x0} \ [{\rm erg/s/cm^2/arcmin^2}]$	$\Delta T_0 \; [\mu \mathrm{K}]$	$D_A [\mathrm{Mpc}]$
MS1137	$0.786^{+0.220}_{-0.120}$	$19.4_{-4.0}^{+6.4}$	$4.43_{-0.59}^{+0.74} \times 10^{-13}$	-818^{+98}_{-113}	3179^{+1103}_{-1640}
MS0451	$0.806\substack{+0.052\\-0.043}$	$34.7^{+3.9}_{-3.5}$	$9.56^{+0.86}_{-0.84} \times 10^{-13}$	-1431^{+98}_{-93}	1278^{+265}_{-299}
Cl0016	$0.749_{-0.018}^{+0.024}$	$42.3_{-2.0}^{+2.4}$	$6.17_{-0.28}^{+0.22} \times 10^{-13}$	-1242^{+105}_{-105}	2041^{+484}_{-514}
R1347	$0.604_{-0.012}^{+0.011}$	$9.0^{+0.5}_{-0.5}$	$2.74_{-0.14}^{+0.16} \times 10^{-11}$	-3950^{+350}_{-350}	1221_{-343}^{+368}
A370	$0.518^{+0.090}_{-0.080}$	$39.5^{+10.5}_{-10.5}$	$2.70^{+0.43}_{-0.30} \times 10^{-13}$	-1253^{+218}_{-533}	4352^{+1388}_{-1245}
MS1358	$0.622\substack{+0.015\\-0.015}$	$18.2^{+1.4}_{-1.5}$	$1.70^{+0.15}_{-0.11} \times 10^{-12}$	-784_{-90}^{+90}	866^{+248}_{-310}
A1995	$0.770_{-0.063}^{+0.117}$	$38.9^{+6.9}_{-4.3}$	$1.08^{+0.08}_{-0.07} \times 10^{-12}$	-1023^{+83}_{-77}	1119^{+247}_{-282}
A611	$0.565\substack{+0.050\\-0.040}$	$17.5^{+3.5}_{-3.5}$	$2.01^{+0.36}_{-0.26} \times 10^{-12}$	-853^{+120}_{-140}	995^{+325}_{-293}
A697	$0.540^{+0.045}_{-0.035}$	$37.8^{+5.6}_{-4.0}$	$1.02^{+0.07}_{-0.08} \times 10^{-12}$	-1410^{+160}_{-180}	998^{+298}_{-250}
A1835	$0.595\substack{+0.007\\-0.005}$	$12.2_{-0.5}^{+0.6}$	$2.02_{-0.10}^{+0.14} \times 10^{-11}$	-2502^{+150}_{-175}	1027^{+194}_{-198}
A2261	$0.516\substack{+0.014\\-0.013}$	$15.7^{+1.2}_{-1.1}$	$4.31_{-0.26}^{+0.26} \times 10^{-12}$	-1697^{+200}_{-200}	1049^{+306}_{-272}
A773	$0.597\substack{+0.064\\-0.032}$	$45.0^{+7.0}_{-5.0}$	$8.28^{+0.65}_{-0.65} \times 10^{-13}$	-1260^{+160}_{-160}	1450^{+361}_{-332}
A2163	$0.674_{-0.008}^{+0.011}$	$87.5^{+2.5}_{-2.0}$	$1.36^{+0.03}_{-0.03} \times 10^{-12}$	-1900^{+140}_{-140}	828^{+181}_{-205}
A520	$0.844_{-0.040}^{+0.040}$	$123.3_{-8.0}^{+8.0}$	$4.08^{+0.18}_{-0.18} \times 10^{-13}$	-662^{+95}_{-95}	723^{+270}_{-236}
A1689	$0.609\substack{+0.005\\-0.005}$	$26.6_{-0.7}^{+0.7}$	$6.01^{+0.18}_{-0.15} \times 10^{-12}$	-1729^{+105}_{-120}	688^{+172}_{-163}
A665	$0.615\substack{+0.006\\-0.006}$	$71.7^{+1.5}_{-1.5}$	$6.78_{-0.12}^{+0.12} \times 10^{-13}$	-728^{+150}_{-150}	466^{+217}_{-179}
A2218	$0.692\substack{+0.008\\-0.008}$	$67.5^{+1.5}_{-1.8}$	$7.08_{-0.14}^{+0.16} \times 10^{-13}$	-731^{+125}_{-100}	1029^{+339}_{-352}
A1413	$0.639\substack{+0.009\\-0.009}$	$47.7^{+2.0}_{-2.0}$	$2.04^{+0.09}_{-0.09} \times 10^{-12}$	-856^{+110}_{-110}	$573_{-151}^{+17\overline{1}}$



 \boxtimes 3.7: SZE (contours) and X-ray (color scale) images of each cluster in our sample. Negative contours are shown as solid lines. The contours are multiples of 2 σ and the FWHM of the synthesized beams are shown in the bottom left corner. The X-ray color scale images are raw counts images smoothed with Gaussians with $\sigma = 15''$ for PSPC data and $\sigma = 5''$ for HRI data. There is a color scale mapping for the counts above each image.



 \boxtimes 3.8: SZE (contours) and X-ray (color scale) images (continued). (Reese et al. astro-ph/0205350)

3.4 SZ効果を用いた angular diameter distance の推定

さて、SZ効果は銀河団内ガスの物理状態に関して多くの情報を与えてくれるが、実はX 線の観測データと組み合わせることで、その銀河団までの距離と、CMBの静止系に対して 相対的に運動している速度(特異速度)を推定することをも可能にする。これは定性的に は次のように理解できる。まず、SZ効果の観測量である y パラメータは、(3.2.1) 式より

$$y \propto r_0 T n_{\text{gas},0} \tag{3.4.1}$$

の関係を持つ。一方、X 線観測からは、銀河団の温度T、角半径 θ_0 、および輻射強度 S_X が 独立に決定できる。

$$S_X \propto r_0 T^{1/2} n_{\text{gas.0}}^2$$
 (3.4.2)

という関係と、銀河団までの距離 d_A が r_0/θ_0 で与えられることを使うと、(3.4.1) 式と(3.4.2) 式より

$$d \propto \frac{y^2}{S_X T^{3/2} \theta_0}$$
 (3.4.3)

が得られる。この式の比例定数は銀河団の密度・温度分布プロファイルから決まる。銀河 団のように極めて遠方にある天体までの距離を、物理的な原理に基づいて決定できるのは、 この SZ 効果を用いる方法だけである。距離がわかれば、いわゆるハッブルの法則を用いて、 宇宙の膨張率であるハッブル定数 H₀を決定できる。さらに、観測される後退速度から宇宙 膨張の速度を差し引けば、銀河団の特異速度を推定できる(実は、特異速度に特徴的な運 動学的 SZ 効果というものも存在し、それが観測できればさらに信頼性の高い特異速度決定 が可能である)。このように銀河団は、多波長で宇宙の端までを観測することを可能にして くれる天体である。

ここでは、銀河団が球対称であるという仮定が本質的である。また、実際には、等温、銀 河団ガス内での非一様成分がないこと、なども仮定している。したがって、この結果は大 きな系統誤差を含む可能性があり、数多くの銀河団を用いて統計平均をとることが重要で ある。

これで SZ 効果を用いた距離推定の原理はすべてであるが、念のために具体的な計算をす る場合に必要となる式 (ただし、等温 β モデルを仮定した場合の中心値)をもう一度まとめ て列挙しておく。

yパラメータ:実際には、銀河団は厳密には 等温 β モデルに従うわけではないから、SZ効 果から得られた β パラメータおよびコア角半径 θ_0 はX線データのものと違っている 可能性がある。したがって、前者を β_{SZ} 、 $\theta_{SZ,0}$ 後者を β_X , $\theta_{X,0}$ として区別しておく。

$$y(0) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3\beta_{\rm SZ}/2 - 1/2)}{\Gamma(3\beta_{\rm SZ}/2)} \left(\frac{kT_{\rm e}}{m_e c^2}\right) \sigma_{\rm T} n_{\rm gas,0} d_{\rm A}(z) \theta_{\rm SZ,0}.$$
 (3.4.4)

RJ 温度低下:

$$\frac{\Delta T_{\rm RJ}}{T_{\rm CMB}}(0) = -y(0)\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \left(4 - x \coth\frac{x}{2}\right) \equiv -2y(0)\xi(x). \tag{3.4.5}$$

ここで、 $\xi(x)$ はRJ極限で1となるように選んだ周波数依存性を示す関数:

$$\xi(x) \equiv \frac{x^2 e^x}{2(e^x - 1)^2} \left(4 - x \coth \frac{x}{2} \right), \qquad x \equiv \frac{h\nu}{kT_{CMB}}.$$
 (3.4.6)

X線表面輝度:観測するX線の周波数を $\nu_1 < \nu < \nu_2$ とすると、

$$S_X(\theta) = \frac{1}{4\pi (1+z)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_{\nu_1(1+z)}^{\nu_2(1+z)} \frac{d^2 L_X}{d\nu dV} d\nu, \qquad (3.4.7)$$

熱制動輻射に対する単位周波数あたりの体積放射率は

$$\frac{d^2 L_X}{d\nu dV} = \alpha(T_e) n_{gas}^2(r) \overline{g}_{ff}(T_e, \nu) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e}\right), \qquad (3.4.8)$$

$$\alpha(T_{\rm e}) \equiv \frac{2^5 \pi e^6}{3m_e c^2} \left(\frac{2\pi}{3m_e c^2 k T_{\rm e}}\right)^{1/2} \frac{2}{1+X}.$$
(3.4.9)

これを代入すると

$$S_X(0) = \frac{\alpha(T_{\rm e})kT_{\rm e}}{h} \frac{n_{\rm gas,0}^2 d_A(z)\theta_{\rm X,0}}{4\sqrt{\pi}(1+z)^4} \frac{\Gamma(3\beta_X - 1/2)}{\Gamma(3\beta_X)} \int_{h\nu_1(1+z)/kT_{\rm e}}^{h\nu_2(1+z)/kT_{\rm e}} \overline{g}_{ff} {\rm e}^{-x} dx, \quad (3.4.10)$$

angular diameter distance : (3.4.5) 式と(3.4.10) 式において、直接の観測量でないのは、 $n_{gas,0}$ と $d_A(z)$ 。したがって、この2 式から $n_{gas,0}$ を消去して整理すれば、

$$d_{A}(z) = \frac{\alpha(T_{\rm e})kT_{\rm e}}{16\pi^{3/2}h\sigma_{T}^{2}(1+z)^{4}} \left(\frac{m_{e}c^{2}}{kT_{\rm e}}\right)^{2} \frac{\Gamma(3\beta_{X}-1/2)}{\Gamma(3\beta_{X})} \left(\frac{\Gamma(3\beta_{\rm SZ}/2)}{\Gamma(3\beta_{\rm SZ}/2-1/2)}\right)^{2} \\ \times \frac{(\Delta T_{\rm RJ}/T_{CMB}(0))^{2}}{\xi^{2}(x)S_{X}(0)} \frac{\theta_{\rm X,0}}{\theta_{\rm SZ,0}^{2}} \int_{h\nu_{1}(1+z)/kT_{\rm e}}^{h\nu_{2}(1+z)/kT_{\rm e}} \overline{g}_{ff} e^{-x} dx.$$
(3.4.11)



図 3.9: スニャーエフ・ゼルドヴィッチ効果から得られた angular diameter distance のまと め。 Also plotted is the theoretical angular diameter distance relation for three different cosmologies, assuming $H_0 = 60$ km/s/Mpc. (1) Reese et al (2000), (2) Mauskopf et al. (2000), (3) Reese et al (2000), (4) Patel et al. (2000), (5) Grainge et al. (2000), (6) Saunders et al. (2000), (7) Andreani et al. (1999), (8) Komatsu et al. (1999), (9) Myers et al. (1997), (10) Lamarre et al. (1998). (11) Tsuboi et al. (1998), (12) Hughes et al. (1998), (13) Holzapfel et al. (1997), (14) Birkinshaw et al. (1994), (15) Birkinshaw et al. (1991) (Carlstrom et al. astro-ph/0103480).



 \boxtimes 3.10: D_A versus z for our 18 cluster sample. The error bars are 68.3% statistical uncertainties only. Also plotted are the theoretical angular diameter distance relations assuming $H_0 = 60 \text{km/s/Mpc}$ for three different cosmological models; the currently favored Λ cosmology $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ (solid) cosmology; an open $\Omega_m = 0.3$ (dashed) universe; and a flat $\Omega_m = 1$ (dotted) cosmology.

第4章 Press – Schechter 理論

4.1 球対称非線形モデル

線形領域における密度ゆらぎの成長は、重力不安定理論において最も基礎となるもので、 前節のように一般論を展開することが可能である。一方、興味ある宇宙の構造はほとんど の場合非線型領域にあるため、どうしても非線型性をとりいれることが必要であるが、こ の場合は一般論を展開することはできず、何らかの近似を取り入れざるを得ない。ここで は、ある質量 *M* を持つ球対称な物体の運動をニュートン力学で考えてみる。

時刻 t におけるこの物体の半径を r(t) とすると、運動方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}.$$
(4.1.1)

この方程式の $t \to \infty$ で収縮する解は、Cを正の定数として

$$r = \frac{GM}{C}(1 - \cos\theta), \qquad t = \frac{GM}{C^{3/2}}(\theta - \sin\theta).$$
(4.1.2)

まず、 $\theta \ll 1$ の場合に、この物体の平均密度を計算すると

$$\bar{\rho}(< r; t) \equiv \frac{3M}{4\pi r(t)^3} = \frac{1}{6\pi G t^2} \left[1 + \frac{3C}{20} \left(\frac{6t}{GM}\right)^{2/3} + \cdots \right]$$
(4.1.3)

となり、確かに Einstein – de Sitter モデルでの平均密度と線形ゆらぎの成長則を再現している。

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}, \qquad \delta_{linear}(< r; t) \equiv \frac{3C}{20} \left(\frac{6t}{GM}\right)^{2/3}.$$
 (4.1.4)

このモデルによれば、球対称非線形ゆらぎの成長に関する特徴的な結果が導かれる。その一つは、turn-around あるいは maximum expansion と呼ばれる、宇宙膨張を振り切って物体が実際に収縮を開始するための条件である。式 (4.1.2) によれば、この時期は

$$r_{ta} = \frac{2GM}{C}, \qquad \theta_{ta} = \pi, \qquad t_{ta} = \frac{\pi GM}{C^{3/2}}.$$
 (4.1.5)

このモデルの重要な帰結は、turn-around の時期の物体の平均密度と宇宙の平均密度の比が 初期条件 (*C*) や質量 (*M*) には無関係な一定値:

$$\frac{\bar{\rho}(< r; t_{ta})}{\bar{\rho}(t_{ta})} = \frac{9\pi^2}{16} \sim 5.55 \tag{4.1.6}$$

をとることである。これは(4.1.4)式から、線形理論を用いた場合にゆらぎの振幅が

$$\delta_{linear}(\langle r; t_{ta}) = \frac{3}{20} (6\pi)^{2/3} \sim 1.06 \tag{4.1.7}$$

となる時期に対応する。

同様にして、この物体が"収縮"する条件を導くことができる。この時期は形式的には

$$\theta_c = 2\pi, \qquad t_c = 2t_{ta} = \frac{2\pi GM}{C^{3/2}}$$
(4.1.8)

で与えられるが、現実的にはすべての質量が一点に集中することは起こり得ない。そこで 実際には、"収縮"後 ただちに(その系の重力的進化の時間スケールで)重力的緩和が起 こり、ビリアル平衡の状態に達するものと近似する。その際、密度分布が相似的に変化し、 かつエネルギー散逸が無視できるとすれば、この系のビリアル半径は

$$r = r_{\rm vir} = \frac{r(\theta_{ta})}{2} = \frac{GM}{C} \tag{4.1.9}$$

で与えられる。これを物体の半径だと考えて、それ以降 宇宙膨張とは切り離されて孤立 した物体として力学的な進化はしないものとすれば、この物体内の平均密度は *t* > *t_c* で一定値:

$$\bar{\rho}(\langle r_{\rm vir}) = \bar{\rho}(\langle r; t_c) \equiv \Delta_c \bar{\rho}(t_c) = 18\pi^2 \bar{\rho}(t_c) \sim 177.7 \bar{\rho}(t_c)$$
(4.1.10)

を保つであろう。(4.1.7)式と同様に線形理論の値で言えば

$$\delta_{linear}(< r; t_c) = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} \equiv \delta_c \sim 1.69 \tag{4.1.11}$$

に対応する時期が、この物体の収縮、つまり、形成された時期であると考えられる。(4.1.10) 式および(4.1.11)式は、宇宙論的な天体の形成を議論する場合に頻繁に用いられる重要な結 果である。また、この結果はEinstein – de Sitter モデル以外の場合にも一般化できる。以 下に、その結果をまとめておこう。

• Einstein – de Sitter モデル ($\Omega_0 = 1, \lambda_0 = 0$)

$$\Delta_{\rm c} = 18\pi^2 \simeq 178, \tag{4.1.12}$$

$$\delta_{\rm c} = \frac{3(12\pi)^{2/3}}{20} \simeq 1.69,$$
 (4.1.13)

• 宇宙項のない開いたモデル ($\Omega_0 < 1, \lambda_0 = 0$)

$$\Delta_{\rm c} = 4\pi^2 \frac{(\cosh \eta_{\rm vir} - 1)^3}{(\sinh \eta_{\rm vir} - \eta_{\rm vir})^2}, \qquad (4.1.14)$$

$$\delta_{\rm c} = \frac{3}{2} \left[\frac{3\sinh \eta_{\rm vir}(\sinh \eta_{\rm vir} - \eta_{\rm vir})}{(\cosh \eta_{\rm vir} - 1)^2} - 2 \right] \left[1 + \left(\frac{2\pi}{\sinh \eta_{\rm vir} - \eta_{\rm vir}} \right)^{2/3} \right], (4.1.15)$$

• 正の宇宙項を持つ平坦なモデル $(\Omega_0 < 1, \lambda_0 = 1 - \Omega_0)$

$$\Delta_{\rm c} = \left(\frac{r_{\rm ta}}{r_{\rm vir}}\right)^3 \frac{2w_{\rm vir}}{\chi},$$

$$\simeq 18\pi^2 (1 + 0.4093 w_{\rm vir}^{0.9052}),$$

$$\delta_{\rm c} = \frac{3}{5} F\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{11}{6}; -w_{\rm vir}\right) \left(\frac{2w_{\rm vir}}{\chi}\right)^{1/3} \left(1 + \frac{\chi}{2}\right),$$

$$\simeq \frac{3(12\pi)^{2/3}}{20} (1 + 0.0123 \log_{10} \Omega_{\rm vir}).$$
(4.1.16)

ここで、 $\eta_{\text{vir}} \equiv \cosh^{-1}(2/\Omega_{\text{vir}} - 1), w_{\text{vir}} \equiv 1/\Omega_{\text{vir}} - 1, \chi \equiv \lambda_0 H_0^2 r_{\text{ta}}^3/(GM), F \text{ ls}(2,1) 型の$ 超幾何関数, Ω_{vir} ls t_c での密度パラメータである。図 4.1 に Δ_c と δ_c を Ω_{vir} の関数として示す。



図 4.1: $\delta_c \geq \Delta_c$ 。実線が 開いた宇宙モデル($\lambda_0 = 0$)、点線は平坦な宇宙モデル($\lambda_0 = 1 - \Omega_0$)の場合である。

4.2 ダークハローの質量関数

宇宙初期の密度ゆらぎが非線型成長を遂げ、宇宙膨張から分離して自己重力で収縮して 平衡状態となった領域(以下、ハローと呼ぶ)が、銀河団の起源であると考えられる。し たがって、密度ゆらぎのスペクトルの形と振幅を与えて、非線型重力収縮をする領域の分 布関数を計算できれば、それを実際の銀河団の存在量と比較することで宇宙モデルに対す る制限を得ることができるであろう。この理論計算に必然的に入り込む非線型性の効果を 巧妙に取り入れた方法が Press – Schechter 理論である。

ある時刻 z_i において質量 Mに対応する体積で平均化した密度ゆらぎの値を $\delta = \delta(M, z_i)$ とする。ランダムガウシアン密度場の場合、 δ の分布関数は、ゆらぎの rms 値 $\sigma_M(z_i)$ を用いて

$$P(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2(z_i)}} \exp\left[-\frac{\delta^2(M, z_i)}{2\sigma_M^2(z_i)}\right]$$
(4.2.1)

と書ける。§4.1 で紹介した非線型球対称理論によれば、この領域は線形理論を用いて推定した密度ゆらぎの値

$$\delta_{\text{linear}}(M, z) \equiv \frac{D(z)}{D(z_i)} \delta(M, z_i)$$
(4.2.2)

が δ_c を越えた時期 z に収縮を開始する。非線型成長のために、実際にはzでのゆらぎの値 は $\delta_{\text{linear}}(M, z)$ ではないが、線形理論の外挿から収縮の判定条件が得られるために、非線型 理論を用いる困難を避けることができる。式 (4.2.1) と (4.2.2) を用いると質量 M の領域が z ですでに重力収縮している確率は

$$\mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M,z) > \delta_{\text{c}}] = \mathcal{P}\left[\delta(M,z_{i}) > \delta_{\text{c},\text{i}} \equiv \frac{D(z_{i})}{D(z)}\delta_{\text{c}}\right]$$
$$= \int_{\delta_{\text{c},\text{i}}}^{\infty} P(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\delta_{\text{c},\text{i}}/\sigma_{M}(z_{i})}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^{2}}{2}\right)dx \qquad (4.2.3)$$

で与えられる。

しかし実は、この確率に対応する領域は、同じ条件を満たすようなより大きな領域M'(>M)の内部に属する領域M までも含んでいる。これは質量Mを持つ孤立したハローにはなり得ない。つまり、zにおいて $M \sim M + dM$ が独立したハローである確率は、(4.2.3)式に加えてM + dMはまだ収縮していないという条件を同時に満たさなければならない。したがって、

$$p(M, z)dM = \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M, z) > \delta_{\text{c}}] \times \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M + dM, z) < \delta_{\text{c}}|\delta_{\text{linear}}(M, z) > \delta_{\text{c}}]$$

$$= \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M, z) > \delta_{\text{c}}] \times \{1 - \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M + dM, z) > \delta_{\text{c}}|\delta_{\text{linear}}(M, z) > \delta_{\text{c}}]\}$$

$$= \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M, z) > \delta_{\text{c}}] - \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M + dM, z) > \delta_{\text{c}}]$$

$$\approx -\frac{\partial \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M, z) > \delta_{\text{c}}]}{\partial M}dM \qquad (4.2.4)$$

が求める確率となるはずである。ランダムガウシアンの場合、この右辺は (4.2.3) 式から具体的に

$$\frac{\partial \mathcal{P}[\delta_{\text{linear}}(M,z) > \delta_{\text{c}}]}{\partial M} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\delta_{\text{c}}^2}{2\sigma_M^2(z)}\right] \frac{d}{dM} \left[\frac{\delta_{\text{c}}}{\sigma_M(z)}\right]$$
(4.2.5)

と計算できる。以上から、赤方偏移 z において質量 M から M + dM を持つハローの単位共動体積あたりの個数密度は

$$n(M,z)dM = \frac{\rho_0}{M}p(M,z)dM = -\frac{\rho_0\delta_c}{\sqrt{2\pi}M\sigma_M^2(z)}\frac{d\sigma_M(z)}{dM}\exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2(z)}\right]dM \qquad (4.2.6)$$

で与えられる。これから宇宙に存在する物質の質量密度を計算してみると

$$\int_{0}^{\infty} dM Mn(M,z) = \rho_{0} \int_{0}^{\infty} \left(-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial M}\right) dM = \rho_{0} \left[\mathcal{P}_{M=0} - \mathcal{P}_{M=\infty}\right]$$
$$= \frac{\rho_{0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^{2}}{2}\right) dx = \frac{\rho_{0}}{2}$$
(4.2.7)

となる。空間の任意の点において、十分小さい質量で平均すればそのゆらぎの値は δ_c を越 えているはずである。この考え方にたてば、すべての物質は、必ずある質量 M のハローの 一部になっているはずで、(4.2.7) 式の結果は ρ_0 となるべきであろう。このファクター2の ずれは、Press – Schechter 理論が提唱されてから 20 年近くたって初めて(部分的に)解決 された問題であり、その説明は本解説の程度を越える。そこで、以下ではその結果を踏ま えて (4.2.6) を 2 倍した

$$n_{PS}(M,z) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\rho_0}{M} \frac{\delta_c}{\sigma_M^2(z)} \frac{d\sigma_M(z)}{dM} \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2(z)}\right]$$
(4.2.8)

を(ハローに対する) Press – Schechter 質量関数と定義することにする。その導出から明ら かなように、これらの式に現れる量は線形理論から計算すべきものである。例えば $\sigma_M^2(z)$ は、線形ゆらぎスペクトルを代入して計算すべきものであり、それは非線型スペクトルを 代入して得られる(厳密な意味で正しい)密度ゆらぎの分散の値とは異なっていることに 注意すべきである。

この考え方を応用して、 z_0 に質量 M_0 を持つダークハローが、 $z_1(>z_0)$ に質量 $M_1(< M_0)$ というダークハローを progenitor として持っている条件付確率 $p(M_1, z_1|M_0, z_0)$ を求めることができる。この結果は、ダークハローの合体の確率と解釈でき、宇宙論的文脈での銀河進化モデルの構築において本質的な役割を果たしている。

ランダムガウシアン密度場において、 M_0 に対応するスケールで平均化したときの密度ゆ らぎの値が δ_0 という値をとることがわかっている空間のある一点を、 M_1 で平均化したとき にゆらぎが δ_1 となる条件付確率は、いわば揺らぎの0レベルを底上げしてやればよいから

$$P(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi [\sigma_{M_1}^2(0) - \sigma_{M_0}^2(0)]}} \exp\left[-\frac{(\delta_1 - \delta_0)^2}{2[\sigma_{M_1}^2(0) - \sigma_{M_0}^2(0)]}\right]$$
(4.2.9)

で、与えられる。この確率は、通常の PS 理論の (4.2.1) 式に対応するから、(4.2.4) 式にいたる議論を繰り返して適用すればよい。すなわち、まず、 M_1 という領域が z_1 ですでに重力収縮している確率:

$$\mathcal{P}(M_1, > \delta_{1c} | M_0, \delta_{0c}) \equiv \int_{\delta_{1c}}^{\infty} P(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_{0c}) d\delta_1, \qquad (4.2.10)$$

$$\delta_{1c} \equiv \delta_{c}[D(0)/D(z_{1})], \qquad (4.2.11)$$

$$\delta_{0c} \equiv \delta_{\rm c}[D(0)/D(z_0)] \tag{4.2.12}$$

を定義する。これから、*M*₁が孤立したハローであるという条件を付け加えると、

$$p(M_1, z_1 | M_0, z_0) = -2 \frac{\partial}{\partial M_1} \mathcal{P}(M_1, > \delta_{1c} | M_0, \delta_{0c}) \\ = \frac{\delta_{1c} - \delta_{0c}}{\sqrt{2\pi [\sigma_{M_1}^2(0) - \sigma_{M_0}^2(0)]^3}} \exp\left[-\frac{(\delta_{1c} - \delta_{0c})^2}{2[\sigma_{M_1}^2(0) - \sigma_{M_0}^2(0)]}\right] \frac{d\sigma_{M_1}^2(0)}{dM_1} (4.2.13)$$

が求める確率である。



図 4.2: ダークハローと銀河団の定義。

4.3 密度揺らぎの線形成長率

Press – Schechter 理論には、*D*(*z*) として密度揺らぎの線形成長率が必要となる。その導出はたいていの教科書に記述されているので、以下では結果をまとめておくにとどめる。

やるべきことは、 $\lambda \gg \lambda_J$ (圧力が無視できる物質、あるいは長波長の極限)の場合の線 形化されたゆらぎの時間発展方程式:

$$\ddot{\delta}_{\boldsymbol{k}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{\boldsymbol{k}} - 4\pi G\bar{\rho}\delta_{\boldsymbol{k}} = 0$$
(4.3.1)

に、具体的な宇宙モデルの解R(t)を代入して解くだけである。時間についての2階微分方程 式であるから、2つの独立解が存在するが、そのうち一つは時間的に減少する解(decaying solution)で、もう一つが増大する解(growing solution)である。一般解は、この2つの重ね 合わせであるが、decaying solutionの成分は、宇宙膨張につれてすぐ無視できるようにな るので、通常は growing solutionのみを考える。

実はこの方針は直接的である反面、実際にはかなり面倒な計算が必要である。そこで以下少し天下り的ではあるが、 $H(t) = \dot{a}/a$ を微分して宇宙膨張の式と組み合わせると、

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} = H_0^2 H \frac{3\Omega_0}{2R^3} = 4\pi G\bar{\rho}H$$
(4.3.2)

が成り立つことから出発する。これはまさに線形ゆらぎの満たす方程式 (4.3.1) そのもので あり、H(t)は t に関する単調減少関数であるから decaying solution に対応する。ここで、 求めたい growing solution を D(t)と書くことにすれば、(4.3.1) 式と (4.3.2) 式から、

$$a^{2}\frac{d}{dt}(\dot{D}H - D\dot{H}) + \frac{da^{2}}{dt}(\dot{D}H - D\dot{H}) = 0$$
(4.3.3)

を得る。この式から、線形成長率に対する表式:

$$D(t) \propto H(t) \int \frac{dt}{a^2 H^2(t)}$$
(4.3.4)

が導かれる。Dをtではなくzの関数として書くほうが便利なことが多い。

$$D(z) = \frac{5\Omega_0 H_0^2}{2} H(z) \int_z^\infty \frac{1+w}{H^3(w)} dw$$
(4.3.5)

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}$$
(4.3.6)

ここで、係数は $z \to \infty$ で 1/(1+z) となるように決めてある。 代表的な宇宙モデルの場合の線形成長率 D(z) をまとめておく。

(a) Einstein – de Sitter モデル ($\Omega_0 = 1, \lambda_0 = 0$)

$$D(z) \propto \frac{1}{1+z} \tag{4.3.7}$$

(b) 宇宙項のない開いたモデル ($\Omega_0 < 1, \lambda_0 = 0$)

$$D(z) \propto 1 + \frac{3}{x} + 3\sqrt{\frac{1+x}{x^3}} \ln\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}\right) \qquad x \equiv \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0(1+z)}$$
(4.3.8)

(c) 正の宇宙項を持つ平坦なモデル $(\Omega_0 < 1, \lambda_0 = 1 - \Omega_0)$

$$D(z) \propto \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} \int_0^x \left(\frac{u}{2 + u^3}\right)^{3/2} du \qquad x \equiv \frac{2^{1/3} (\Omega_0^{-1} - 1)^{1/3}}{1 + z}$$
(4.3.9)

これらに対して有用な近似式:

$$D(z) = \frac{g(z)}{1+z},$$
(4.3.10)

$$g(z) = \frac{5\Omega(z)}{2} \frac{1}{\Omega^{4/7}(z) - \lambda(z) + [1 + \Omega(z)/2][1 + \lambda(z)/70]},$$
(4.3.11)

$$\Omega(z) = \Omega_0 (1+z)^3 \left[\frac{H_0 (1+z)}{H(z)} \right]^2 = \frac{\Omega_0 (1+z)^3}{\Omega_0 (1+z)^3 + (1-\Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0} (4.3.12)$$

$$\lambda(z) = \lambda_0 \left[\frac{H_0}{H(z)} \right]^2 = \frac{\lambda_0}{\Omega_0 (1+z)^3 + (1-\Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}, \qquad (4.3.13)$$

が知られている。この結果を図4.3に示しておく。



図 4.3: 線形理論による揺らぎの成長率。太線が (4.3.5) 式を数値計算したもので、細線が (4.3.10) 式であるがほとんど区別できない程度の良い近似式となっている。

第5章 ダークハローの普遍密度分布

5.1 ダークハローの密度プロファイルの重要性

天体 ≈ 宇宙論的自己重力系 + バリオンガス物理

したがって、この宇宙論的自己重力系(ダークハロー)の重要性は自明。例えば、Press-Schechter 理論は、このダークハローの具体的な定義として、球対称非線型重力収縮モデル を採用してつくられている。さらに、その研究の面白さを分類すれば以下のようになる。

(i) academic interest (物理系としての面白さ)

(エネルギー散逸があまり重要でない範囲での)自己重力系の最終状態?大別すれば、 2つの可能性。

(A) 宇宙論的初期条件を忘れた普遍的な平衡状態に落ち着く。例えば、singular isothermal sphere

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2}$$

この考え方の延長としては、観測されている銀河の相関関数 $\xi_{gg}(r) \propto r^{-1.8}$ も、 観測的な測定誤差を考慮すれば正しくは $\propto r^{-2}$ 、あるいは、 $\propto r^{-2}$ へ向かいつつ ある過渡期である、と解釈することこそ物理的に正しいセンスである、というこ とになる。

(B) 何らかの形で宇宙論的初期条件に依存した分布にとどまる。 例えば、stable clustering solution for $\xi(r)$ に対しては

 $P_{\text{mass}}(k) \propto k^n$ (原始密度ゆらぎスペクトル) $\rightarrow \xi_{\text{mass}}(r) \propto r^{-3(n+3)/(n+5)}$ (宇宙論的非線型重力成長の漸近領域)

という結果が知られており、この場合、 $\xi_{gg}(r) \propto r^{-1.8}$ は宇宙の初期条件の手がかりを与えると考えられる(この解釈が一般的に認められている)。

しかし、この(A)と(B)は考えている系のスケールや何に注目するかによって異なる。 ダークハローの場合は、いずれが正しいのであろうか?

(ii) practical importance (天文学的応用)

⁽i)の結果や物理的な理解は別として、ある宇宙論モデルを与えたときダークハローの密度分布が定量的に予言できれば、天文学的な意義は大きい。例えば、

- 渦巻銀河の回転曲線
- 銀河団の重力レンズとダークマター分布
- 銀河団高温ガスの分布

などに関する数多くの testable predictions が可能となる。つまり、

理論モデル \leftrightarrow (予言) ダークマター分布 \leftrightarrow (bias) 天体分布 \leftrightarrow (観測限界) 観測データ

の最初の部分の信頼性が格段に向上する。

5.2 数値シミュレーションによるハロー密度プロファイルの 過去の研究

もともとは、観測されている銀河団内のメンバー銀河の分布を説明するモデル作りをめ ざして行われた。その後、観測されている渦巻銀河の平坦な回転曲線を再現できるかどう かという目的意識で盛んに研究が始まった。これは、銀河の自転速度V(r)を中心からの距 離rの関数としてプロットしたもので、中心から十分離れたところではr に依らずほぼー 定の値となることが知られている。この観測事実を単純なケプラー運動の結果として解釈 すれば、銀河の中心からr内の物質の総質量は遠方でもrに比例して増大する、言い換えれ ば、rでの平均質量密度 $\rho(r)$ は r^{-2} という分布則を示すという事になる。可視光で観測で きる銀河の領域を包み込むようなこの質量分布は、暗黒物質ハローと呼ばれ、宇宙にダー クマター(暗黒物質)が存在する観測的証拠として良く取り上げられる。ダークハローとい う言葉の始まりでもある。

前述したように、この密度プロファイルは、(A) 宇宙の初期条件を何らかの形でとどめて いる結果なのか、あるいは、(B) 初期条件によらず自己重力系における普遍的な結果なの か、という疑問が残る。実はこの問題は1980年代末の研究を通じて、解析的モデルと、当 時の数値シミュレーションがともに一致して(a)を支持するという形で一応の決着をみてい た。ところが1996年に、暗黒物質ハローは初期条件や質量にほとんど無関係に、*r*_sという スケールをパラメータとした普遍的な密度分布:

$$\rho(r) \propto \frac{1}{(r/r_{\rm s})^{\alpha} (1 + r/r_{\rm s})^{3-\alpha}}$$
(5.2.1)

で特に $\alpha = 1$ の場合に従うという数値シミュレーションの結果が発表された。

過去のシミュレーションは粒子数が少なく、中心部のプロファイルを正しく決定するだけ の分解能がなかったという主張である。しかしこれは単に定量的な違いにとどまらず、(B) という定性的に全く異なる解釈を支持することになる。ダークマターハローは、矮小銀河か ら銀河団という質量にして5桁もの違いを持つ天体にあまねく存在するものと考えられて おり、その宇宙物理的な帰結は計り知れない。したがって、この結論は大きな反響を呼び、 その後数多くの研究の火付け役となった。特に、さらに高分解能のシミュレーションによっ ても、中心部のべき指数はもう少しきつく ($\alpha = 1.5$ 程度)なるという変更以外は、(5.2.1)式 で表される普遍性の存在は確認されている。

表 5.1: ダークハローの密度分布に関する過去の研究

	年	著者	文献
-	1970	Peebles	AJ, 75, 13
		$N=300,{ m Coma}$ の銀河分布を説明するための N 体計算	
	1972	Gunn & Gott	ApJ 176, 1
		secondary infall モデルの提唱	
	1977	Gunn	ApJ 218, 592
		$ m secondary \ infall$ に基づく $ ho \propto r^{-9/4}$ 平衡分布の予言	
	1985	Hoffman & Shaham	ApJ 297, 16
		${ m density} { m peak}$ まわりの密度分布 $ ho \propto r^{-3(n+3)/(n+4)}$	
	1986	Quinn, Salmon & Zurek	Nature 322, 329
		Npprox 1000 で、 Hoffman $&$ Shaham の予言を確かめた	
	1987	West, Dekel & Oemler	ApJ 316, 1
		$Npprox 4000 ext{ simulations.}$ ハローの密度分布は宇宙論モデルには	
		あまり依存せず、univeral profile になるのではないかと主張	
	1988	Frenk, White, Davis & Efstathiou	ApJ 327, 507
		$N=32^3 ext{ simulations, SCDM}$ ハローは銀河の平坦な回転曲線を再現	
	1990	Hernquist	ApJ $356, 359$
		楕円銀河の de Vaucouleurs $R^{1/4}$ 則を再現する密度分布モデルの提案	
		$ \rho(r) = \frac{Ma}{m} - \frac{1}{m} $ (さらにエネルギー分布関数も解析的に書ける)	
	1001	$\frac{2\pi}{2\pi} r(r+a)^3 (22) r(r+a)^3 r(r+a)^3 (22) r(r+a)^3 r(r+a)^3$	
	1994	Crone, Evrard, & Richstone	ApJ 434, 402
		$N = 64^{\circ}$ simulations in scale-tree models + various cosmology	
	1005	$ ho \propto r^{-\alpha}$: ハローの内部密度分布にはコアか見当たらない	
	1995	Navarro, Frenk & White	MNRAS 275, 720
		SCDM CO SPH simulations (no cooling), $\Lambda \Box - \delta c J N \approx 6000$	
		ハロー密度分布の普遍性を発見 $\rho(r) = \frac{7500\rho}{(r/0.2r_{rot})(r/0.2r_{rot}-1)^2}$	
	1996	Navarro, Frenk & White	An I 462 563
	1550	19 halos with $N(< r_{in}) = 5000 - 10000$ in SCDM	mp5 402, 505
		19 haios with I (< / vir) = 5000 10000 m Sebin	
	1997	Fukushige & Makino	Ap.I 477 L9
	1001	higher-resolution simulations $(N = 786, 400)$	11po 111, 110
		中心カスプはNFW の得た $1/r$ より急であることを主張	
	1997	Navarro, Frenk & White	ApJ 490, 493
		SCDM, LCDM, scale-free models の系統的 simualtions を通じて	\mathbf{r}
		universal density profile の一般性を確認	
	1998	Sver & White	MNRAS 293, 337
		continual merger + tidal disruption $\rightarrow \rho \propto r^{-3(n+3)/(n+5)}$,
	1998	Moore et al.	ApJ 499, L5
		inner profile $ ho \propto r^{-1.4}$ 、Fukushige & Makino の結論を確認	× /
	1999	Moore et al.	MNRAS 310, 1147
		$a(r) \propto \frac{1}{1}$,
		$\mu(r) \propto \overline{(r/r_s)^{1.5} [1 + (r/r_s)^{1.5}]}$	
	2000	Jing & Suto	ApJ 529, L69
		中心カスプの巾指数のハロー質量依存性を指摘 (controvertial)	



図 5.1: 髪の毛座銀河団の銀河の密度分布を再現しようとしたシミュレーション (Peebles 1970)。



Fig. 2....Comparison of average profiles for the 30 most massive groups divided into three mass ranges for the $\Omega = 10$, n = -1 run. Ten clusters are included in each average, m ranked 1...10, 11-20, and 21-30. For this run, the mass ranges are finiterapis of the number of particles) 6749–1145, 1105–725, and 715–525.

図 5.2: 適当なスケーリングをすると密度プロファイルは universal. また中心コアらしき振る舞いはなくむしろカスプの存在を示唆する (Crone, Evrard & Richstone 1994)。



 \boxtimes 5.3: Particle plots illustrating the time evolution of halos of different mass in an $\Omega_0 = 1$, n = -1 cosmology. Box sizes of each column are chosen so as to include approximately the same number of particles. At $z_0 = 0$ the box size corresponds to about $6 \times r_{200}$. Time runs from top to bottom. Each snapshot is chosen so that M_{\star} increases by a factor of 4 between each row. Low mass halos assemble earlier than their more massive counterparts. This is true for every cosmological scenario in our series. (Navarro, Frenk & White 1997).



⊠ 5.4: Density profiles of one of the most and one of the least massive halos in each series. In each panel the low-mass system is represented by the leftmost curve. In the SCDM and CDMΛ models radii are given in kpc (scale at the top) and densities are in units of $10^{10} M_{\odot}/\text{kpc}^3$. In all other panels units are arbitrary. The density parameter, Ω_0 , and the value of the spectral index, *n* is given in each panel. Solid lines are fits to the density profiles using eq. (1). The arrows indicate the value of the gravitational softening. The virial radius of each system is in all cases two orders of magnitude larger than the gravitational softening (Navarro, Frenk & White 1997)



 \boxtimes 5.5: The circular velocity profiles of the halos shown in the previous Figure. Radii are in units of the virial radius and circular speeds are normalized to the value at the virial radius. The thin solid line shows the data from the simulations. All curves have the same shape: they rise near the center until they reach a maximum and then decline at the outer edge. Low mass systems have higher maximum circular velocities in these scaled units because of their higher central concentrations. Dashed lines are fits using eq.(3). The dotted lines are the fit to the low-mass halo in each panel using a Hernquist profile. Note that this model fits rather well the inner regions of the halos, but underestimates the circular velocity near the virial radius (Navarro, Frenk & White 1997).



 \boxtimes 5.6: Density and temperature structures of the halo at z = 1.8. The position of the center of the halo was determined using potential minimum and averaged physical values over each spherical shell (Fukushige & Makino 1997).



 \boxtimes 5.7: The density profiles of the Coma cluster simulated at four different resolutions. The curves begin at the spline softening lengths that were used and the number of particles within the final virial radii are indicated (Moore et al. 1998).



⊠ 5.8: The broken lines show the Virgo halo simulated at the same mass resolution but varying only the softening parameter. This halo has a virial radius of 2 Mpc and contains 20,000 particles within r_{vir} . The values of the softening used are indicated next to each curve. The solid curves show the same cluster resimulated with a mass resolution 20 times higher, but keeping the force softening fixed at 10kpc. To demonstrate that relaxation is not affecting our results one of the solid curves shows the profile at a redshift z=0.25(Moore et al. 1998).



 \boxtimes 5.9: The same cluster simulated in the next figure but with two different values of the softening length and keeping the particle mass fixed. The left panel shows a close up view of the inner 500 kpc of the last frame of Figure 1. In this case the softening was 0.2% of the virial radius. The right panel shows the same region of the same cluster but simulated with a softening length of 1.5% of the virial radius. The lack of substructure halos in the right panel demonstrates that softened halos are easily disrupted by tidal forces (Moore 2001).



 \boxtimes 5.10: The hierarchical evolution of a galaxy cluster in a universe dominated by cold dark matter. Small fluctuations in the mass distribution are present but barely visible at early epochs. These grow by gravitational instability, merging and accretion of mass, eventually collapsing into virialised quasi-spherical dark matter halos. This plot shows a time sequence of 6 frames of a region of the universe that evolves into a cluster of galaxies. The colours represent the local density of dark matter plotted using a logarithmic colour scale. Linear over-densities are darker blue, whereas the non-linear collapsed regions attain over-densities of a million times the mean background density and are plotted as yellow/white. Each box is 10 Mpc on a side and the final cluster virial radius is 2 Mpc (Moore 2001).



 \boxtimes 5.11: The density profile of the cluster measured in three runs with increasing resolutions (from triangles to squares to circles). In the best run, the cluster contains over 4 million particles and the force resolution is 0.05% of the cluster's virial radius. The curves are an NFW profile (lower curve) and a fit with the profile of Moore et al. (1999a), which rises more steeply ($\propto r^{-1.5}$) at the center than the NFW profile ($\propto r^{-1}$). With increasing resolution, the cluster's profile continues to approach M99a's curve *i.e.* this appears to be the asymptotic profile in the limit of infinite resolution. The vertical bars mark the radii at which the measured profiles are no longer affected by finite numerical resolution (Ghigna et al. 2000).



図 5.12: 冷たい暗黒物質宇宙モデルにおけるハローの構造。左から、銀河、銀河群、銀河団スケー ルの質量に対応する、4つの異なる例をプロットした。図のサイズは適宜スケールしてある (Jing & Suto 2000).



図 5.13: 平均化したダークマターハロー密度分布プロファイル。縦軸の値は見やすいよう にずらしてある (Jing & Suto 2000)。



⊠ 5.14: Evolution of density profile of the halo for Run 16M0 and 2M0. The unit of density is M_{\odot}/pc^3 . The profiles are vertically shifted downward by 7, 6, ..., 1, 0 dex from the bottom to the top. The arrows indicates r_{200} . The numbers near the dashed lines indicate the power index of those lines. The numbers on the left of the profiles indicate the redshift (Fukushige & Makino 2001).

5.3 普遍密度プロファイルへの観測的制限

5.3.1 質量・回転曲線プロファイル

NFW プロファイルのまとめ:

$$\rho_{\rm DM}(r) = \frac{\delta_c \rho_{\rm crit}}{(r/r_{\rm s})(1+r/r_{\rm s})^2}.$$
(5.3.1)

ここで、

$$\delta_c = \delta_c(M) : \text{ (characteristic halo density)}, \qquad (5.3.2)$$

$$r_s = r_s(M)$$
: (scaling radius), (5.3.3)

$$\rho_{\rm crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 1.8 \times 10^{11} h^2 M_{\odot} / {\rm Mpc}^3 : \ ({\rm in Reg}), \tag{5.3.4}$$

$$c_{\rm vir} \equiv \frac{r_{\rm vir}(M)}{r_s(M)}$$
: (concentration parameter). (5.3.5)

ビリアル半径 : $r_{\rm vir} = r_{\rm vir}(M_{\rm halo}, z_{\rm vir})$

$$r_{\rm vir} \equiv \left(\frac{3M_{\rm halo}}{4\pi\Delta_{\rm vir}\Omega_0\rho_{\rm crit}}\right)^{1/3} \approx \frac{1.69}{1+z_{\rm vir}} \left(\frac{\Delta_{\rm vir}\Omega_0}{18\pi^2}\right)^{-1/3} \left(\frac{M_{\rm halo}}{10^{15}h^{-1}M_{\odot}}\right)^{1/3} (5.3.6)$$

$$\Delta_{\rm vir} \approx \begin{cases} 18\pi^2\Omega(z_{\rm vir})^{-0.7} & (\lambda_0=0) \\ 0.25\pi(z_{\rm vir})^{-0.7} & (\lambda_0=0) \end{cases} (5.3.7)$$

$$\Delta_{\rm vir} \approx \begin{cases} 10\pi \Omega(z_{\rm vir}) & (\lambda_0 = 0) \\ 18\pi^2 \Omega(z_{\rm vir})^{-0.6} & (\lambda_0 = 1 - \Omega_0) \end{cases}$$
(5.3.7)

 $c_{\rm vir} \mathcal{O}$ fitting formula in LCDM : Bullock et al. MNRAS 321(2001)559

$$c_{\rm vir}(M_{\rm halo}, z) = \frac{9}{1+z} \left(\frac{M_{\rm halo}}{1.5 \times 10^{13} h^{-1} M_{\odot}}\right)^{-0.13}.$$
 (5.3.8)

質量プロファイル

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \frac{\delta_c \rho_{\rm crit} r^2}{(r/r_{\rm s})(1+r/r_{\rm s})^2} dr = 4\pi \delta_c \rho_{\rm crit} r_s^3 \left[\ln \left(1 + \frac{r}{r_s} \right) - \frac{r}{r+r_s} \right]$$
(5.3.9)

(5.3.5) 式、(5.3.6) 式、(5.3.9) 式より、

$$\delta_c = \frac{\Delta_{\rm vir} \Omega_0}{3} \frac{c_{\rm vir}^3}{\ln(1 + c_{\rm vir}) - c_{\rm vir}/(1 + c_{\rm vir})}$$
(5.3.10)

回転曲線プロファイル

$$V_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{4\pi\delta_c\rho_{\rm crit}r_s^2 \left[\frac{r_s}{r}\ln\left(1+\frac{r}{r_s}\right) - \frac{r_s}{r+r_s}\right]}$$
(5.3.11)

このように、普遍密度プロファイルを認めれば、銀河・銀河団の質量分布および渦巻銀河の 回転曲線と直接比較可能な理論予言ができる。実際、重力レンズの解析から再構築された 銀河団の質量プロファイルおよび矮小銀河の回転曲線のデータはいずれも中心部は平坦で あり、(5.2.1)式の示唆するようなカスプは存在しないという報告がされている。もちろん、 この比較においてはダークマター以外のバリオン成分が密度プロファイルに変更を与えな いという条件が必要であるが、特に中心部においてはその効果も無視できるわけではなく、 いろいろな解釈の余地がある。しかし仮にこの矛盾を信じるとすれば、その起源はそもそ も暗黒物質の問題に帰着するのではないかという提案までされて物議をかもしている。



 \boxtimes 5.15: Rotation curves of high resolution CDM halos (solid curves) compared with LSB rotation curve data (dotted curves). All of the data and model rotation curves have been scaled to a fiducial peak velocity of 200 km/s. (Note that the simulation halos and the data were chosen to have peak rotational velocities within 50% of this value.) The total rotational velocity and the baryonic contribution from the stars and gas from a "typical" LSB galaxy (UGC 128) are shown by the open squares. The mass to baryon ratio for this galaxy is nearly 20:1 and the rotation curve data probes a remarkable 25% of the expected virialised halo (Moore et al. 1999).

⊠ 5.16: A radial plot of the mass density and light density. Total (*thick line*) and galaxy-only (*thin line*) components of the mass are shown. The dotted line is the best NFW fit discussed in the text, and the dashed line is the best-fit single PL model. The 35 h^{-1} kpc soft core in the mass is evident. A singular mass distribution is ruled out. The total rest-frame V light profile (*solid line*), and galaxy V light profile (*dashed line*), smoothed with a 5 h^{-1} kpc Gaussian, are also shown (Tyson, Kochanski & Dell'Antonio 1998, ApJ 498, L107).

5.3.2 銀河団 X 線ガス密度分布: β モデルの起源?

NFW ダークマター内で静水圧平衡にある等温ガスの密度プロファイル → 銀河団 X 線ガ スのモデル (Makino, Sasaki & Suto 1998)

静水圧平衡の式 :
$$\frac{dp_{\text{gas}}}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho_{\text{gas}},$$
 (5.3.12)

状態方程式 :
$$p_{\text{gas}} = n_{\text{gas}} k T_{\text{gas}} = \frac{\rho_{\text{gas}}}{\mu m_p} k T_{\text{gas}},$$
 (5.3.13)

$$\rightarrow \frac{kT_{\text{gas}}}{\mu m_p} \frac{d\ln\rho_{\text{gas}}}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}.$$
 (5.3.14)

この式に(5.3.9)式を代入すると、解析的に積分できて、

$$\ln \rho_{\text{gas}} = -\underbrace{\frac{G\mu m_p}{kT_{\text{gas}}} 4\pi \delta_c \rho_{\text{crit}} r_s^2}_{\equiv B} \int_0^{r/r_s} \left[\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x(1+x)} \right] + const. \quad (5.3.15)$$

$$\to \ \rho_{\rm gas}(r) = \rho_{\rm g0} \ e^{-B} \left(1 + \frac{r}{r_s} \right)^{Br_s/r}.$$
 (5.3.16)

この関数形からは想像できないが、実はこれは等温 β モデルと極めて似た分布となっている。等温 β モデルに fit すれば、

$$\rho_{\rm gas}(r) \approx \frac{\rho_{g0}A}{[1+(r/r_{\rm c,eff})^2]}^{3\beta_{\rm eff}/2},$$
(5.3.17)
$$A \approx -0.178b + 0.982 = -0.013B + 0.982 \ (b \equiv 2B/27),$$

$$r_{\rm c,eff} \approx 0.22r_s, \qquad \beta_{\rm eff} \approx 0.9b = 0.067B.$$



図 5.17: NFW ダークマター内で静水圧 平衡にある等温ガスの密度プロファイル と等温 β モデルの比較 (Makino, Sasaki, & Suto 1998).

5.3.3 Collisional dark matter

CDM モデルは、宇宙の大構造 $(r \gg 1 Mpc)$ を極めてうまく説明できる。一方、銀河や銀河団の中心密度分布にカスプがなく、むしろコアがあるとすれば、 $r \le 1 Mpc$ では困難を抱えていることになる。

これを解決する一つの可能性は、 $r \leq 1$ Mpc でのみ効果を持つような大きさの反応断面積 σ をもつダークマターを考えることである (Collisional dark matter, self-interacting dark matter)。その要請は、

 $(mn)\left(\frac{\sigma}{m}\right)l_{\rm mfp}\approx 1$ for $mn\approx\rho_{\rm c,cluster}$ and $l_{\rm mfp}($ 粒子の平均自由行程 $)\approx 1$ Mpc.(5.3.18)

これを書き直せば、

$$\left(\frac{\sigma}{m}\right) \approx 1.6h^{-1} \text{cm}^2/\text{g}\left(\frac{10^4 \rho_{\text{crit}}}{\rho_{\text{c,cluster}}}\right) \left(\frac{1h^{-1}\text{Mpc}}{l_{\text{mfp}}}\right)$$
 (5.3.19)

あるいは、

$$\sigma \approx 2.5 \times 10^{-24} h^{-1} \text{cm}^2 \left(\frac{m}{1 \text{GeV}}\right) \left(\frac{10^4 \rho_{\text{crit}}}{\rho_{\text{c,cluster}}}\right) \left(\frac{1h^{-1} \text{Mpc}}{l_{\text{mfp}}}\right).$$
(5.3.20)

またこれに対応する、平均衝突時間は、

$$\Delta t \approx \frac{l_{\rm mfp}}{v} \approx 10^9 h^{-1} \mathbf{fl} \left(\frac{1000 \,\mathrm{km/s}}{v}\right) \left(\frac{l_{\rm mfp}}{1h^{-1} \,\mathrm{Mpc}}\right). \tag{5.3.21}$$

したがって、この程度の断面積であれば宇宙年齢の間にハローの中心部だけに影響を与え ることが可能。しかし、本当に何が起るかを調べるには数値シミュレーションをするしか ない。

数値シミュレーションの結果わかったことを要約すれば、 $\sigma/m \approx 1 \text{cm}^2/g$ 程度の相互作用があれば、銀河団スケールハローの中心カスプを平坦にし、コア領域をつくることが可能。また、同時にsubhalosの数を減らすこともできる。しかし、ハローがほとんど球対称になってしまい、観測されている非球対称性や重力レンズのアーク統計からの示唆と矛盾する。また、銀河団スケールは別として、矮小銀河のスケールではコア領域をつくることはできない。したがって、どうもあまりうまく行きそうにないという結論。

一方、観測的には、少なくとも銀河団スケールのハローは中心カスプを持っているので はないかという解釈が数多く報告されるようになってきた。したがって、事態はまだ混沌 としているというべき。



☑ 5.18: Projected mass distributions in a box $15h^{-1}$ Mpc on a side. The collision cross-sections per unit mass, core radii, axis ratios for each model and small panels showing the central region $(2h^{-1}$ Mpc on a side, enlarged) in a different color scale are given to the right of the corresponding image. (Yoshida et al. 2000, ApJ 544, L87).



⊠ 5.19: Density profiles (top) and mean collision counts per particle (bottom). The vertical dotted line in the top panel indicates the gravitational softening length of our S1 simulations. The virial radius R_{200} of the final cluster is shown as an arrow. The "fluid" dark matter case from Yoshida et al. (2000) is plotted as the dashed line, while the dash-dotted line represents our higher resolution simulation of the medium cross-section case (S2W-b). (Yoshida et al. 2000, ApJ 544, L87).



 \boxtimes 5.20: The total number of subhalos within R_{200} is plotted as a function of the lower limit to their mass in units of M_{200} . Results are plotted for halos containing 10 or more particles. (Yoshida et al. 2000, ApJ 544, L87).

5.4 ハロー密度プロファイルの理論モデル

5.4.1 2点相関関数に対する自己相似解と非線形漸近解

2 点相関関数の振舞いを理解する上で有用な性質として、自己相似性がある。これは厳密にはスケールファクター *a*(*t*) が時間のベキ関数で書ける Einstein – de Sitter モデルの場合に成立するものであるが、近似的には通常考えるような現実的な宇宙モデルの場合でも成立していることが知られている。これは厳密にはダークハローの密度プロファイルとは異なるものではあるが、示唆深い結果であるので、紹介しておく。

まず、質量 m の無衝突粒子 (例えばダークマター)に対する 1 粒子分布関数を f(x, p, t) と書く。この粒子に対するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2 \dot{\boldsymbol{x}}^2 - m\phi(\boldsymbol{x}) \tag{5.4.1}$$

であるから、膨張宇宙における無衝突ボルツマン方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{ma^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - m \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \qquad (5.4.2)$$

で与えられる。ここで、

$$\boldsymbol{p} = ma^2 \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \tag{5.4.3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -m\nabla\phi, \qquad (5.4.4)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta = \frac{4\pi G m}{a} \int f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) d\boldsymbol{p}.$$
(5.4.5)

 $a(t) \propto t^{2/3}$ である Einstein – de Sitter モデルの場合、(5.4.2) 式は、

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = t^{-3\beta} \hat{f}(\boldsymbol{x}/t^{\beta-1/3}, \boldsymbol{p}/t^{\beta}), \qquad (5.4.6)$$

という相似解を持つことがわかる。つまり、初期条件が与えられればその後の進化は(5.4.6) 式で記述できる(少なくともそのような解が存在する)。さらに、初期条件が

$$P_i(k) \propto k^{n_i},\tag{5.4.7}$$

で与えられる場合には、定数 β が以下のように具体的に導かれる。まず、2 点相関関数は、

$$\xi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\bar{n}^2 a^6} \int d\boldsymbol{p}_1 \, d\boldsymbol{p}_2 \left[\langle f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t) f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2, t) \rangle - \langle f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, t) \rangle \langle f(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{p}_2, t) \rangle \right], \quad (5.4.8)$$

と書けるから $(x \equiv |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ 、 (5.4.6) 式に対応して、 ξ もまた相似解:

$$\xi(x,t) = \hat{\xi}(x/t^{\beta - 1/3}). \tag{5.4.9}$$

を持つはずである。線形領域では、(5.4.7)式から

$$\xi(x,t) \propto x^{-(n_i+3)} t^{4/3}.$$
 (5.4.10)

となるから、(5.4.9) 式と(5.4.10) 式が同時に成り立つための条件として

$$\beta = \frac{n_i + 7}{3(n_i + 3)} \tag{5.4.11}$$

を得る。この相似解は非線形領域での漸近解の議論において特に重要となるが、それを紹介するために以下 stable clustering という考えを説明しよう。

任意の粒子を中心として共動半径 x 内にある粒子の保存則をあらわす式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{n}a^3 \int_0^x 4\pi x^2 dx [1 + \xi(x, t)] \right\} + 4\pi a^2 x^2 \bar{n} [1 + \xi(x, t)] \langle v_{21}(x, t) \rangle = 0.$$
 (5.4.12)

ここで、第1項はこの球内の粒子ペア数の時間変化、第2項は平均相対速度 $\langle v_{21}(x,t) \rangle$ に対応する平均粒子束をあらわす。 ξ に関する微分方程式は (5.4.12) 式から導かれて

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi(x,t) + \frac{1}{a\,x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{x^2\langle v_{21}(x,t)\rangle[1+\xi(x,t)]\right\} = 0.$$
(5.4.13)

非線形性が特に強い場合 ($\xi \gg 1$) には、粒子ペアの平均距離は、実距離で測って時間的に 変化しない:

$$\langle \dot{r}_{21} \rangle = 0 = \langle v_{21}(x,t) \rangle + \dot{a}x,$$
 (5.4.14)

ことが予想される。

図 5.21 は、これを数値シミュレーションで直接検証したもので、近似的には成り立って いることが確認された。



 \boxtimes 5.21: The normalized meanpairwise peculiar velocity, $-v_{12}/Hr$ as a function of $f(z)\bar{\xi}(r;z)$ at different redshifts. Sold lines indicate the fitting formula proposed by Caldwell et al. (2001). (Fukushige & Suto 2001)

この場合、(5.4.13)式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+\xi) = \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [x^3(1+\xi)]$$
(5.4.15)

と書き換えられ、任意関数 g を用いて

$$\xi = a^3 g(ax) \tag{5.4.16}$$

という解を持つことになる(今は $\xi \gg 1$ という状況なので、1は無視した)。

さて、式 (5.4.7)、(5.4.9)、(5.4.11)、及び (5.4.16) を眺めてみると、これらが同時に満た されるためには、 $g(w) \propto w^{-3(n_i+3)/(n_i+5)}$ でなくてはならないことがわかる。このことから、 結局非線形領域での 2 点相関関数は漸近的に

$$\xi(x,t) \propto x^{-\frac{3(n_i+3)}{n_i+5}} t^{\frac{4}{n_i+5}} \propto x^{-\frac{3(n_i+3)}{n_i+5}} a^{\frac{6}{n_i+5}}$$
(5.4.17)

という解を持つことが予想される。図 5.22 に示すように、この予言は数値シミュレーションによっても確かめられている。



 \boxtimes 5.22: Two-point correlation functions in the simulations scaled according to (a) conventional self-similar solution, and (b) quasi-self-similar solution with scale independent slope. The solid lines are the results for $\Omega_0 = 1$ models, and the symbols are those for $\Omega_0 = 0.1$ models with either $\lambda_0 = 0$ or $\lambda_0 = 0.9$. Error bars are estimated from three realizations for each model; only the error bars for n = -2 and $(\Omega_0, \lambda_0) = (0.1, 0.9)$ are shown. Other models have smaller error bars, which are not shown for clarity. The arrows correspond to $\xi(x) = 100$ for each model. (Suginohara, Taruya & Suto 2002)

5.4.2 ピークのまわりの密度プロファイル

Hoffman & Shaham (1985) にしたがって、ある空間的なピークのまわりの密度プロファ イルを宇宙の初期ゆらぎ分布と関係付けるモデルを考察する。これは2点相関関数に対す る自己相似解よりもダークハローの密度分布のモデルとしてより適切だと考えられる。

 $t = t_i$ での局所的な空間密度分布のピークを考え、それが球対称モデルにしたがって、 turn around (maximum expansion)をするときの半径を求める。 $t = t_i$ でのこの球の半径を $r = r_i$ とすれば、この時の単位質量当たりの重力エネルギーと運動エネルギーは、

$$|W_{i}| = \frac{GM_{i}}{r_{i}} = \frac{G}{r_{i}} \frac{4\pi r_{i}^{3}}{3} \bar{\rho}_{i} \left[1 + \bar{\delta}_{i}(< r_{i})\right] = \frac{4\pi G}{3} r_{i}^{2} \Omega_{i} \rho_{c,i} \left[1 + \bar{\delta}_{i}(< r_{i})\right]$$
$$= \frac{\Omega_{i} H_{i}^{2}}{2} r_{i}^{2} \left[1 + \bar{\delta}_{i}(< r_{i})\right]$$
(5.4.18)

$$K_i = \frac{H_i^2 r_i^2}{2} = \frac{|W_i|}{\Omega_i (1 + \bar{\delta}_i)}.$$
(5.4.19)

一方、maximum expansion の時刻 $t = t_m$ では、

$$K_m = 0, \qquad |W_m| = \frac{GM_i}{r_m} = \frac{r_i}{r_m}|W_i|.$$
 (5.4.20)

エネルギー保存則より

$$K_m - |W_m| = \frac{r_i}{r_m} |W_i| = K_i - |W_i| = \left[\frac{1}{\Omega_i(1+\bar{\delta}_i)} - 1\right] |W_i|.$$
(5.4.21)

したがって、

$$\frac{r_m}{r_i} = \frac{1}{1 - \Omega_i^{-1} (1 + \bar{\delta}_i)^{-1}} = \frac{1 + \bar{\delta}_i}{1 + \bar{\delta}_i - \Omega_i^{-1}}.$$
(5.4.22)

まとめれば、 $t = t_i$ で、半径 r_i の球で平均したときの密度ゆらぎ $\bar{\delta}_i(< r_i)$ が、 $\Omega_i^{-1} - 1$ より も大きな値をもつ領域は宇宙膨張に対して相対的に収縮することになり (共動座標系での収 縮)、 $t = t_m$ で最大半径

$$r_m(r_i) == \frac{1+\delta_i}{1+\bar{\delta}_i - \Omega_i^{-1}} r_i$$
(5.4.23)

に達した後、実座標での収縮を開始することが示されたわけである。

この球内ので密度分布を求めるために、まず初期分布から始める。宇宙論的密度ゆらぎのパワースペクトルが $P(k) \propto k^n$ で与えられる場合、 $\xi(r) \propto r^{-(n+3)}$ となるから、 r_c というスケールで平均化したときに残った局所的密度ピークのまわりの質量分布は

$$\bar{\delta}_i(< r_i) = \begin{cases} \delta_0 & (r_i \ll r_c) \\ \delta_0 \left(\frac{r_i}{r_c}\right)^{-(n+3)} & (r_i \gg r_c) \end{cases},$$
(5.4.24)

で近似できると考えられる。これを maximum expansion 時の密度プロファイルと関係付けるためには、

$$\rho_m(r_m) = \rho_i(r_i) \left(\frac{r_i}{r_m}\right)^2 \frac{dr_i}{dr_m} = \Omega_i \rho_{c,i} \left[1 + \bar{\delta}_i(< r_i)\right] \left(\frac{r_i}{r_m}\right)^2 \frac{dr_i}{dr_m}$$
(5.4.25)

に、(5.4.23) 式を代入して計算すれば良い。具体的には、まず

$$1 - \Omega_i^{-1} \equiv -\delta_0 \left(\frac{r_0}{r_c}\right)^{-(n+3)}$$
(5.4.26)

となるように r₀ を定義する。これは、収縮できる領域の境界を決める半径に対応する。これを用いれば、

$$r_m \approx \frac{1}{\delta_0 r_c^{n+3}} \frac{r_i}{r_i^{-n-3} - r_0^{-n-3}}$$
 (5.4.27)

$$\rightarrow \frac{dr_m}{dr_i} \approx \frac{1}{\delta_0 r_c^{n+3}} \frac{(n+4)r_i^{-n-3} - r_0^{-n-3}}{(r_i^{-n-3} - r_0^{-n-3})^2}$$
(5.4.28)

$$\rightarrow \rho_m \propto \frac{(r_i^{-n-3} - r_0^{-n-3})^4}{(n+4)r_i^{-n-3} - r_0^{-n-3}} \underset{r_i \ll r_0}{\propto} r_i^{-3(n+3)} \propto r_m^{-3(n+3)/(n+4)}.$$
(5.4.29)

実際には、収縮後に平衡状態に落ち着いたときの半径 r_f が、r_m とどのような関係になるかはその緩和過程に依存し良くわからない。しかし、球殻ごとに完全にビリアル平衡の条件が満たされるとすれば、

$$-\frac{GM_i}{r_m} = K_f - \frac{GM_i}{r_f} = \frac{1}{2}\frac{GM_i}{r_f} - \frac{GM_i}{r_f} = -\frac{GM_i}{2r_f} \longrightarrow r_f = \frac{1}{2}r_m \quad (5.4.30)$$

が成り立つ。このように、 r_f が、 r_m の定数倍であるという関係を仮定すれば、(5.4.29)式は、そのまま収縮後の平衡状態での密度プロファイルであると考えて良い。したがって、最終的に

$$\rho_f(r_f) \propto r_f^{-3(n+3)/(n+4)}$$
(5.4.31)

という結論が得られた。

表 5.2: 2 点相関関数の stable solution とピーク中心の密度分布の巾

n	$\xi_{ m stable}$	$ ho_{ m Hoffman-Shaham}$
0	$x^{-1.8}$	$r^{-2.25}$
-1	$x^{-1.5}$	r^{-2}
-2	x^{-1}	$r^{-1.5}$