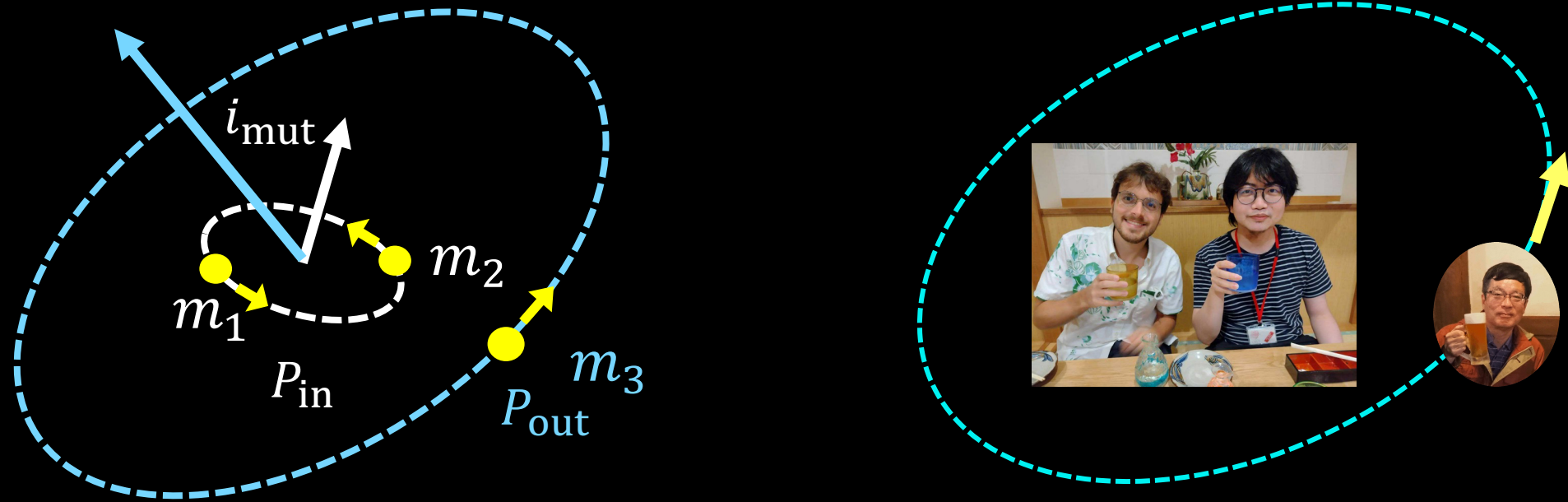


階層的三体問題とブラックホール三体系



東京大学大学院理学系研究科 物理学専攻 須藤 靖

第35回理論天文学宇宙物理学懇談会シンポジウム

理論天文学・宇宙物理学の広がり：さらなる発展に向けて

2022年12月21日 10:35-11:15@コラッセふくしま

今回の内容

1. 古くて新しい三体問題
2. 階層的三体系
3. 古在効果 (von Zeipel-Lidov-Kozai)
4. ブラックホール三体系
5. リアプノフ安定性とラグランジュ安定性
6. まとめ

1 古くて新しい三体問題

天体力学と3体問題＝20世紀以前の超ひも理論

- 歴史に残る天才数学者たちがこぞって取り組んだ
 - Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)
 - Pierre-Simon Laplace (1749-1827)
 - Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
 - Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)
 - William Rowan Hamilton (1805-1865)
 - Jules-Henri Poincaré (1854-1912)
- 20世紀に量子論と相対論が発見されていなければ、今でも世界で最も優れた科学者が取り組む研究テーマであり続けていたかも
 - 高度な数学的結果がすでに数多く導かれている
 - 彼らの時代には想像できなかったような天体系の発見＋数値計算が重要

かつては知られていなかった天文学的三体系の普遍性

■ 恒星系

- OBA型星の7割以上、FGK型星の5割以上が連星系あるいは多重星系に属している

■ 惑星系

- 多重惑星系、連星系の回りの惑星、系外衛星系？

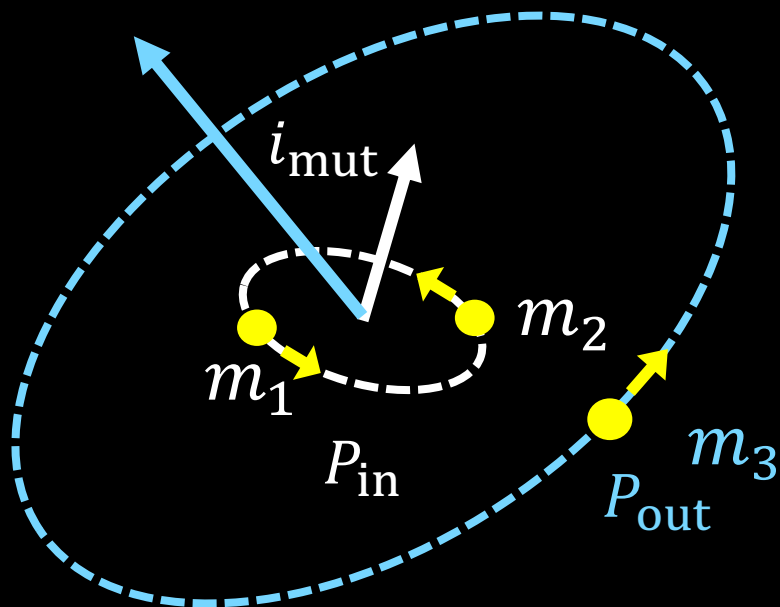
■ コンパクト天体系

- 超巨大ブラックホール回りの連星系(恒星、白色矮星、中性子星、ブラックホールのいずれか)
- コンパクト天体の3体系 (中性子星・白色矮星の連星回りの白色矮星3体系は発見されている: Ransom et al. 2014)
- 重力波では検出できない長周期BH連星の回りの恒星の3体系

2 階層の三体系

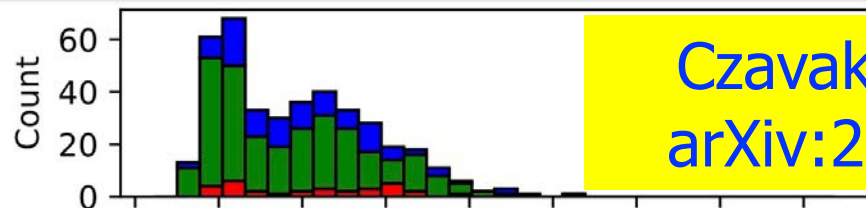
階層的三体系

- ほぼ似たような軌道の3質点からなる系は重力的に不安定
 - これは極めて普遍的な真理で、4つの相互作用の強さが極端に異なったり、(非民主的な)社会階層がないと安定性を保つのは困難
- 階層的3体系 = 内側の連星の回りを遠く離れた第3体が公転 (連星の質量中心と第三体のペアを外側の連星とみなせる)



- 実際に観測される3体系は、ほとんどが階層的3体系 (でないと、不安定なので永く存在できない)
- 階層3体系は、興味深い非直感的な力学振る舞いを示す⇒その代表例が後述するZLK効果⇒多様な天体現象を駆動

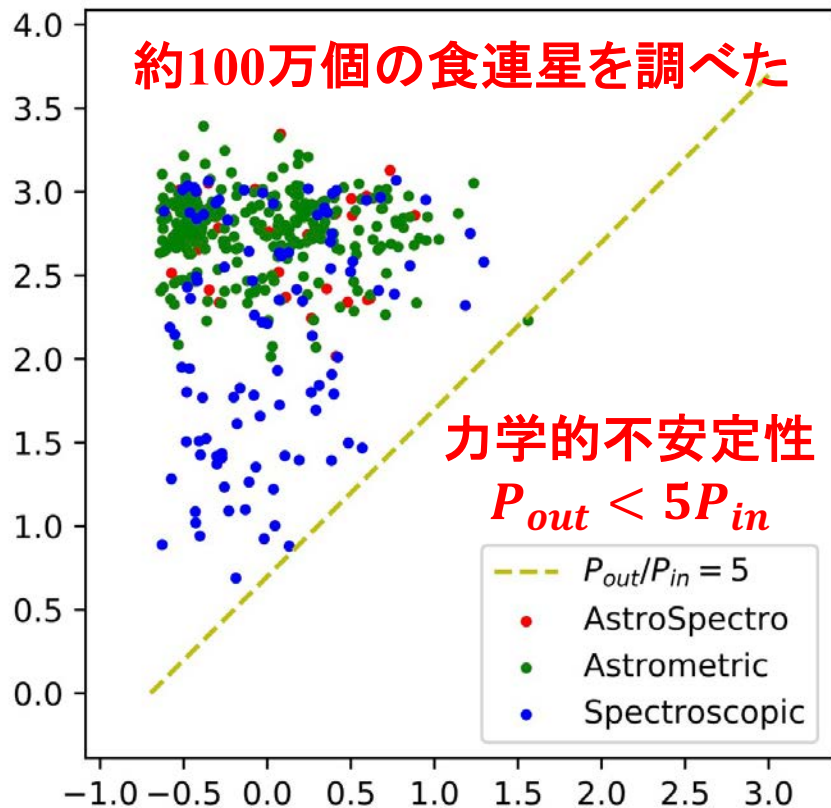
Gaia DR3 (2022年6月13日公開) に基づく階層的三体系候補 (403個)



Czavakinga et al.
arXiv:2212.02903

$\log P_{out}$ (days)

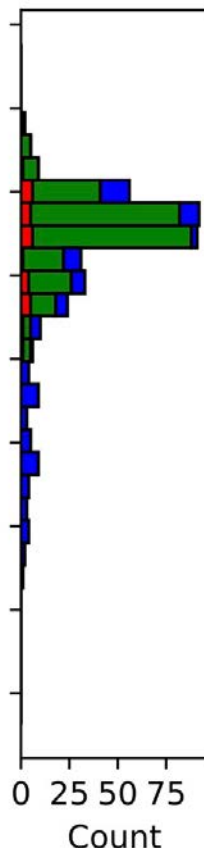
約100万個の食連星を調べた



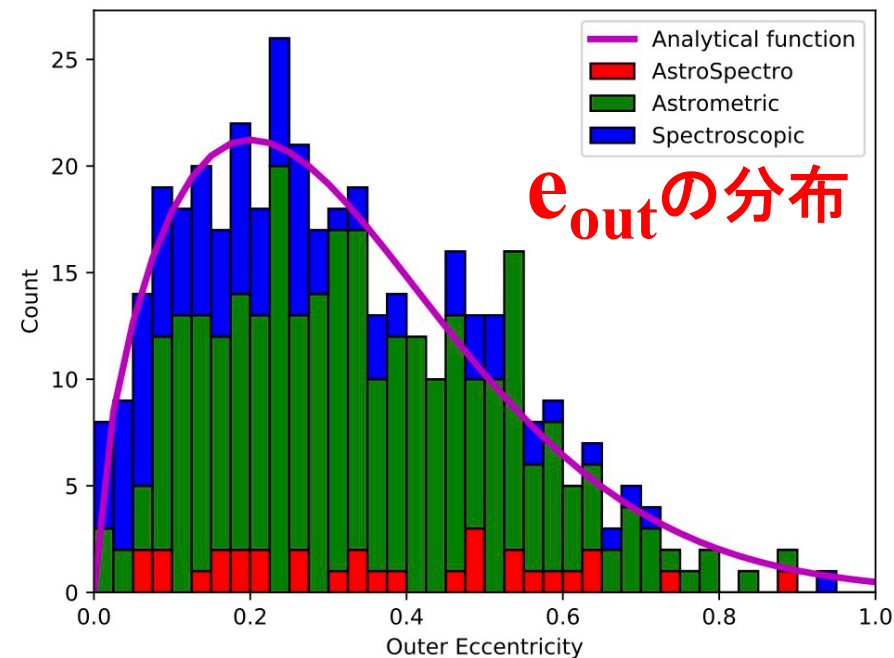
力学的不安定性

$$P_{out} < 5P_{in}$$

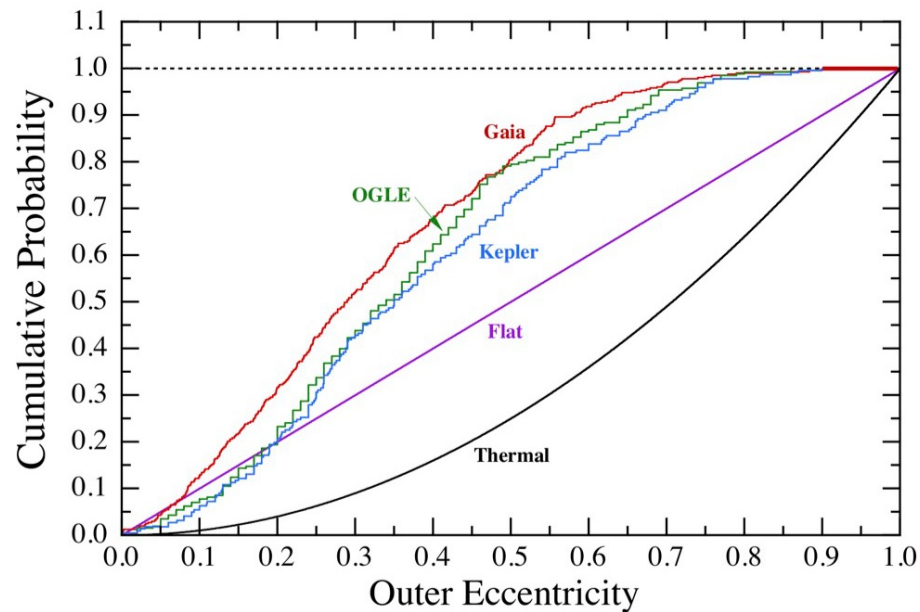
- $P_{out}/P_{in} = 5$
- AstroSpectro
- Astrometric
- Spectroscopic



$\log P_{in}$ (days)

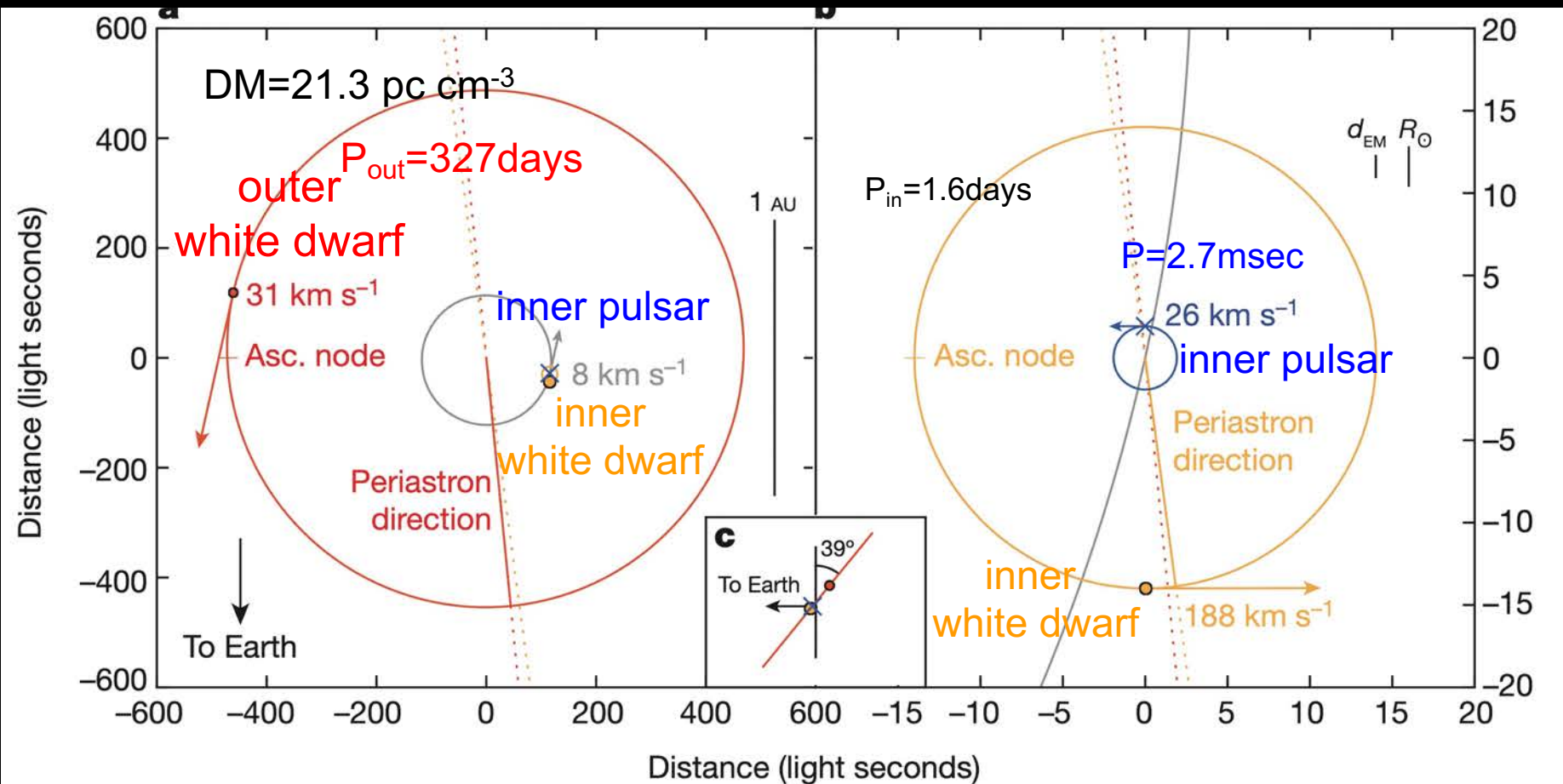


e_{out} の分布



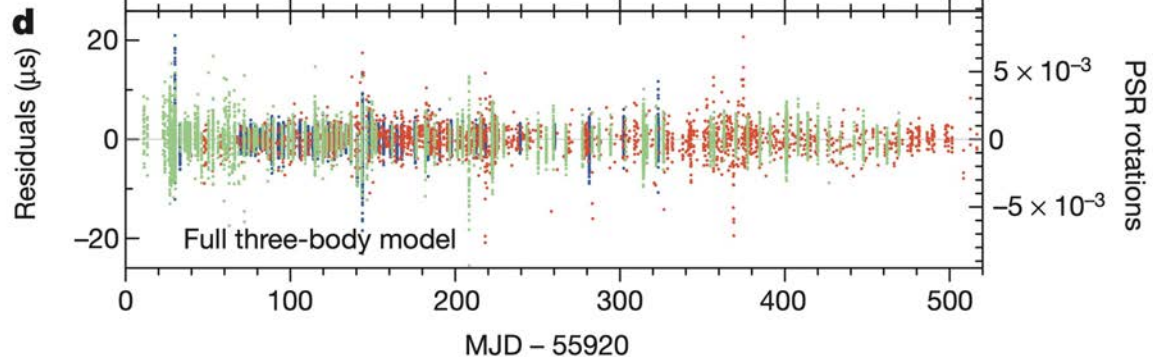
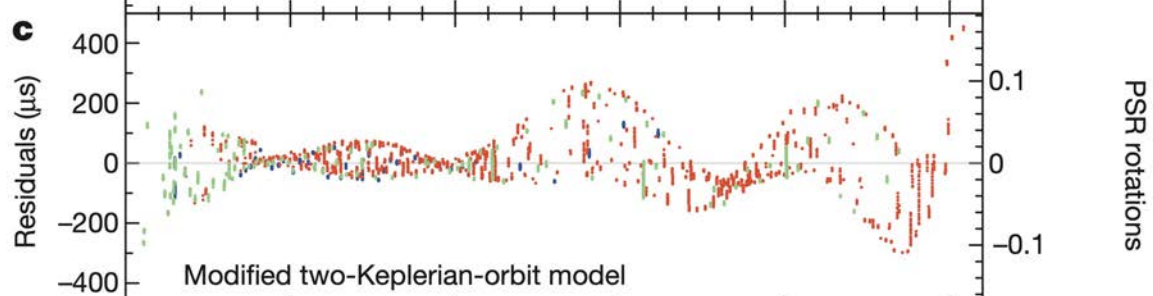
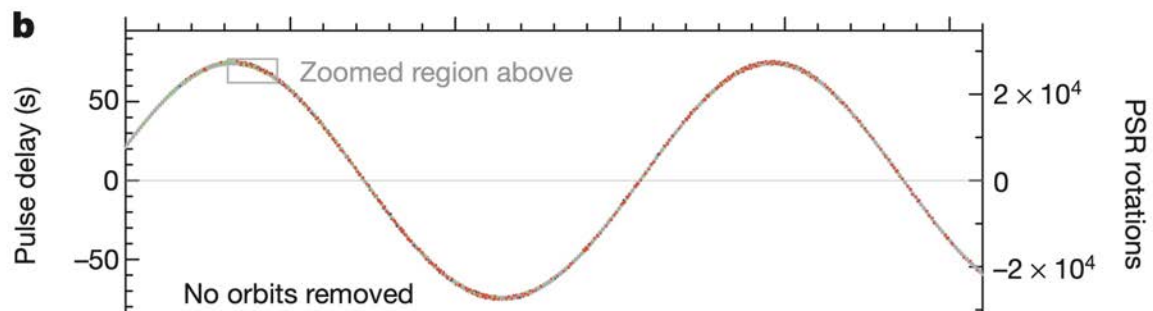
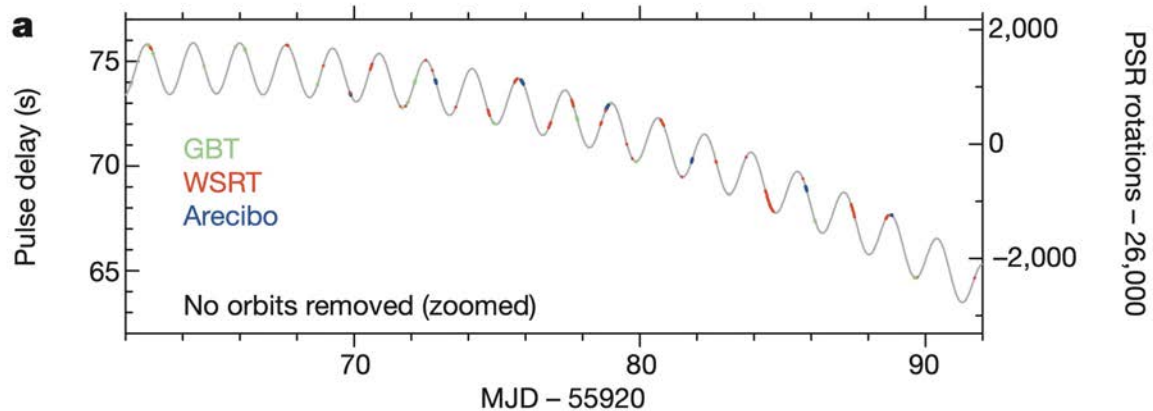
A millisecond pulsar in a stellar triple system

S. M. Ransom¹, I. H. Stairs², A. M. Archibald^{3,4}, J. W. T. Hessels^{3,5}, D. L. Kaplan^{6,7}, M. H. van Kerkwijk⁸, J. Boyles^{9,10}, A. T. Deller³, S. Chatterjee¹¹, A. Schechtman-Rook⁷, A. Berndsen², R. S. Lynch⁴, D. R. Lorimer⁹, C. Karako-Argaman⁴, V. M. Kaspi⁴, V. I. Kondratiev^{3,12}, M. A. McLaughlin⁹, J. van Leeuwen^{3,5}, R. Rosen^{1,9}, M. S. E. Roberts^{13,14} & K. Stovall^{15,16}



Nature
505 (2014)
520

Ransom et al. Nature 505(2014)520 NS-WD binary + WD

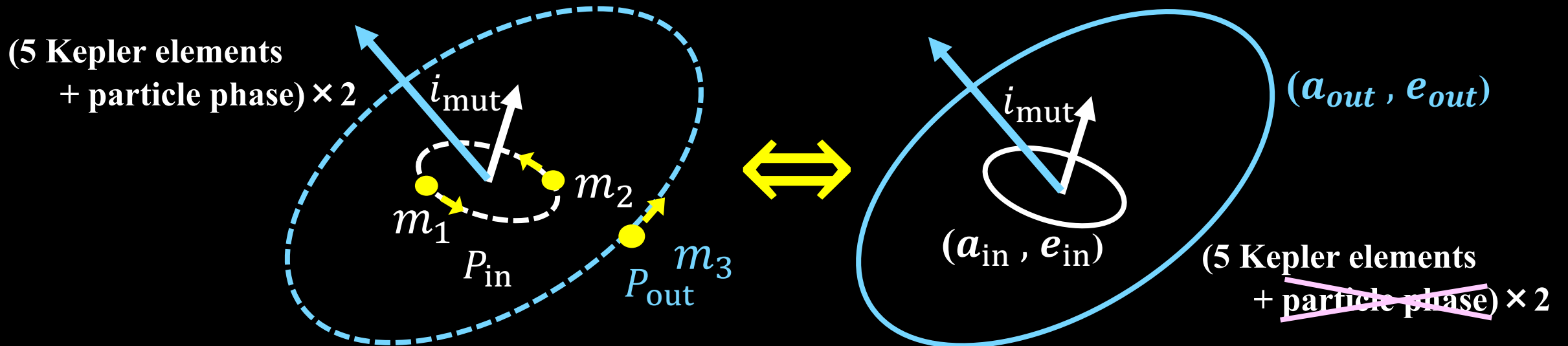


PSR J0337+1715 parameters

inner orbital period (pulsar+WD)	1.629401788(5) day
outer orbital period (WD)	327.257541(7) day
pulsar spin period	2.73258863244(9) msec
mutual orbital inclination	0.0120(17) deg.
Pulsar mass	1.4378(13) M_{\odot}
Inner WD mass	0.19751(15) M_{\odot}
Outer WD mass	0.4101(3) M_{\odot}

階層的三体力学の永年近似

- $P_{in} \ll P_{out}$ なので精度の高い(数値)計算が難しい一方、 $a_{in} \ll a_{out}$ なので摂動論的取り扱いが可能
 - 3体系のハミルトニアンを、ケプラー運動に対応する項とそれ以外の相互作用項に分解し、 $(a_{in}/a_{out})^n$ で摂動展開
 - 長時間進化を考えれば、質点同士の相互作用ではなく、内側と外側の軌道に対応する2つのリング(質点の滞在時間に応じて重みを付けて平均したもの)同士の相互作用で近似してよいだろう



三体系ハミルトニアン多重極展開

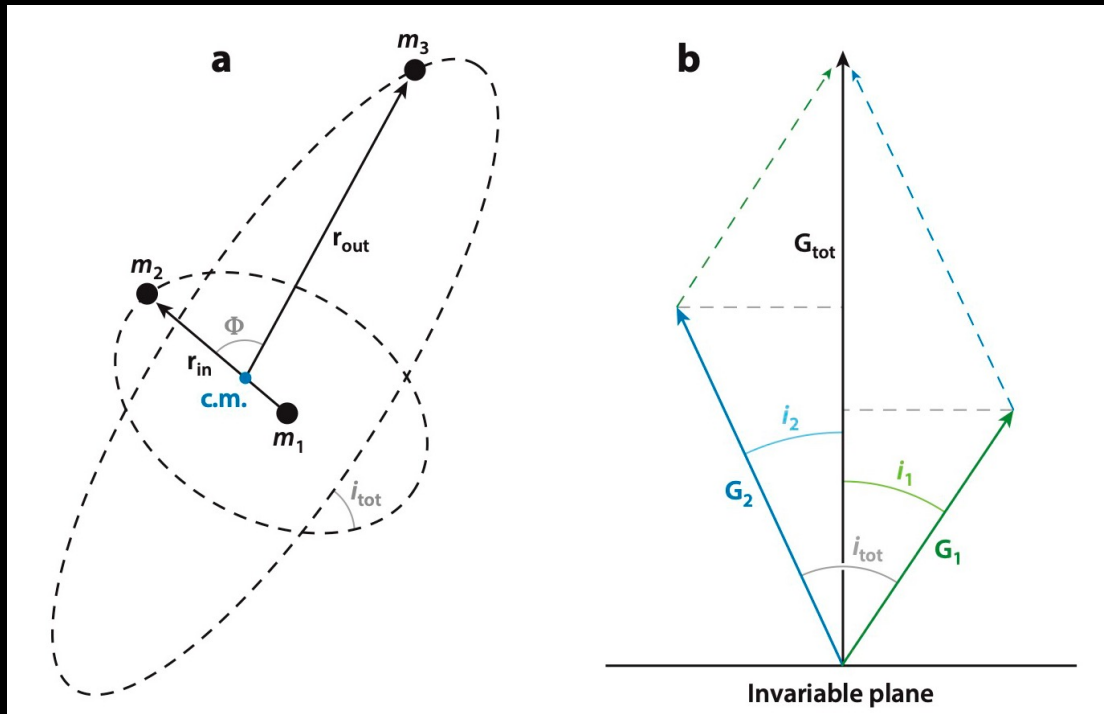
内側の連星のケプラー運動項

内側と外側の連星の相互作用項

$$\mathcal{H} = \frac{k^2 m_1 m_2}{2a_1} + \frac{k^2 m_3 (m_1 + m_2)}{2a_2} + \frac{k^2}{a_2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n M_n \left(\frac{\mathbf{r}_{\text{in}}}{a_1}\right)^n \left(\frac{a_2}{\mathbf{r}_{\text{out}}}\right)^{n+1} P_n(\cos \Phi)$$

内側の連星の重心と第3体からなる
外側の連星のケプラー運動項

$$M_n = m_1 m_2 m_3 \frac{m_1^{n-1} - (-m_2)^{n-1}}{(m_1 + m_2)^n}$$



$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Kep,in}} + \mathcal{H}_{\text{Kep,out}} + \mathcal{H}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_{\text{quad}} + \mathcal{H}_{\text{oct}} + \dots$$

これを軌道上の粒子の位置(mean anomaly) に関して時間平均したハミルトニアンで置き換える

時間平均 (double average)したハミルトニアン

$$\langle \mathcal{H}_{\text{quad}} \rangle = \frac{\mu_{12} \Phi_0}{16} [(2 + 3e_1^2)(3 \cos^2 i_{\text{tot}} - 1) + 15e_1^2 \sin^2 i_{\text{tot}} \cos 2\omega_1]$$

$$\langle \mathcal{H}_{\text{oct}} \rangle = -\frac{15}{64} \mu_{12} \Phi_0 e_1 \varepsilon_{\text{oct}} [A \cos \phi + 10 \cos i_{\text{tot}} \sin^2 i_{\text{oct}} (1 - e_1^2) \sin \omega_1 \sin \omega_2]$$

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{a_1}{a_2} \frac{e_2}{1 - e_2^2}$$

$$\mu_{12} \Phi_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{G m_3 a_1^2}{a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}}$$

- 内側が等質量あるいは外側が円軌道の場合、8重極は効かない
- 永年近似では a_{in} と a_{out} がそれぞれ保存する \Rightarrow 内側と外側のエネルギーは交換しない (角運動量交換のみ)

$$A = 4 + 3e_1^2 - \frac{5}{2} \sin^2 i_{\text{tot}} (2 + 5e_1^2 - 7e_1^2 \cos 2\omega_1)$$

$$\cos \phi = -\cos \omega_1 \cos \omega_2 - \cos i_{\text{tot}} \sin \omega_1 \sin \omega_2$$

3 古在効果 (von Zeipel-Lidov-Kozai)

古在効果 (von Zeipel-Lidov-Kozai effect)

- Takashi Ito and Katsuhito Ohtsuka (2019) “The Lidov–Kozai Oscillation and Hugo von Zeipel” *Monogr. Environ. Earth Planets*, 7, 1–113
 - 驚くほど包括的なレビュー: Priorityの観点から、von Zeipelの貢献を強調。ZLK振動と命名するよう提案し受け入れられているものの、まだ(Z)KLのほうが多いかも
- von Zeipel, H. (1910) “Sur l'application des séries de M. Lindstedt à l'étude du mouvement des comètes périodiques”, *Astronomische Nachrichten*, 183, 345–418
- M.L. Lidov (1961) “Evolution of the orbits of artificial satellites of planets as affected by gravitational perturbation from external bodies” *Artificial Earth Satellite*, 8, 5–45
- Kozai, Yoshihide (1962) “Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity” *The Astronomical Journal*, 67, 591–598
- わかりやすいレビュー: Naoz, S. (2016) “The eccentric Kozai–Lidov effect and its applications”, *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*, 54, 441–489

標準ZKL振動とeccentric ZKL 効果

- test particle 近似 ($m_2=0$) かつ外側が円軌道 ($e_{out}=0$)

- $\dot{i}_{tot}=i_1$

$$j_{1,z} = \sqrt{1 - e_1^2} \cos i_1 = \sqrt{1 - e_{1,init}^2} \cos i_{1,init}$$

- inner orbitの角運動量の、outer orbitの公転軸成分が保存

- e_1 の最大値がから導ける

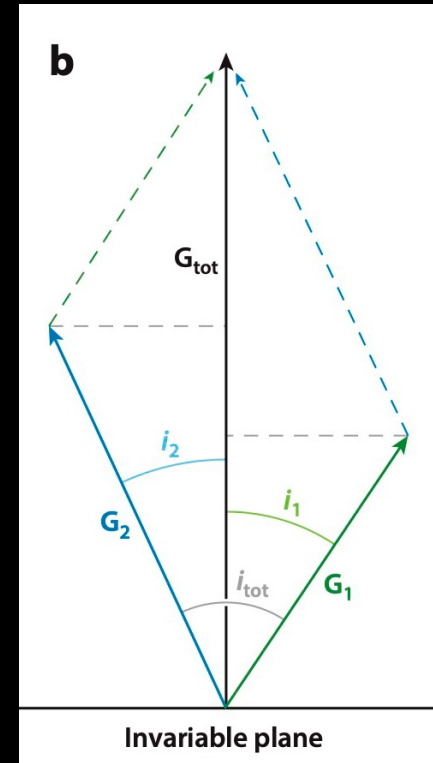
$$\frac{de_1}{d\tau} = \frac{15}{8} e_1 \sqrt{1 - e_1^2} \sin 2\omega_1 \sin^2 i_1$$

と $\langle \mathcal{H}_{quad} \rangle$ の保存

$$e_{1,max} = \sqrt{1 - \frac{5}{3} \cos^2 i_{1,init}}$$

$$\sin i_{1,init} > \sqrt{2/5} \Leftrightarrow 39.2^\circ < i_{1,init} < 140.8^\circ$$

- $m_2 \neq 0$ かつ $e_{out} \sim 1 \Rightarrow$ 八重極の効果のためさらに面白い



永年近似の計算例 (Naoz 2016)

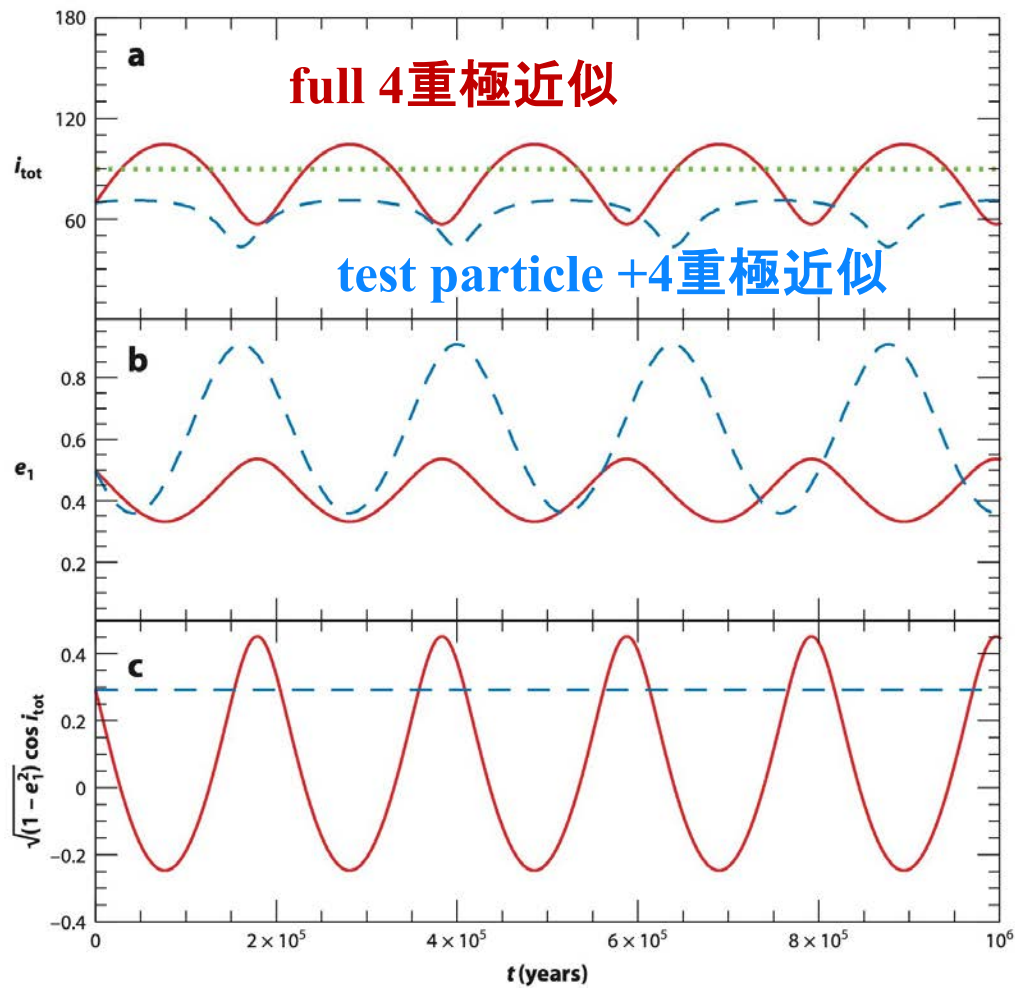


Figure 3

Comparison between the test particle quadrupole (TPQ) formalism (*dashed blue lines*) and the full quadrupole calculation (*solid red lines*). The system has an inner binary with $m_1 = 1.4 M_{\odot}$ and $m_2 = 0.3 M_{\odot}$, and the outer body has mass $m_3 = 0.01 M_{\odot}$. The orbit separations are $a_1 = 5 \text{ AU}$ and $a_2 = 50 \text{ AU}$. The system was set initially with $e_1 = 0.5$ and $e_2 = 0$, $\omega_1 = 120^\circ$ and $\omega_2 = 0$, and relative inclination $i_{\text{tot}} = 70^\circ$. The panels

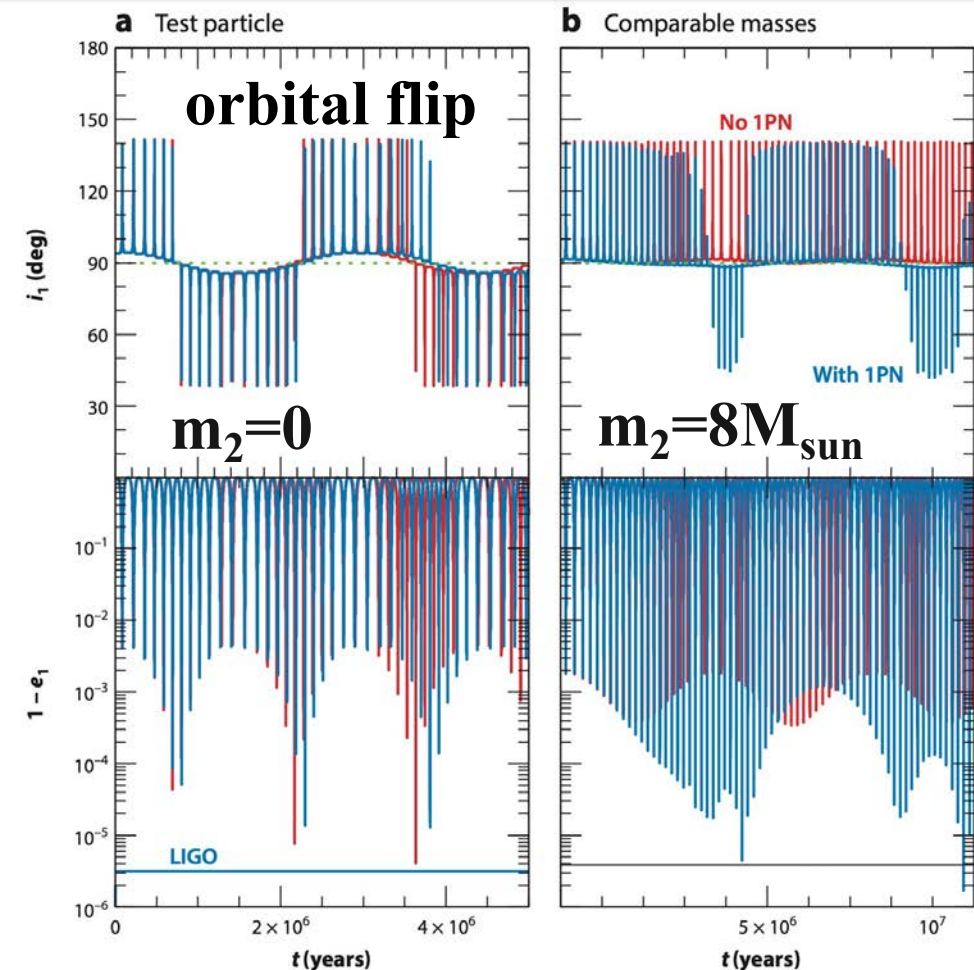


Figure 12

一般相対論を考慮した場合

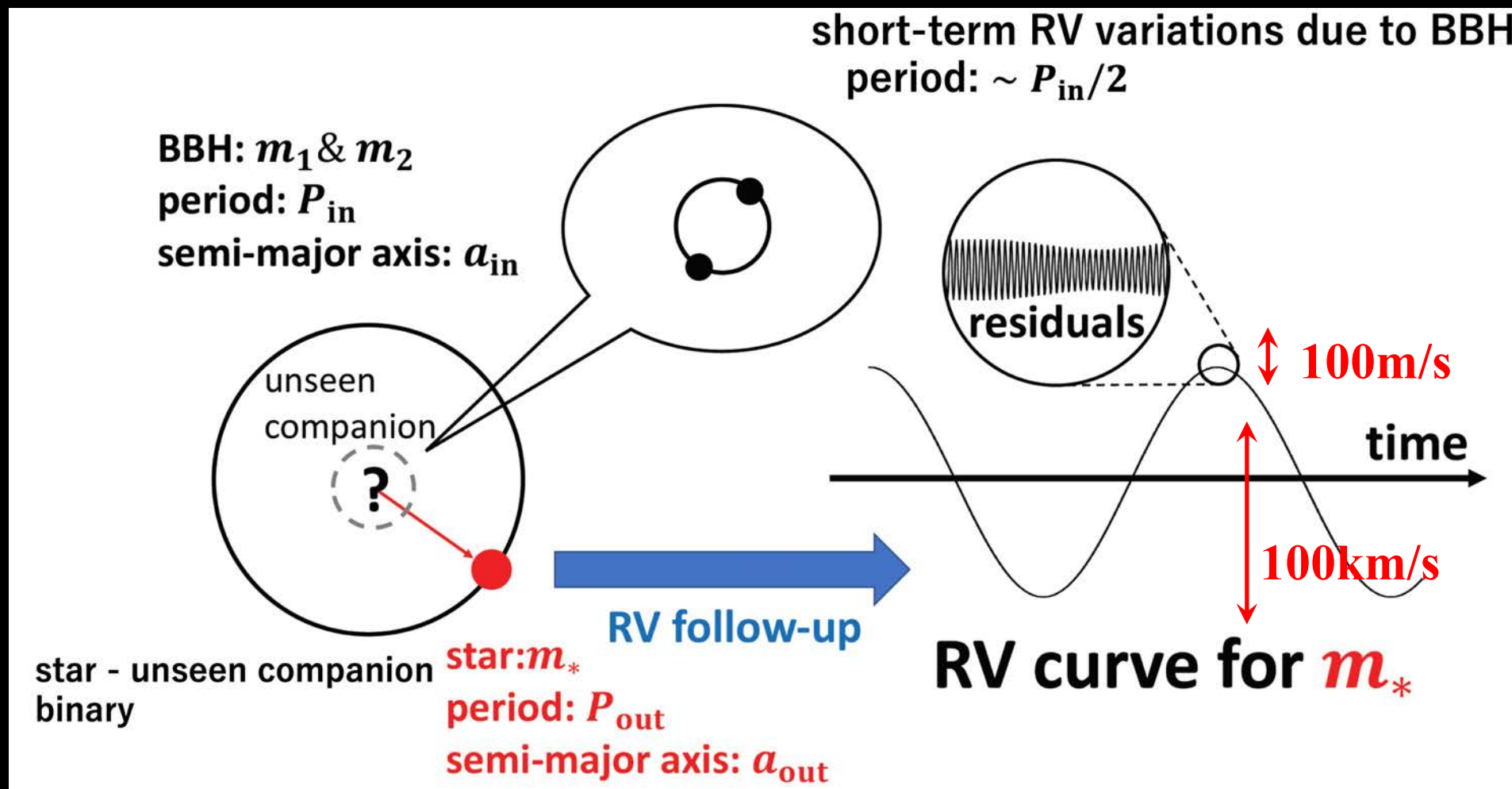
Comparison between the test particle approximation and a comparable-mass system in the presence of general relativity. The systems in the right and left panels have the same parameters and initial conditions apart from m_2 , which is set to zero in panel a and $m_2 = 8 M_{\odot}$ in panel b. The other parameters are: $m_1 = 10 M_{\odot}$, $m_3 = 30 M_{\odot}$, $a_1 = 10 \text{ AU}$, $a_2 = 502 \text{ AU}$, $e_1 = 0.001$, $e_2 = 0.7$, $\omega_1 = \omega_2 = 240^\circ$, and $i_{\text{tot}} = 94^\circ$. Red lines correspond to pure Newtonian evolution, and blue lines include general relativity (GR)

4 ブラックホール三体系

重力波以外のブラックホール連星探査

- 宇宙にはブラックホール連星は数多くある
 - そもそも単独ブラックホールは銀河系内に1億個程度あると予想されている(が、ほとんどは見えない)
 - 重力波で検出できるブラックホール連星@系外銀河は合体直前のみ
 - 長公転周期ブラックホール連星なら銀河系内にもっと多くあるはず
- 光を用いたブラックホール連星探査の方法論
 - 挙動不審な運動をする恒星を見つけ、恒星・ブラックホール連星(=ブラックホールを含む3体系)を探す
 - 系外惑星の視線速度サーベイ、位置天文学的サーベイ(ガイア衛星)
 - 予想される信号は？ (Hayashi, Wang+YS 2020, Hayashi+YS 2020, 2021)

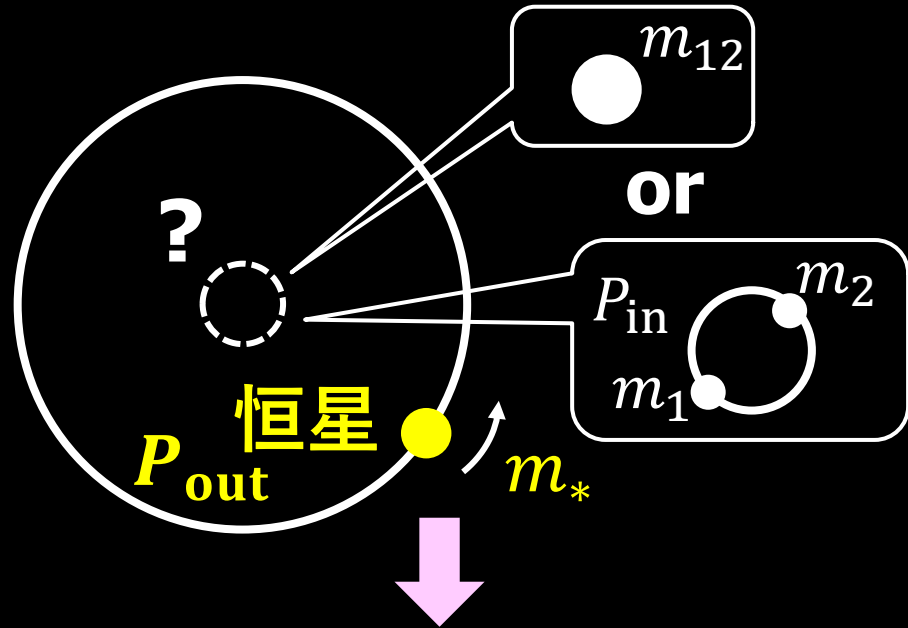
ブラックホール連星+恒星からなる三体系



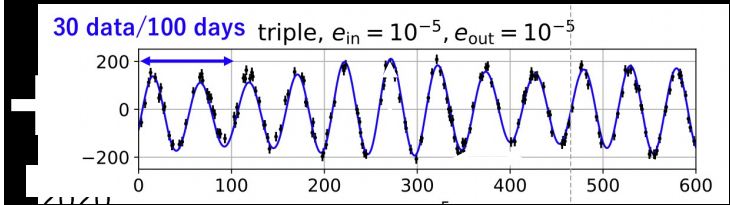
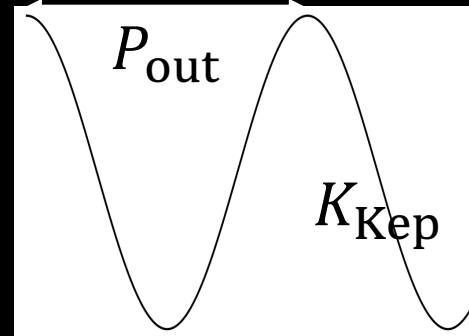
同一軌道面の場合の力学モデル: Hayashi, Wang & YS 2020, ApJ 890, 112

斜交軌道面の場合の力学モデル: Hayashi & YS 2020, ApJ, 897, 29

ブラックホール連星による恒星の動径速度変動



(i) 同一軌道面 3 体系 振幅 $\sim K_{Kep} \left(\frac{P_{in}}{P_{out}} \right)^3$



周期 $\sim P_{in}/2$

+ 短周期動径速度変動 (BH連星による摂動の効果)

高精度動径速度モニター観測

BH連星の重心に対するケプラー運動

+ BH連星による短周期摂動項

解析近似モデル + N体数値計算 (N=3)

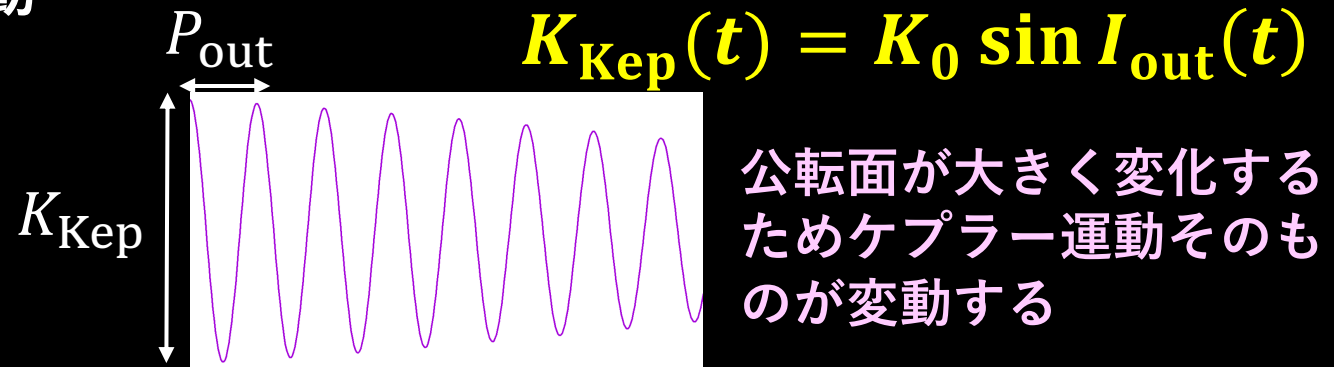
永年摂動近似は用いていない

Hayashi, Wang & YS 2020

Hayashi & YS 2020

(ii) 斜行軌道面 3 体系

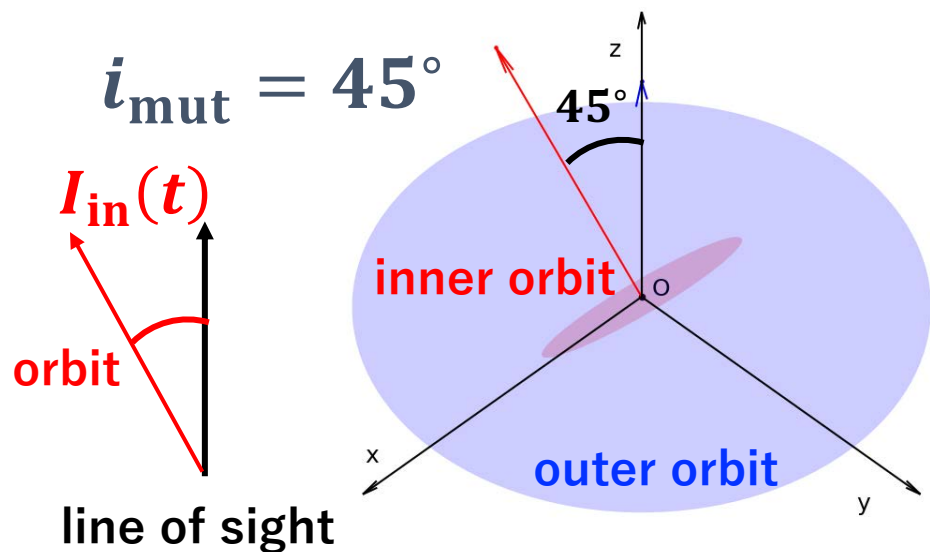
公転面傾斜角 $I_{out}(t)$ が古在-Lidov 効果で時間変化



公転面が大きく変化するためケプラー運動そのものが変動する

ZLK効果が弱い場合

斜交軌道 3 体系の初期条件



$$P_{\text{out}} = 78.9 \text{ days}$$

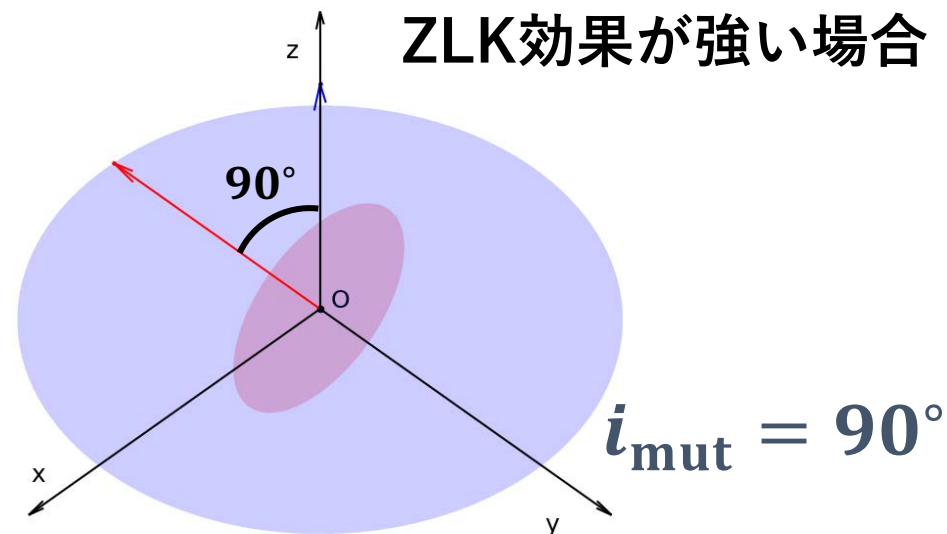
$$P_{\text{in}} = 10 \text{ days}$$

$$m_1 = m_2 = 10M_\odot$$

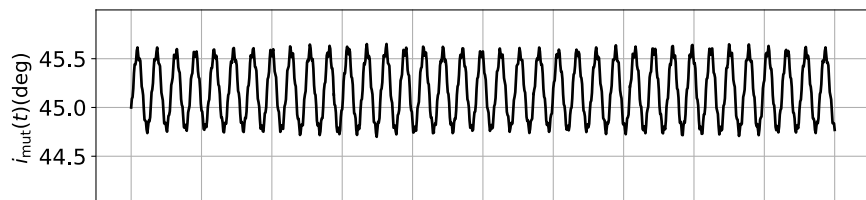
$$m_* = 3M_\odot$$

$$e_{\text{out}} = 0.03$$

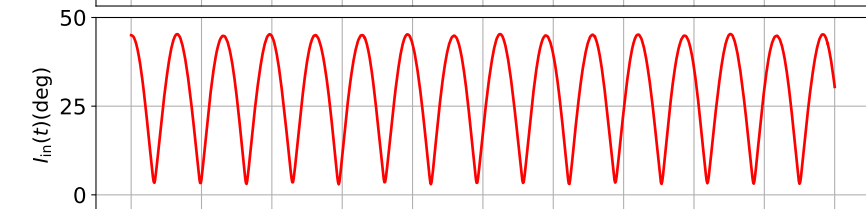
$$e_{\text{in}} = 10^{-5}$$



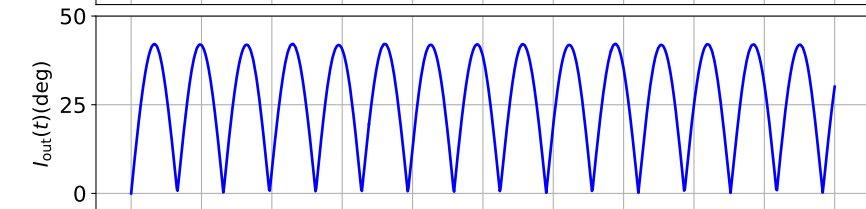
$i_{\text{mut}}(t)$



$I_{\text{in}}(t)$

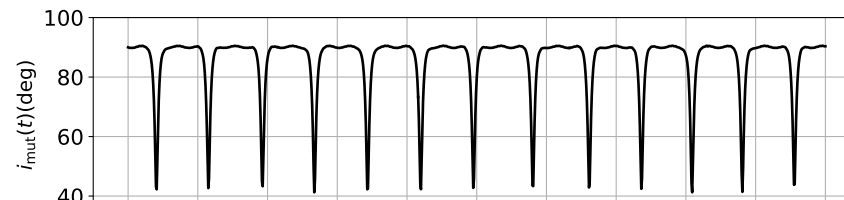


$I_{\text{out}}(t)$

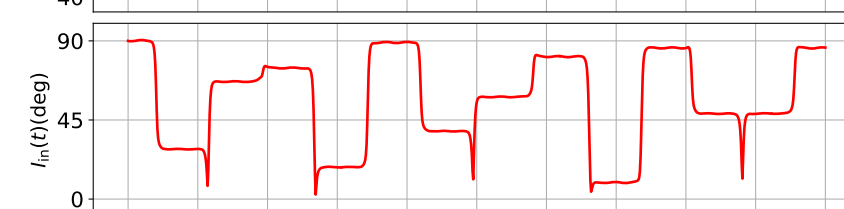


$t/P_{\text{out}}^{(0)}$

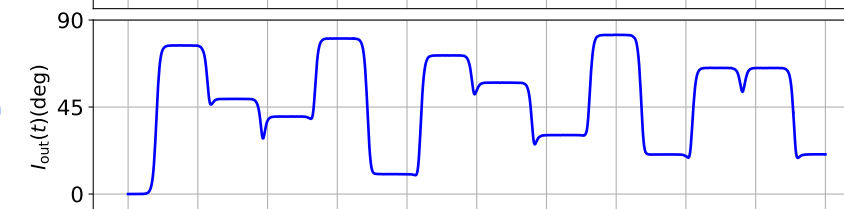
$i_{\text{mut}}(t)$



$I_{\text{in}}(t)$



$I_{\text{out}}(t)$



$t/P_{\text{out}}^{(0)}$

$$t = 0P_{\text{out}}^{(0)}$$

$$i_{\text{mut}} = 45^\circ$$

$$t = 0P_{\text{out}}^{(0)}$$

$$i_{\text{mut}} = 90^\circ$$

ZLK効果が強い場合

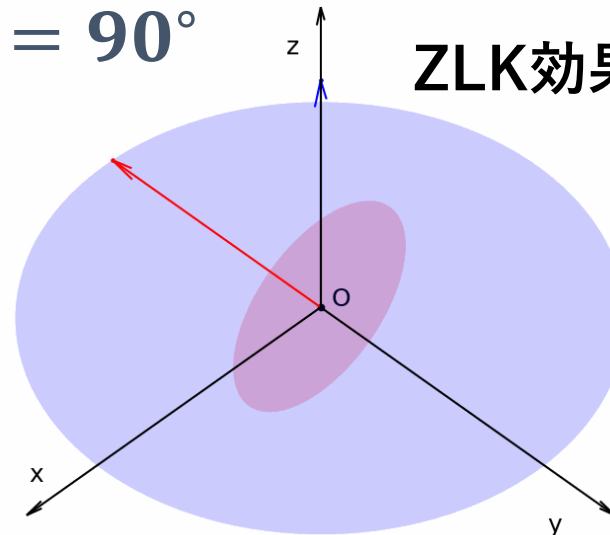
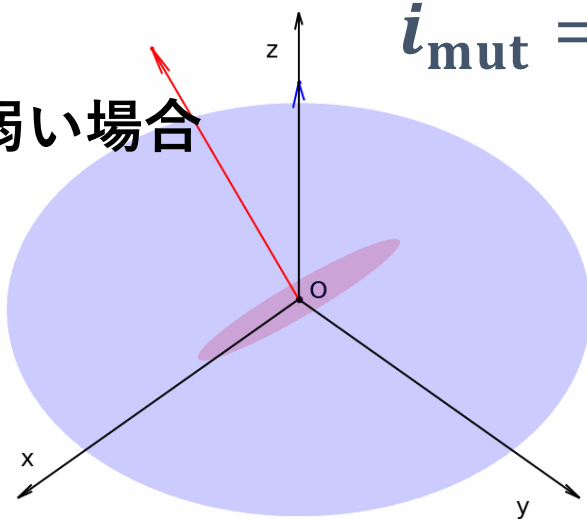
⇒ 大振動の
非定常歳差
運動

斜交軌道 3体系の進化

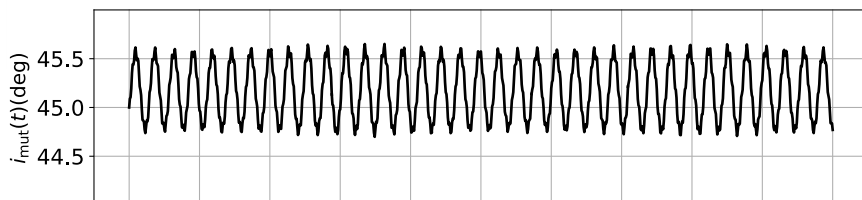
$$K_{\text{Kep}} = K_0 \sin I_{\text{out}}(t)$$

ZLK効果が弱い場合

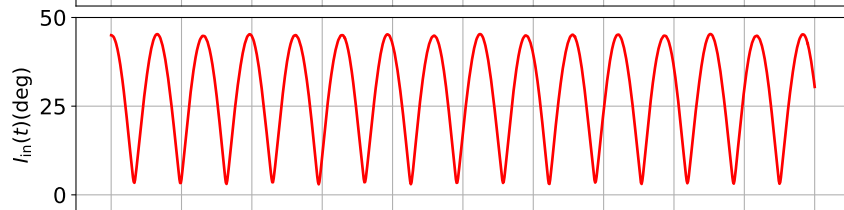
⇒ 小振幅の
周期的変動



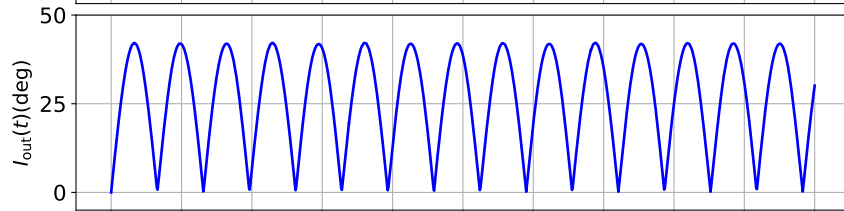
$$i_{\text{mut}}(t)$$



$$I_{\text{in}}(t)$$

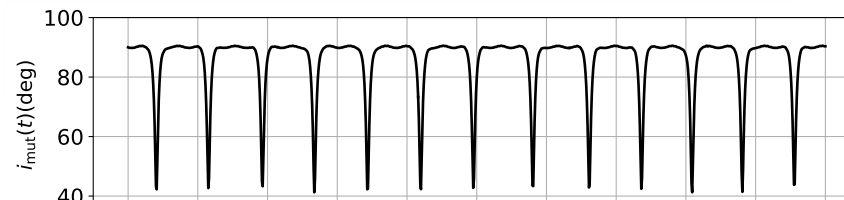


$$I_{\text{out}}(t)$$

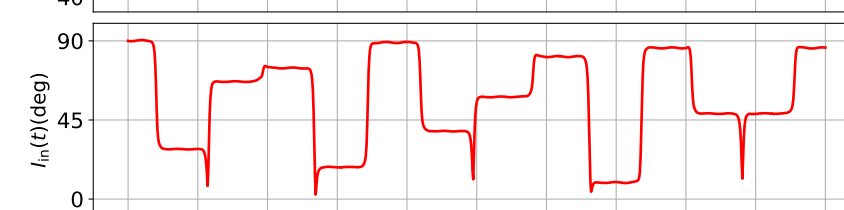


$$t/P_{\text{out}}^{(0)}$$

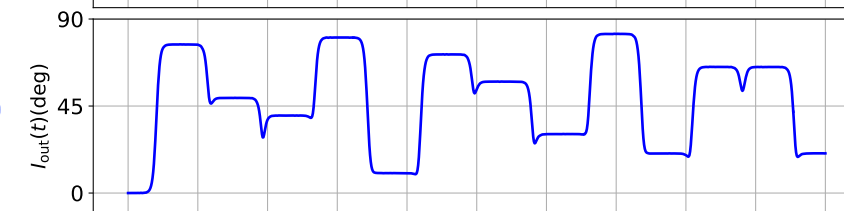
$$i_{\text{mut}}(t)$$



$$I_{\text{in}}(t)$$



$$I_{\text{out}}(t)$$

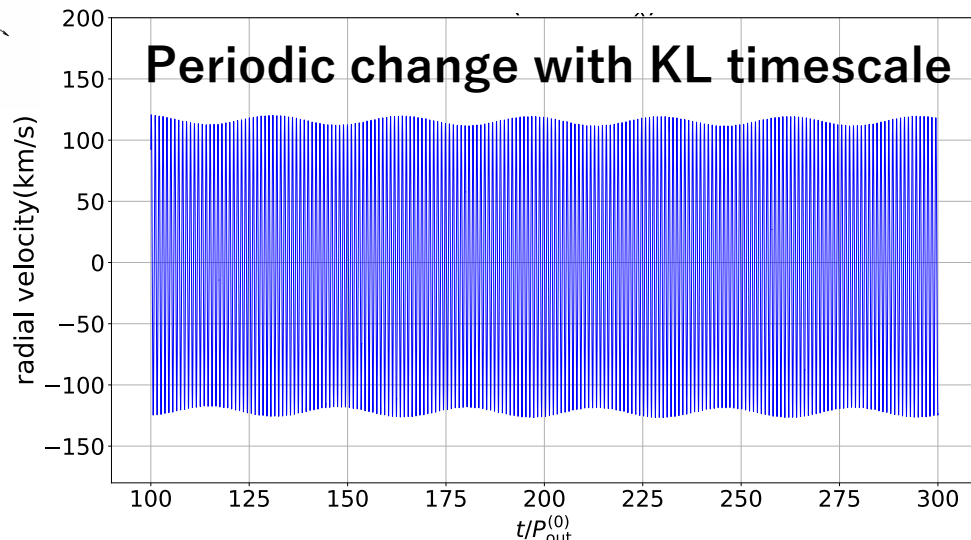


$$t/P_{\text{out}}^{(0)}$$

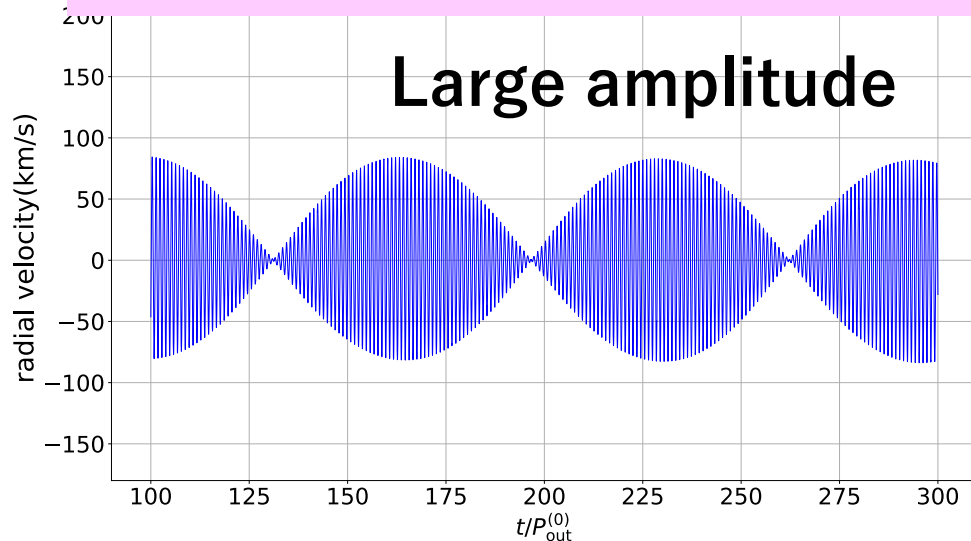
斜交軌道面 3 体系のケプラー一動径速度の進化

$$i_{\text{mut}} = 45^\circ \quad K_{\text{Kep}} = K_0 \sin I_{\text{out}}(t)$$

x-direction (near edge-on) total RV

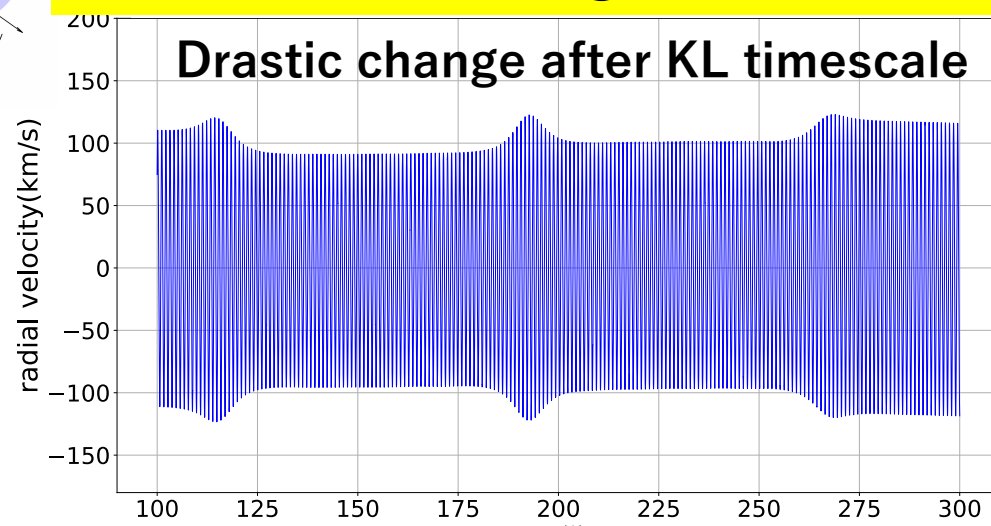


z-direction (near face-on) total RV

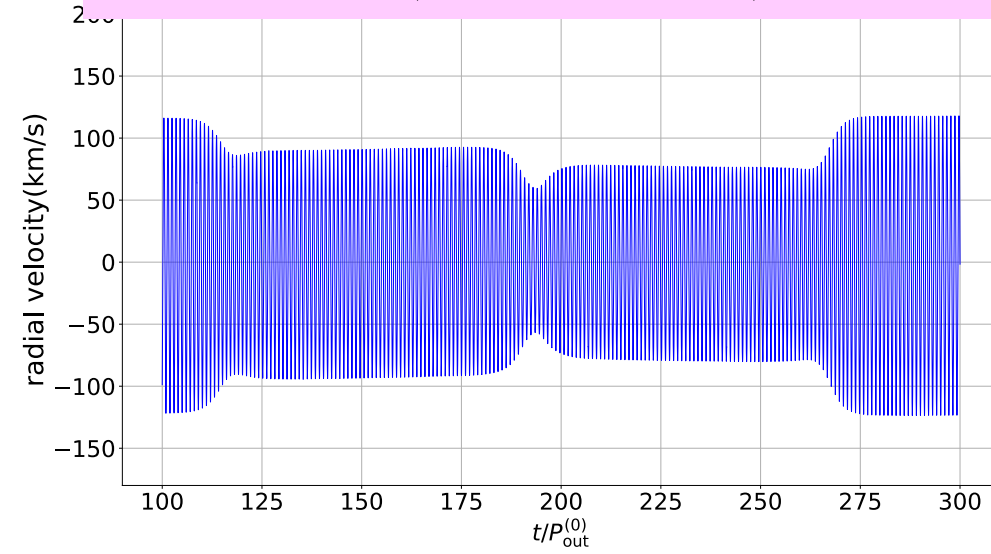


$$i_{\text{mut}} = 90^\circ$$

x-direction (near edge-on) total RV

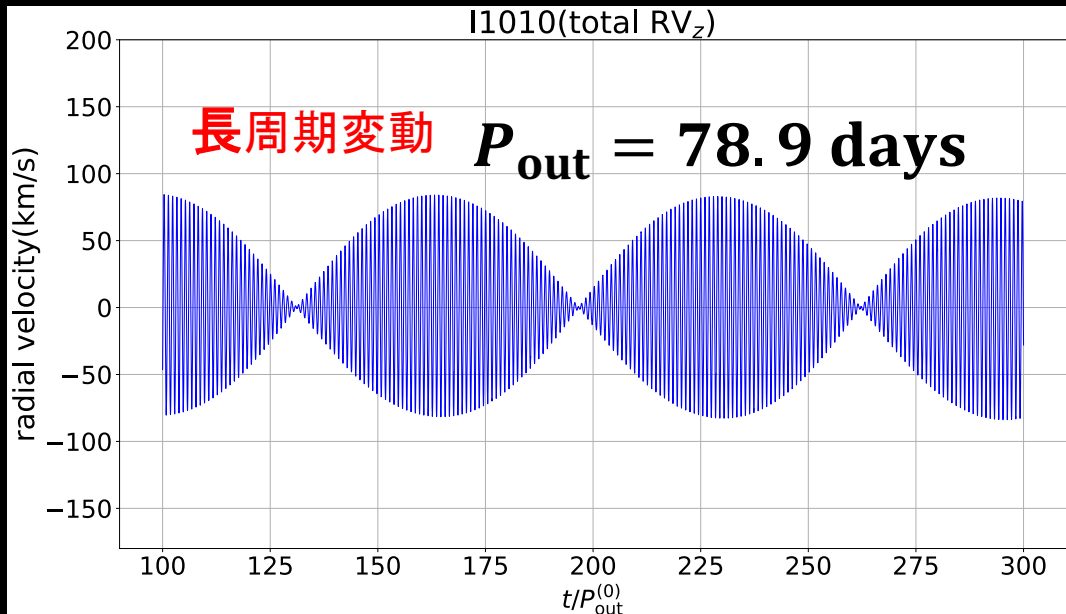
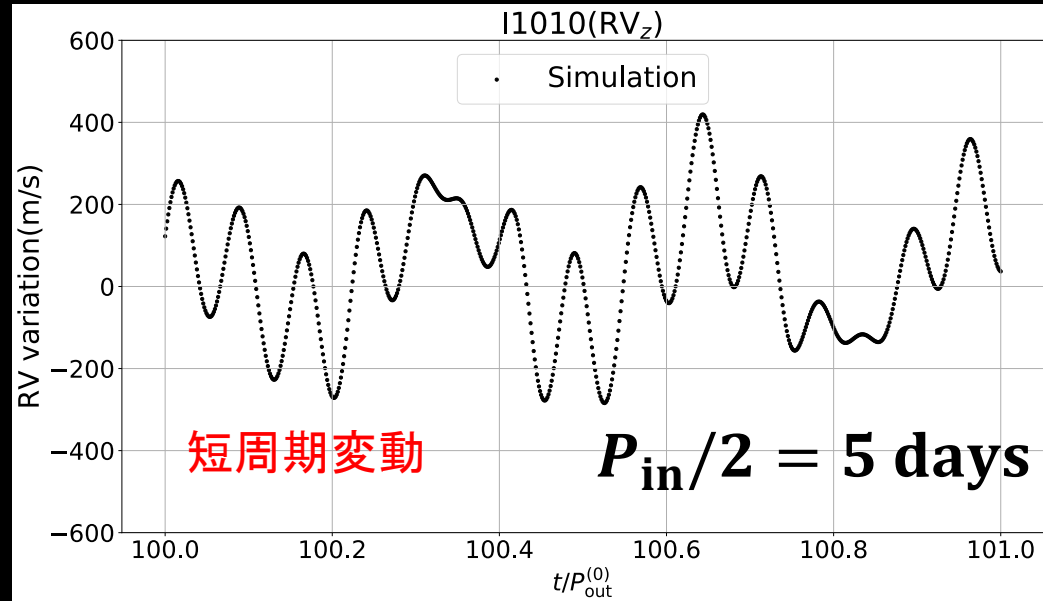


z-direction (near face-on) total RV



斜交軌道 3 体系の動径速度変動

振幅は3桁異なる



10M_☉ + 10M_☉ のBH連星 (公転周期10日) の周りを、初期軌道傾斜角45度で80日で公転する恒星の例

短周期変動

内側のブラックホール連星の公転周期の半分で、振幅はO(100m/s)

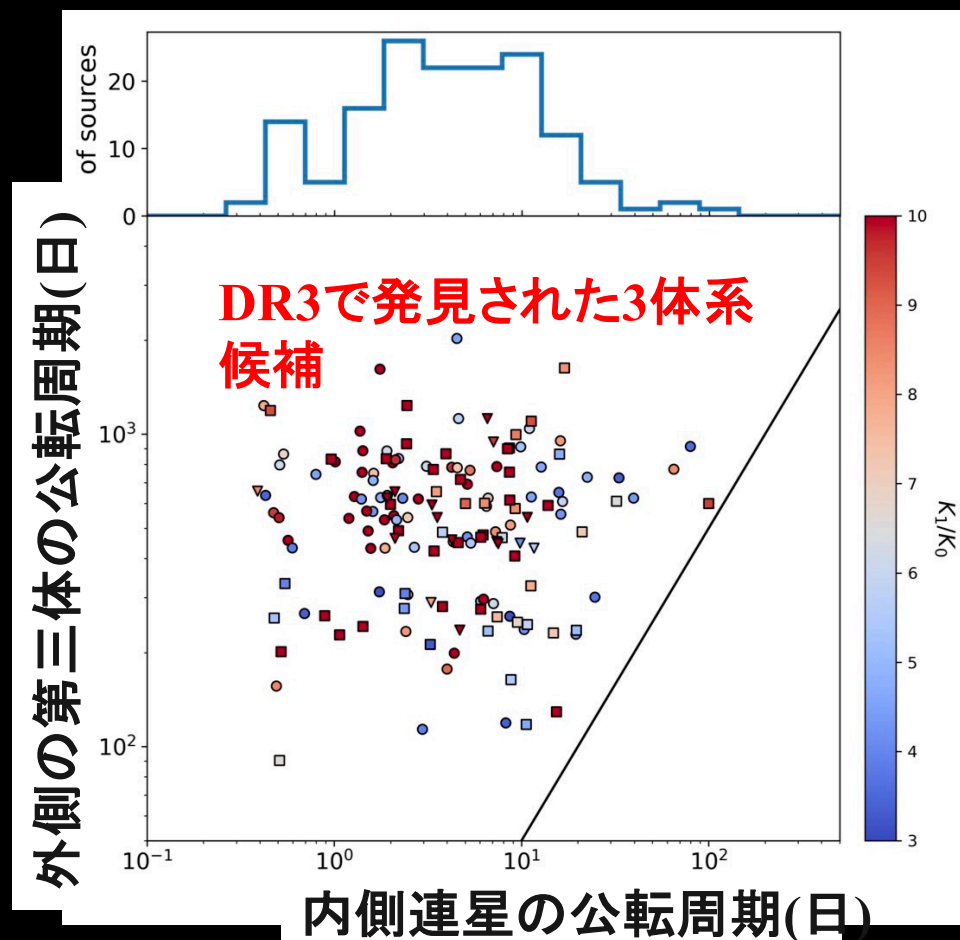
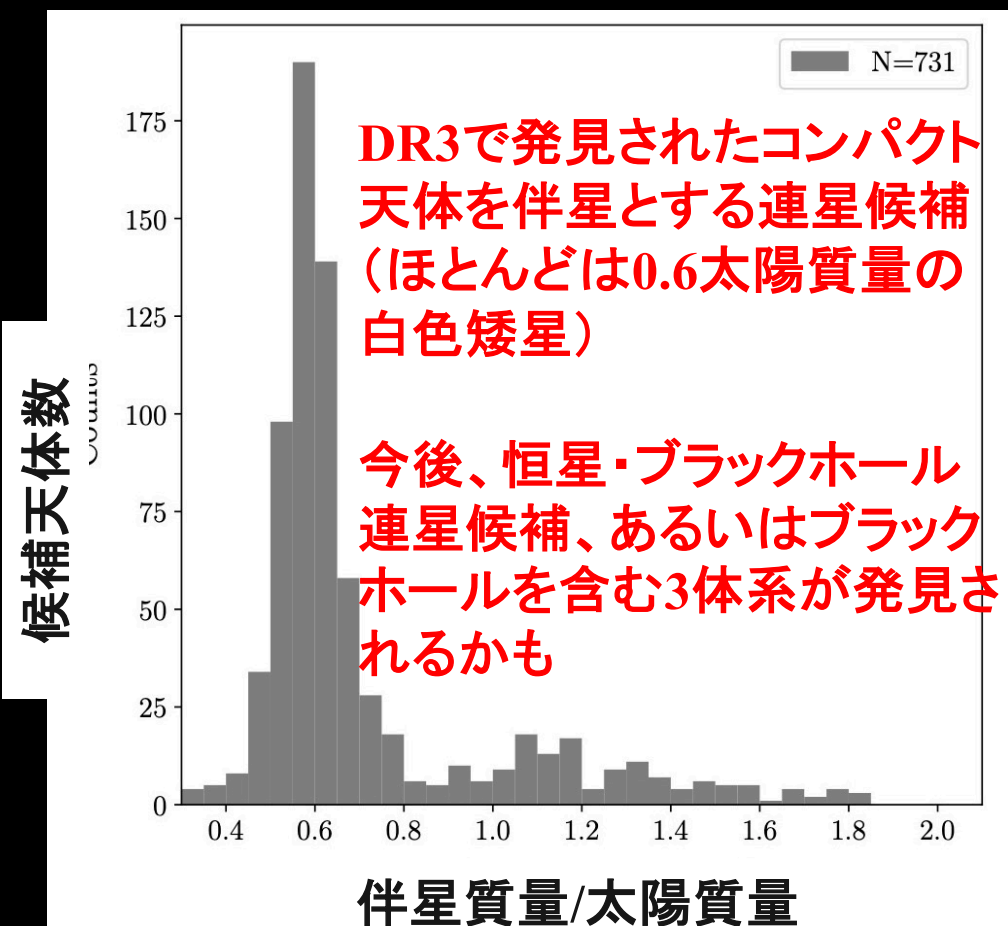
長周期変動

軌道面の歳差運動 + ZLK振動で、振幅はO(100km/s)

Hayashi & YS 2020, ApJ, 897, 29

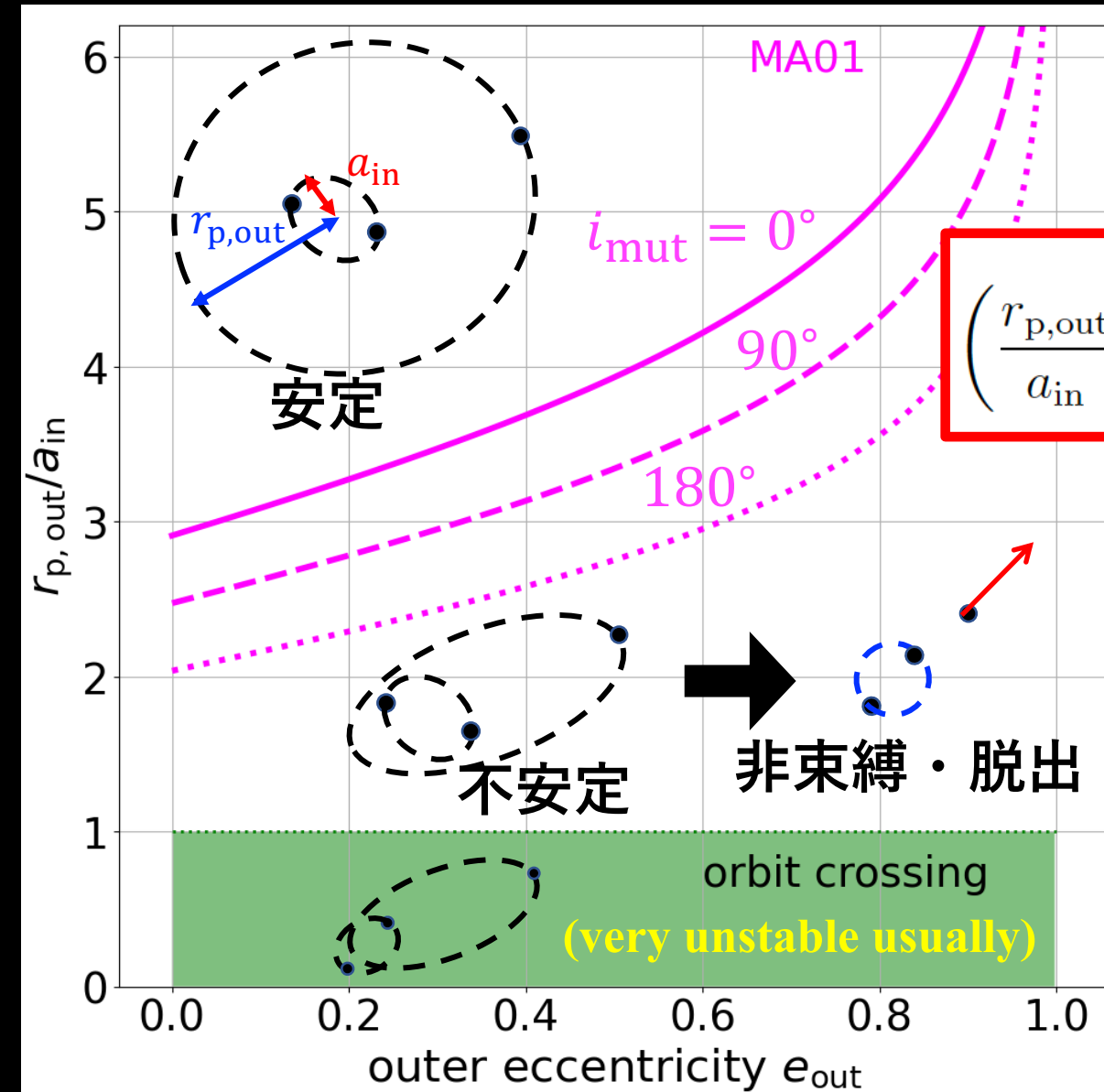
Gaia DR3 を用いた多重連星系(コンパクト天体を含む)探査

- Gaia collaboration: Arenou et al. "Gaia Data Release 3: Stellar multiplicity, a teaser for the hidden treasure" arXiv:2206.05595 **DR4, DR5に期待!**



5 リアプノフ安定性とラグランジュ安定性

三体系は一般的に不安定⇔ 天文学的多様性



■ 広く用いられている力学的不安定条件

- Mardling & Aarseth (1999, 2001)

$$\left(\frac{r_{p,out}}{a_{in}}\right)_{MA} \equiv 2.8 \left(1 - 0.3 \frac{i_{mut}}{\pi}\right) \left[\left(1 + \frac{m_3}{m_{12}}\right) \frac{(1 + e_{out})}{\sqrt{1 - e_{out}}}\right]^{2/5}$$

- よく知られかつ広く用いられているものの、その意味が誤解されている事が多い

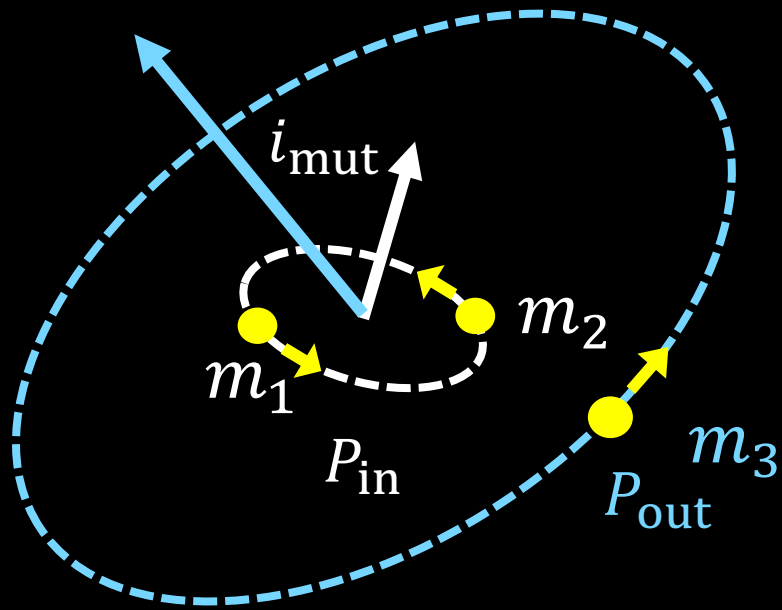
■ リアプノフ的不安定性

- 局所的な軌道の不安定性(カオス性)

■ ラグランジュ不安定性

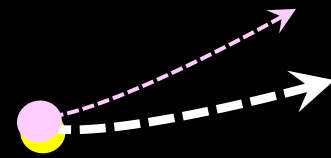
- 系の軌道が有限範囲にとどまるか
- 観測天文学的にはこちらが重要

リアプノフ的不安定性 vs ラグランジュ不安定性



■ リアプノフ的不安定性

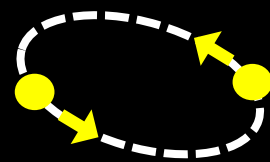
- 無限小異なる軌道要素で出発した粒子の軌道の差が指数関数的に発散する(系のカオス性)



Mardling & Aarseth (2001)

■ ラグランジュ不安定性

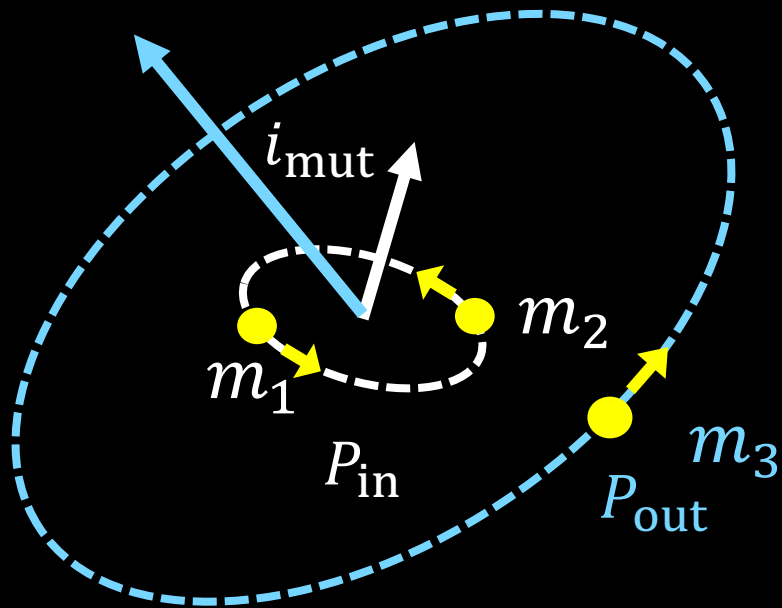
- 系から粒子が束縛されなくなり飛び去る(軌道の非有界性)



Hayashi, Trani & YS,
arXiv:2207.12672 ApJ 939(2022)81
arXiv:2209.08487 ApJ in press

ラグランジュ不安定性は a_{in} と a_{out} がそれぞれ保存する永年近似では起こらない
⇒ N体計算 (N=3)が必要
⇒ リアプノフ的不安定性との区別が重要(しばしば混同されている)

ニュートン力学のもとでの三体系の長時間軌道計算 (永年摂動近似ではないN体計算、相対論は無視)



$e_{in} = 10^{-5}$ (circular)

**N-body code
TSUNAMI
(Trani and Spera)**

$\frac{r_{p,out}}{a_{in}}$ e_{out}

Integration time
up to $10^9 P_{in}$
(roughly $10^{6-7} P_{out}$)

Disruption time
 $\frac{T_d}{P_{in}} (q_{21}, q_{23}, i_{mut}, \dots)$

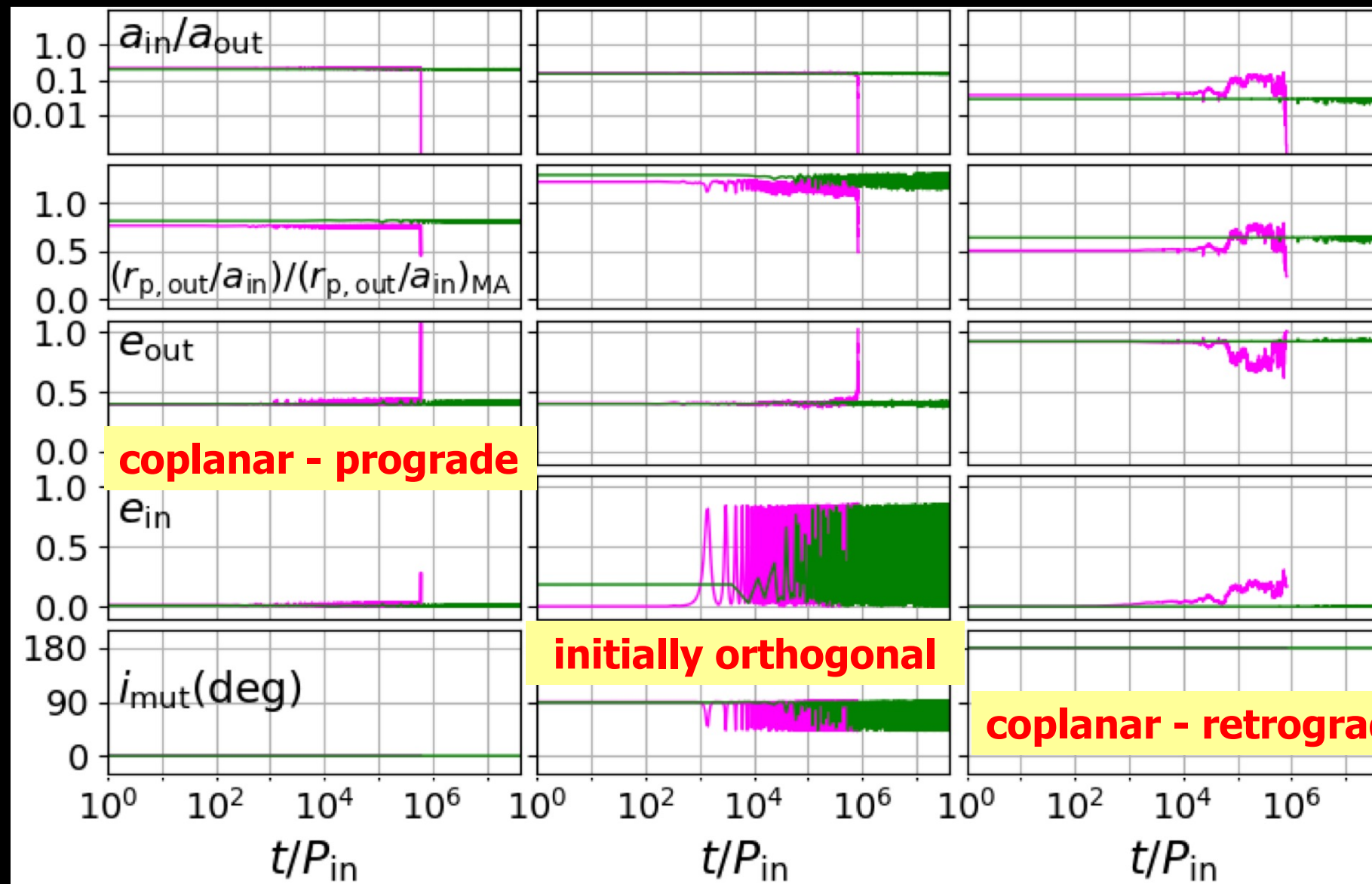
$i_{mut}: 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

Coplanar: prograde, retrograde
Orthogonal

Hayashi, Trani & YS,
arXiv:2207.12672 ApJ 939(2022)81
arXiv:2209.08487 ApJ in press

$q_{21} \equiv m_2/m_1 (\leq 1)$ Mass ratio (inner binary)
 $q_{23} \equiv m_2/m_3$ Mass ratio (tertiary)

三体系の軌道進化の例



Green:
Lagrange stable
up to $t=10^8 P_{in}$

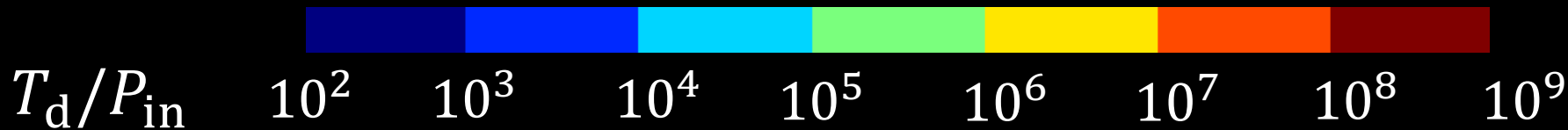
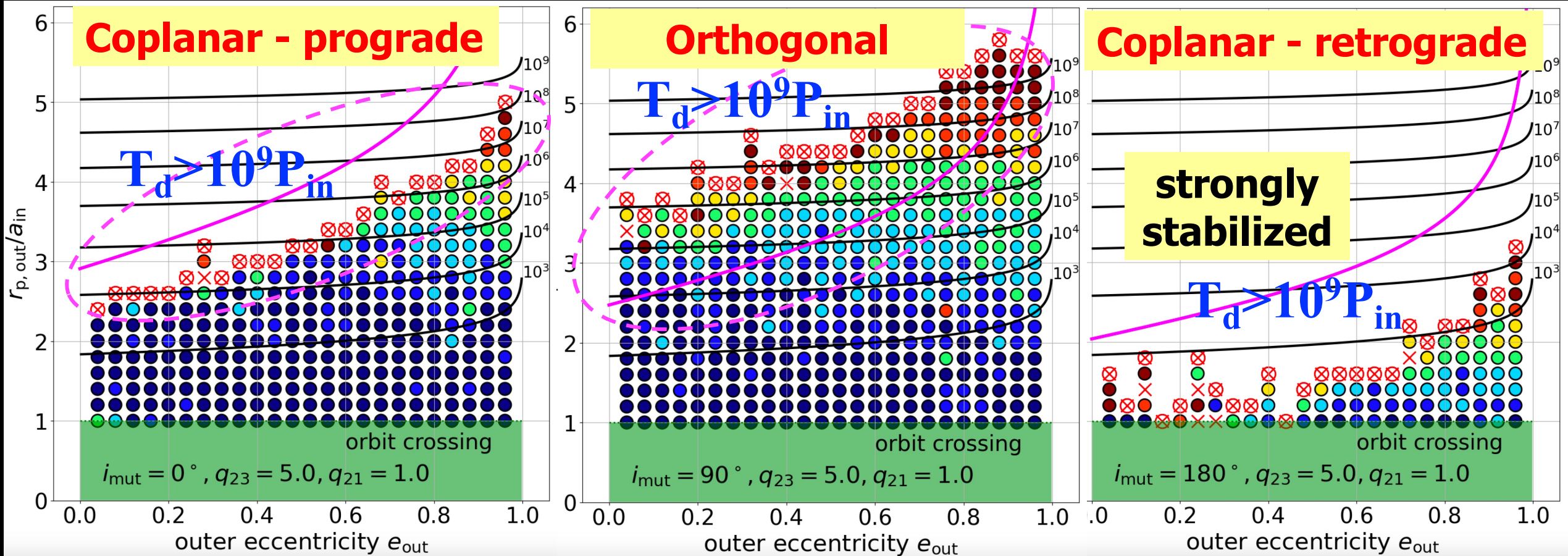
Magenta:
Lagrange unstable
around $t=10^6 P_{in}$

Hayashi, Trani & YS
arXiv:2207.12672
ApJ 939 (2022)81

不安定時間スケール $T_d : a_{out}(1-e_{out})/a_{in} - e_{out}$ 平面

$m_1 = m_2 = 5m_3$

Liapunov Stability boundary by Mardling & Aarseth (2001)



不安定時間スケール T_d の軌道傾斜角依存性

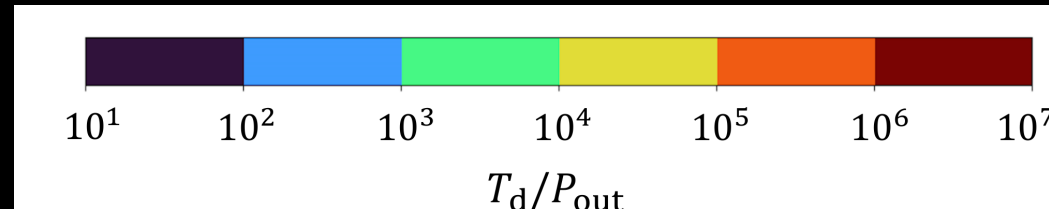
T_d/P_{out} on $a_{out}(1-e_{out})/a_{in} - e_{out}$ plane

$60 < i_{mut} \text{ (deg)} < 150$

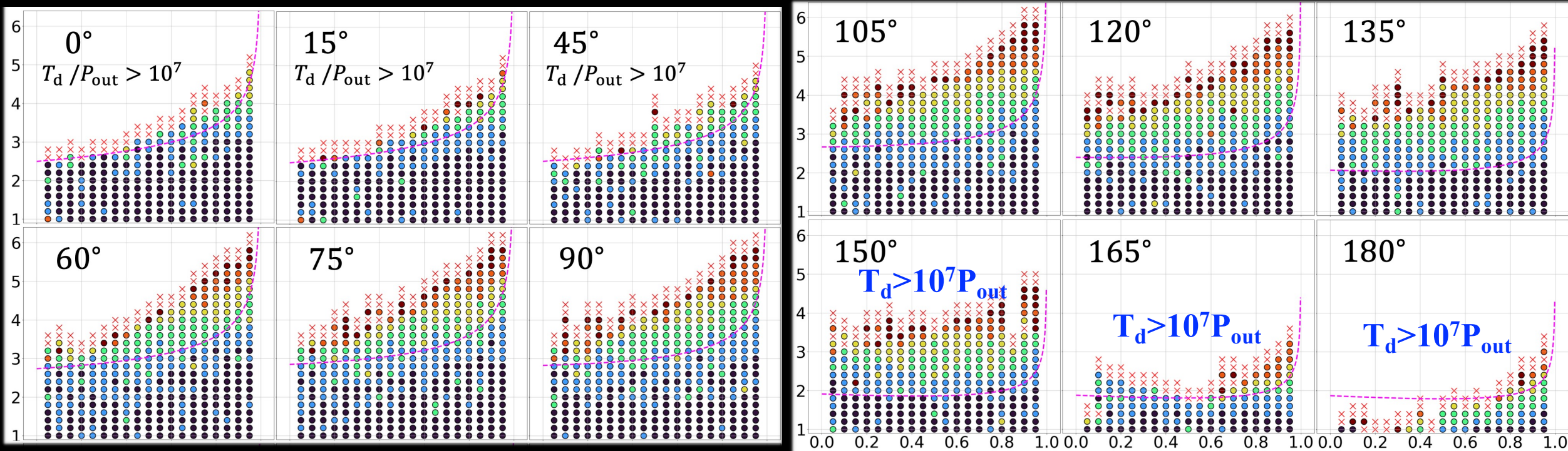
ZKL振動による不安定化

$i_{mut} \text{ (deg)} > 160$

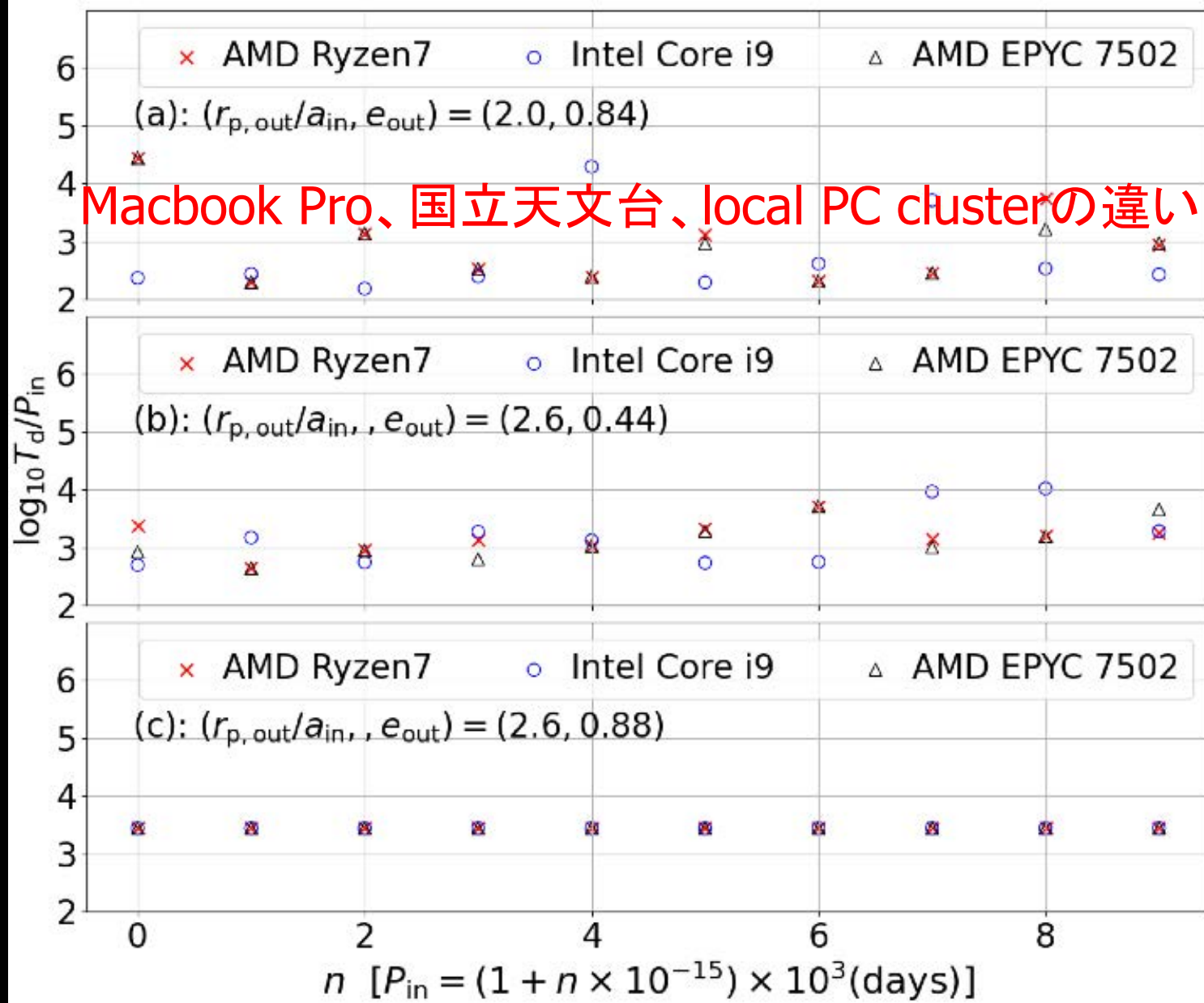
2つの軌道間のエネルギー・角運動量輸送が抑制され安定化



Very different from the stability boundary by Mardling & Aarseth (2001)



不安定時間スケール T_d のカオス的振る舞い

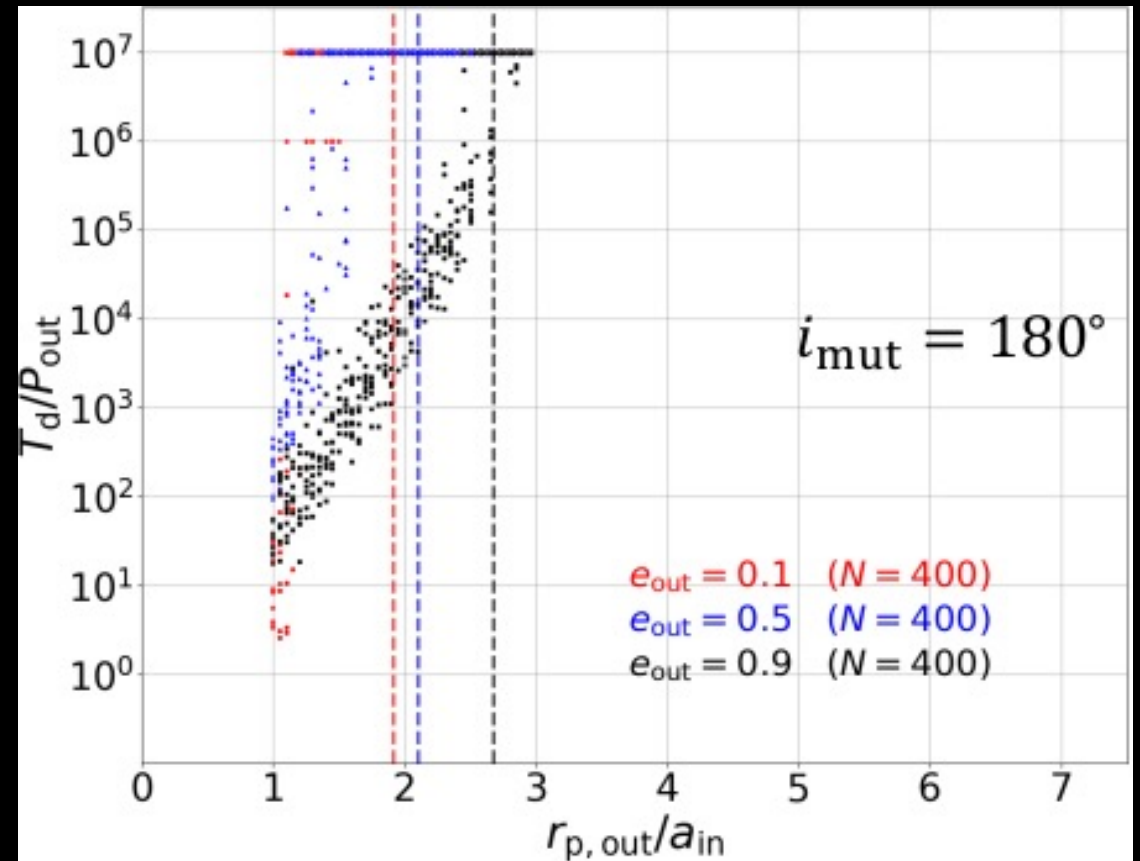
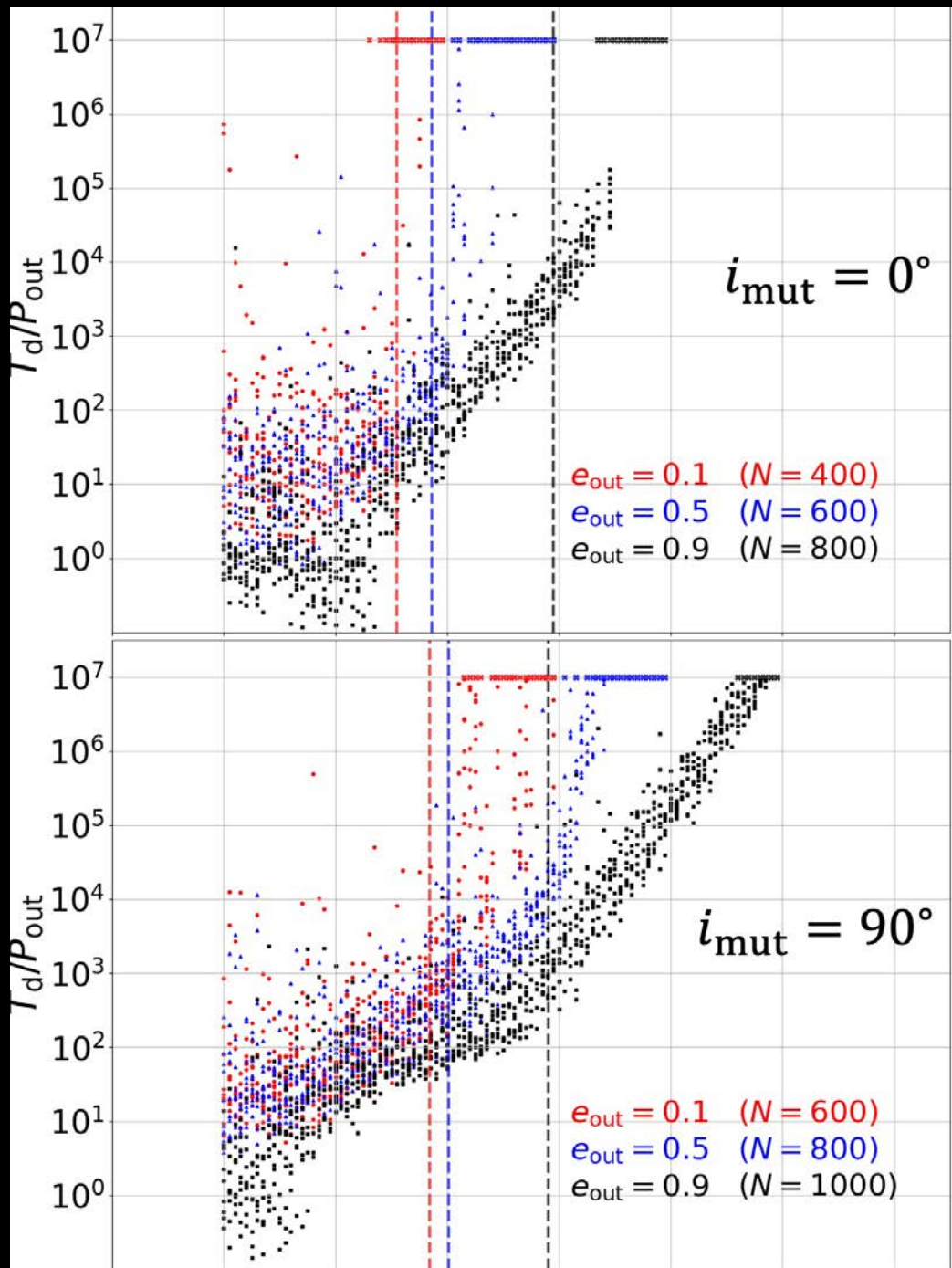


- P_{in} の初期値のわずかな違いが、ラグランジュ不安定性時間に1, 2桁の違いを生むことがある
- 異なるアーキテクチャーの結果の違いと整合的
- 他の初期値 (特に3体の位相) の違いによっても同じく1, 2桁の違いが生まれる
- なぜ1, 2桁なのかは不明

Hayashi, Trani & YS
 arXiv:2207.12672
 ApJ 939(2022)81

ランダムな位相のもとでの T_d/P_{out} ($r_{p,out}/a_{in}; i_{mut}, e_{out}$)

- リアプノフ的考察に基づく不安定境界(破線: Vynatheya+2022, Mardling&Aarseth2001)とは明らかに異なる



6 まとめ

三体力学は多様な天体現象の基礎過程

- 系外惑星系、ブラックホール連星の形成や進化を理解する上で本質的
 - 歴史的に研究されてきた太陽系天体や数理物理学にとどまらない広がりを見せている
- なかでも、von Zeipel-Lidov-Kozai効果は、Hot Jupiterの形成、ブラックホール連星合体の時間スケールを加速させる意味でも極めて重要
- 一方で、永年摂動近似に基づく結果の信頼性は定量的に検証すべき
- 三体系が生み出す力学的不安定性 = 多様な天体現象の源泉