# 電磁流体力学

2021.7.2

## はじめに

この章では電磁場と相互作用する流体の運動について考える．電離した気体（プラズマ）では電気伝導率が大きくなり，そのような気体が磁場の中で運動すると電流が生じ，気体は磁場と相互作用する．電子やイオンが混じり合ったプラズマの運動やプラズマ中の現象の一般論は「プラズマ物理学」として広範な学問分野となっており，流体力学，特に大学の学部で学ぶ流体力学の範囲を大きく超えてしまう．

この章ではプラズマの複雑な現象を追う代わりに，「導電性流体」の運動を様々な物理的条件のもとに成り立つ近似を用いて考察する．導電性の１流体の力学は電磁流体力学 (Magnetohydrodynamics: MHD) と呼ばれ，その適用範囲は限られているものの，磁気圧力やアルフヴェン波など重要な概念を学ぶことができる．本来は MHD の仮定や関連する時間・空間スケールの詳細な検討から解説すべきだが，以下でははじめに基礎方程式を導き，流体力学と電磁気学の応用としていくつかの興味深い現象を理解する．

MHD 近似は大きく３つの仮定のもとに成り立つ:

- 電離したプラズマの中で電子とイオンは十分速く (強く）クーロン相互作用し，それぞれが空間的に偏在したりせず，流体は巨視的には中性である．
- 流体は非相対論的，すなわち流速は光速より十分小さい．
- 流体（プラズマ）の電気伝導度は十分大きく，弱い電場に対しても Ohm の法則にしたがって電流が発生する．

以下ではこれらの仮定のもとで MHD の方程式を扱おう．

## 1　基礎方程式

これまでに学んだ流体力学の方程式と電磁気の Maxwell 方程式を組み合わせて運動方程式を構成することができる．はじめに，質量保存をあらわす連続の式はこれまでの流体に対するものと変わらず

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

である．次に，運動方程式には単位体積あたりの流体にはたらく Lorentz 力も加わり，

$$\rho \left[ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \right] = -\nabla p + (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \tag{2}$$

となる．

電磁場に対する Maxwell の方程式は

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

および

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} \tag{4}$$

である．本章では $\mu$ は流体の粘性ではなく透磁率をあらわす．

一般に流体の速度が光速に比べて十分小さい場合には変位電流の項 $\epsilon\mu\partial\boldsymbol{E}/\partial t \sim (1/c^2)\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ は無視できるため上式には含めなかった．電流密度 $\boldsymbol{J}$ は電気伝導率を $\sigma$ として Ohm の法則

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} = \sigma\boldsymbol{E}_{\mathrm{f}} \tag{5}$$

から与えられる．ただしこれは流体とともに動く局所的な系で考えていることに注意する[*1]．ここでは添字 f をつけて区別した．空間上のある定点に固定した (静止) 系でみると，速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する流体に対しては

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{J} + \rho_{\mathrm{e}}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} \tag{6}$$

と与えられる．ここで $\rho_{\mathrm{e}}$ は電荷密度を表すが，多くの場合，流体は電気的に中性とみなすことができ，$\rho_{\mathrm{e}} = 0$ とすることで

$$\boldsymbol{J} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{7}$$

を得る．さらにアンペールの法則 (4) を使うと

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma\mu}\nabla\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} \tag{8}$$

となる，ファラデーの電磁誘導の法則 (3) と $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ を使って最終的に

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) + \nu_{\mathrm{B}}\Delta\boldsymbol{B} \tag{9}$$

を得る．磁場に関するこの式を誘導方程式とよぶ．

第 6 章で渦に対する粘性の効果を考察した際に，渦度についての方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}) + \nu\Delta\boldsymbol{\omega} \tag{10}$$

を得たことを思い出そう．この式は粘性が渦による散逸を引き起こす効果をあらわしていた．上記の $\boldsymbol{B}$ についての式は全く同じ形をしており，磁気粘性 $\nu_{\mathrm{B}} = 1/\mu\sigma$ により磁場の散逸が引き起こされることを表している．流体が静止していれば

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nu_{\mathrm{B}}\Delta\boldsymbol{B} \tag{11}$$

の形の拡散方程式に帰着するので，系の典型的なサイズ（長さスケール）を $L$ とすると磁場はおおよそ $t \sim \mu\sigma L^2$ 程度の時間で拡散することが分かるだろう．

## 2　磁気圧と磁気張力

磁気流体に対する運動方程式 (2) のローレンツ力を表す項を次のように書き換えよう．

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{12}$$

として，ベクトル解析の公式

$$\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{13}$$

を使うと，運動方程式は

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right] = -\nabla p - \nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right) + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{14}$$

[*1] 流体全体が一方向に等速運動する（やや意味のない）場合でなければ．全流体要素に対応する慣性系をとることはできないので，この形の Ohm の法則がいたるところで局所的に成り立つ (とする）というのも MHD 近似の一つである．

となる．

ここで，磁場により生じる磁気圧を

$$p_{\mathrm{mag}} = \frac{B^2}{2\mu} \tag{15}$$

と定義すると運動方程式は

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right] = -\nabla(p + p_{\mathrm{mag}}) + \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{16}$$

となり，たしかに磁場が実効的な圧力を流体におよぼすことが分かる．磁気圧の強さは磁場と流速の向きにはよらず，磁束密度の２乗に比例する量である[*2]．

次に，$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$ がおよぼす力について考えよう．これは下図のように曲がった磁力線を考えるとわかりやすい．

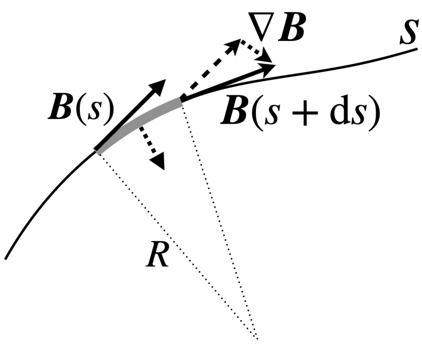


図 1

磁力線に沿った局所的な磁場ベクトルとその変化（勾配）を考えると，図の破線矢印のように曲率ベクトルの方向の成分をもつ力が生まれ，これは磁力線の曲がり具合を解消する「張力」としてはたらく．

## 3　電磁流体中に生じる波

電磁流体中では，非圧縮の場合でも「波」が伝搬する．摂動 (波）の不安定性解析をするため，いつものように静止した流体に微小な変動

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \tag{17}$$
$$p = p_0 + p_1, \tag{18}$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1, \tag{19}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 \tag{20}$$

を加える．上記の基礎方程式に代入すると摂動に対する１次の式

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0, \tag{21}$$
$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_1), \tag{22}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{B}_0), \tag{23}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1 = 0 \tag{24}$$

[*2] 宇宙物理や天文系の教科書では cgs 単位系を用いて磁気圧を $B^2/8\pi$ と定義しているものも多いが，もちろん同じ磁気圧を表している．

となる．ベクトル解析の公式を用いて運動方程式を

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = -\nabla \left( p_1 + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1 \right) + \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{B}_1 \tag{25}$$

と書きかえ，この両辺の発散をとると

$$\nabla^2 \left( p_1 + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1 \right) = 0 \tag{26}$$

を得る．ここで非圧縮の場合の連続の式 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$ と $\nabla \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0$ を用いた．解の一つとして，遠方で発散しないという条件を課してラプラシアンの中身を

$$p_1 + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_1 = \text{定数} \tag{27}$$

としてみよう．この場合には簡潔な運動方程式

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{B}_1 \tag{28}$$

と誘導方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} = (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_1 \tag{29}$$

を得る*3．一般性を失うことなく $z$ 軸方向の一様な磁場 $\boldsymbol{B}_0 = (0, 0, B_0)$ を考え，上記の二つの式から $\boldsymbol{B}_1$ を消去すると

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu \rho_0} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_1}{\partial z^2} \tag{30}$$

という波動方程式を得る．この式は $z$ 軸方向に速度の摂動 $\boldsymbol{u}_1$ が速さ

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho_0}} \tag{31}$$

で伝わっていくことを表している． このような波をアルフヴェン波とよぶ．アルフヴェン速度 $v_{\mathrm{A}}$ は宇宙プラズマなどでは音速よりも十分大きくなる．たとえば太陽の表面では場所によっては $v_{\mathrm{A}} \sim 10^5$ m/sec にもなる．

*3 ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})$ を用いた．