

星はどうやって輝いているのか

一言で言えば「中心部で核融合反応を起こしてエネルギーを生成している」
しかし核反応で放出される光を直接「輝き」として見ているわけではないし、
そもそも太陽はあまりに安定的である - 40億年以上も明るさは変わらない。

知っておくとよい話：

太陽内部でのエネルギー生成率は $2 \times 10^{15} \text{ MeV} / \text{sec} / \text{m}^3$

一見わかりにくいのが、換算すると $300 \text{ W} / \text{m}^3$ となり、これは普通の部屋で
電球を2,3個つける程度である。激しいことが起こっているというより、穏やか。

おもしろいことに、核融合反応は太陽を熱くしすぎないように働きをしている。
ガスが重力収縮することで温度は上昇するが、中心付近での核反応によるエネルギー
生成でむしろ収縮を「遅らせて」、温度が異常に高くなるのを防いでいる！

核融合反応

例えば ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{p} + \text{p}$ のような反応を考えよう。より一般的に

$A + B \rightarrow C + D + \dots$ ように書くことができる。

反応率は材料の数に比例するので $n_A n_B \sigma v$ と与えられる。頻度は反応断面積と相対速度に比例し、それぞれの数（密度）に比例する。

普通は核子は速度「分布」をもっているので、より正確には $n_A n_B \langle \sigma v \rangle$

として、速度分布に対する積分 $\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \sigma v_r P(v_r) dv_r$ を使う。

多くの場合

Maxwell-Boltzmann 分布

$$P(v_r) dv_r = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{2/3} \exp \left(-\frac{m_r v_r^2}{2k_B T} \right) 4\pi v_r^2 dv_r$$

反応率

分子(核子)の速度よりも運動エネルギーを使う方がいろいろと便利なので

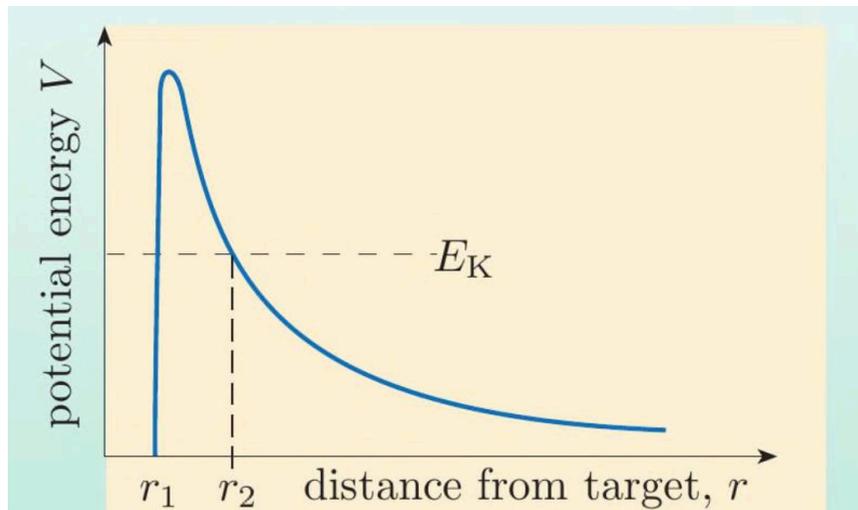
$$E = \frac{m_r v_r^2}{2} \Rightarrow \frac{dE}{dv_r} = \sqrt{2 m_r E} \quad \text{と変換して}$$

$$R_{AB} = n_A n_B \left(\frac{8}{\pi m_r} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} E \sigma(E) \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) dE$$

反応断面積 $\sigma(E)$ はそれぞれの反応に対してエネルギーの関数として与えられる。ただし、量子力学的計算から求めるにしろ、実験で計測するにしろ、ものによってはひどく大変で、いまだに反応率が正確にもとまっていないものも多い。

トンネル効果とガモフエネルギー

物質を古典的なものとして考えると、星の内部では核反応は起こらない。
なぜなら… 原子核の間のクーロンポテンシャルは左下のような形をしている。



r_1 : 強い力の有効範囲

原子核の半径 10^{-15} m ほどでは
 V はだいたい $1.4 Z_A Z_B$ MeV

右側から荷電粒子(核子)をエネルギー E_k でぶつけても、 r_2 まで近づいて跳ね返される。

r_1 まで近づかないと、強い力の助けを得ることができない。クーロンバリアの値は

$$V = \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

星内部の温度が 10^7 K 程度するとき、核子の典型的なエネルギーは $kT = 1$ keV くらい。

トンネル効果とガモフエネルギー

核反応を古典的に考察しても反応は起こらないので、より正確な量子力学を使ってみよう。核子の波動関数はシュレーディンガー方程式にしたがう：

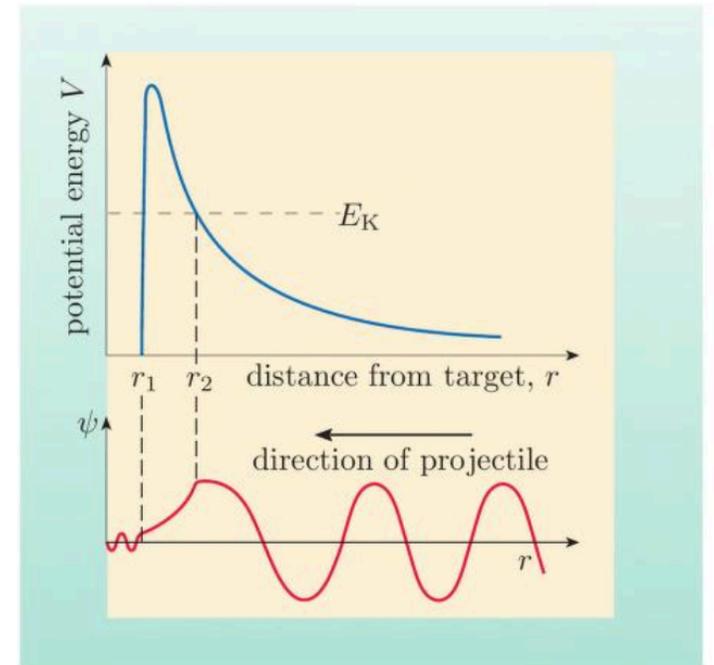
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V \right] \psi_S(r) = E \psi_S(r)$$

途中をスキップしてしまいが、 $\psi_S = \exp(\chi r)$

の形の解を求めてみると $\chi^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V - E)$

となることがわかる。

貫通（浸透）確率は振幅の二乗の比 $P \sim \frac{|\psi_S(r_1)|^2}{|\psi_S(r_2)|^2} = \left[\exp(-\chi(r_2 - r_1)) \right]^2$



課題 3

トンネル効果は魔法ではないがそのありがたみは、古典的に考えると指数関数の中身が $\exp\left(-E_{\text{potential}}/E\right)$ と絶望的なのを、「たかが」平方根程度 $P_{\text{penetration}} \sim \exp\left(-\sqrt{E_G/E}\right)$ にしてくれることにある。

太陽中心部で陽子と陽子を反応させる際、1回の反応が起こるには何個の陽子が衝突すればよいか計算せよ。もしこれが古典的な確率なら $P_{\text{penetration}} \sim \exp(-1000)$ となり、銀河の中の陽子がすべて衝突したとしても起こらないこともたしかめよ。

ガモフエネルギー

ここまでは物理過程を少し簡略化して結果を導いた。現実的なポテンシャルの形

$V(r)$ に対しては少しだけ異なる結果が得られる： $P_{\text{penetration}} \sim \exp \left[- \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} \right]$

ガモフエネルギーを $E_G = 2m_p c^2 (\pi \alpha Z_A Z_B)^2$ と定義した。

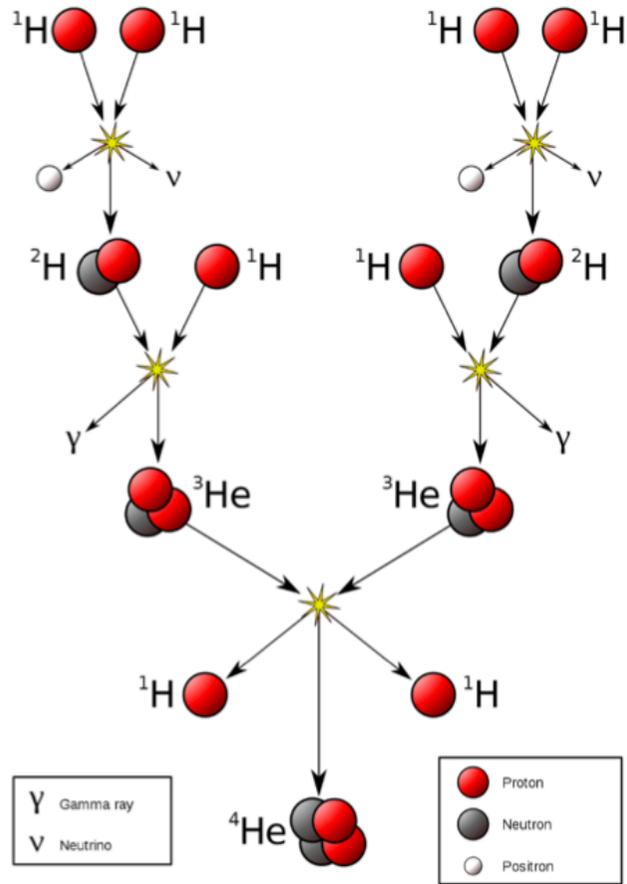
こうして反応率を計算できたのはよいが、実は実際の値そのものは異様に小さい。

量子トンネル効果は小さいものを大きくする魔法ではない。たとえば陽子と陽子を

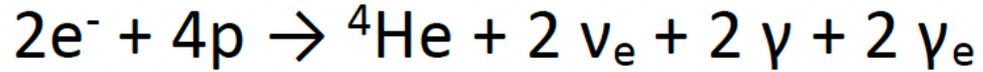
反応させるという最も簡単な反応でさえ $E_G = 493 \text{ keV}$ であり、一方で太陽中心部の

の温度は $10^7 \text{ K} \sim 1 \text{ keV}$ 程度である。この場合 $P_{\text{penetration}} = \exp(-22)!$

The proton-proton chain



正味の反応は，前後だけで考えると



質量欠損は 初期の総質量－最後の総質量

$$= 2 m(e^-) + 4 m(p) - m({}^4\text{He})$$

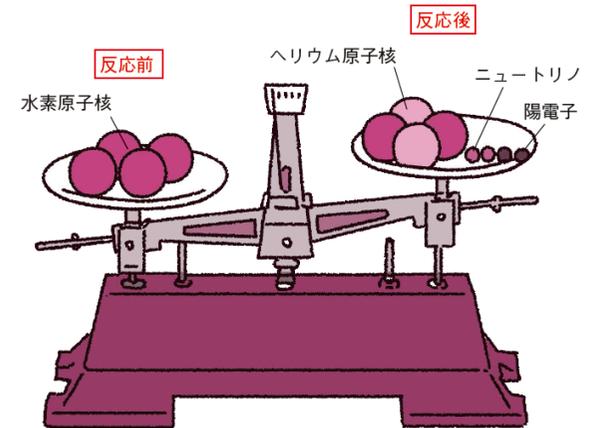
$$= 4.766 \times 10^{-29} \text{ kg}$$

これは初期総質量の 0.0066. 大体 0.7 パーセント.

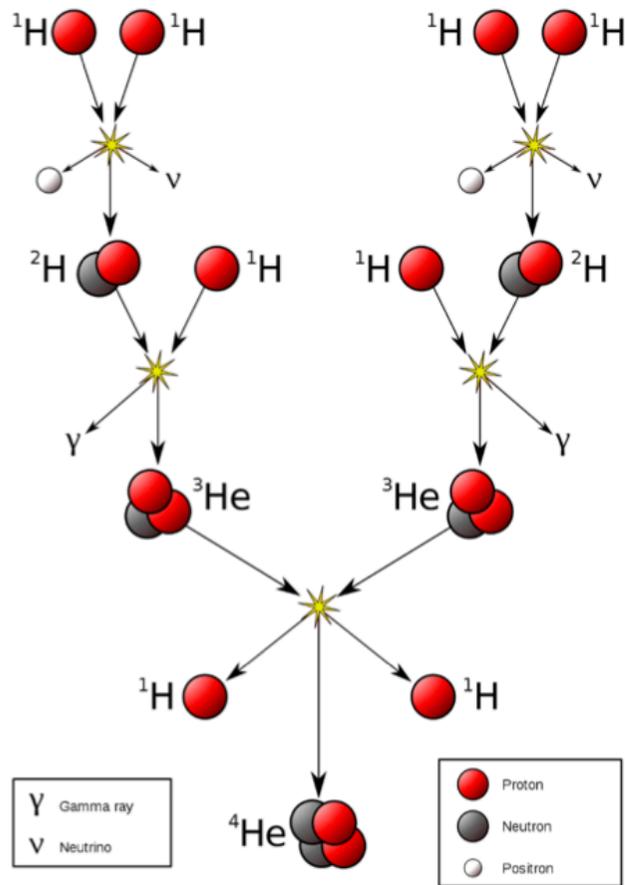
エネルギーに換算すると

$$\Delta m c^2 = 26.74 \text{ MeV}$$

$$(1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J})$$



The proton-proton chain

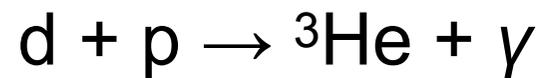


実際の反応「鎖」は、はじめに重水素核を生成

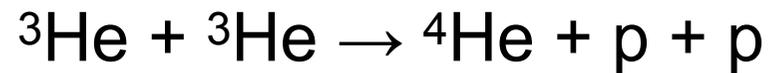


これは実はとても「遅い」反応

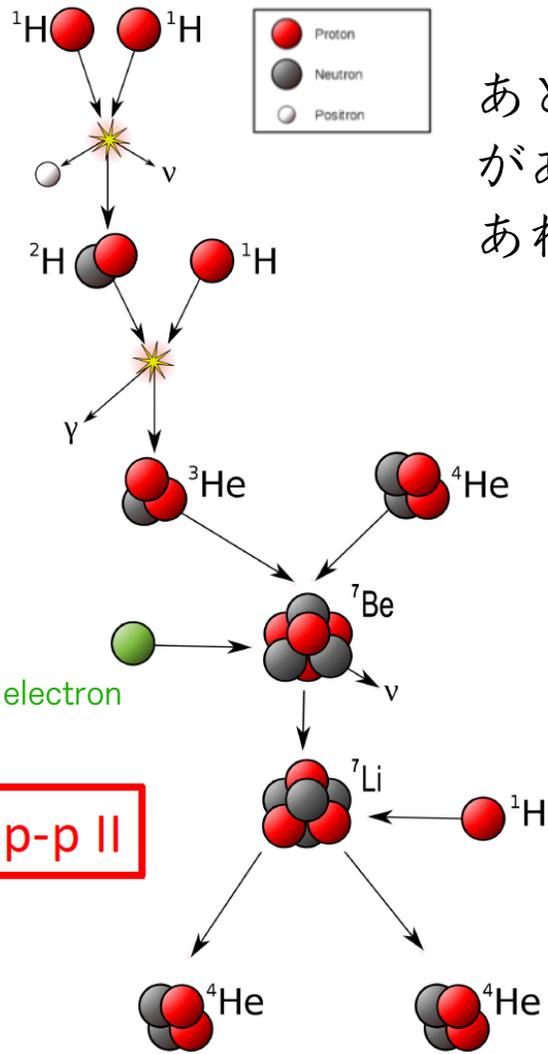
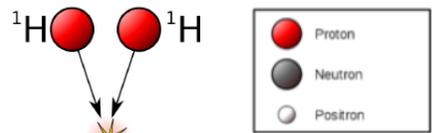
次の反応は同位体 ${}^3\text{He}$ の生成



最後にヘリウム原子核ができる:

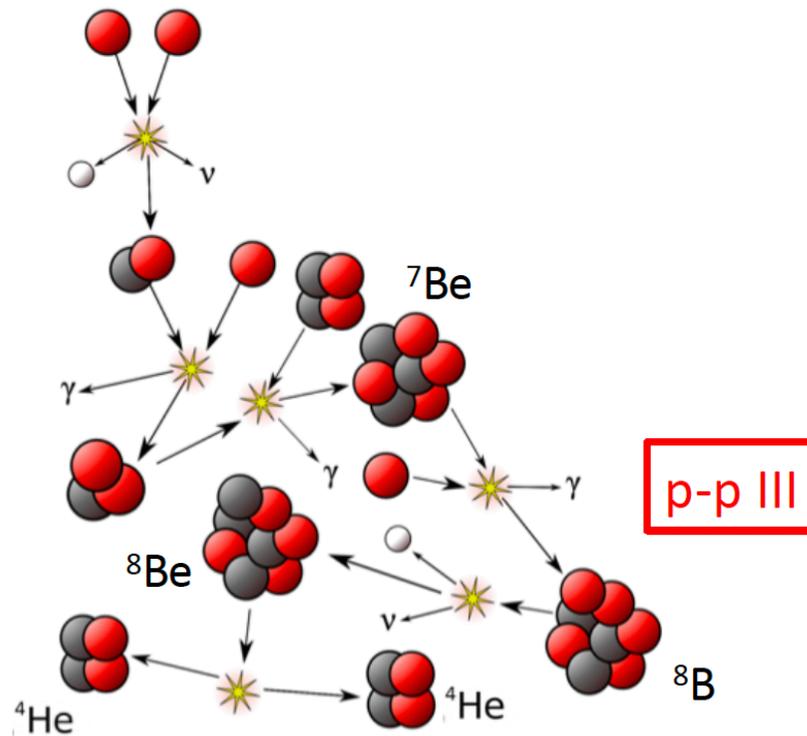


p-p chain



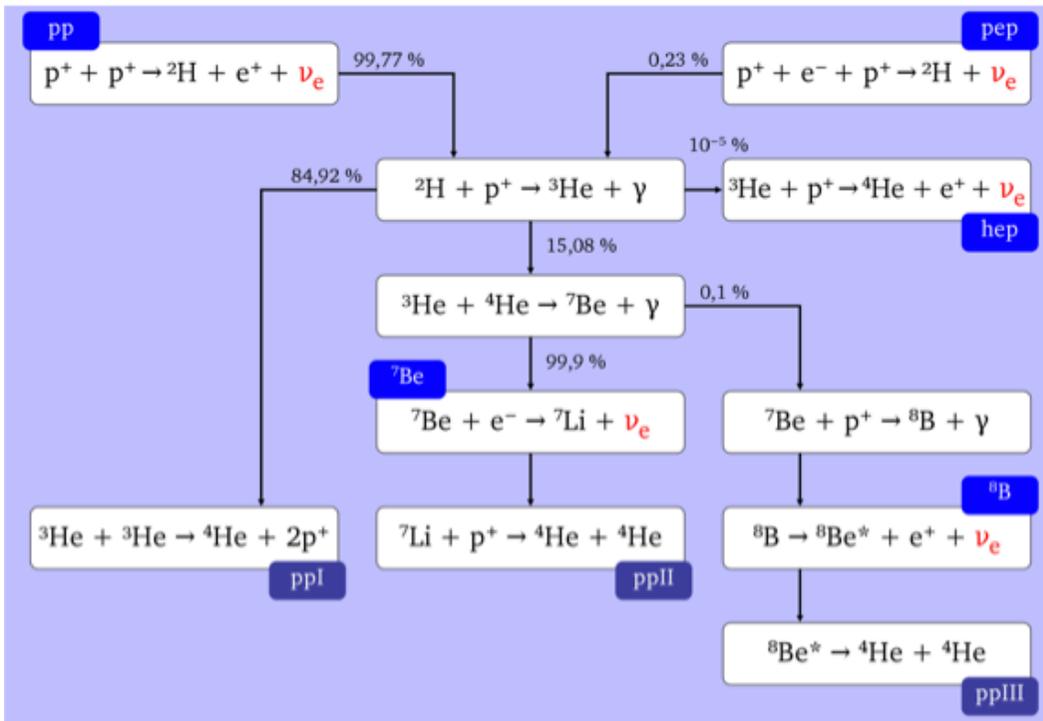
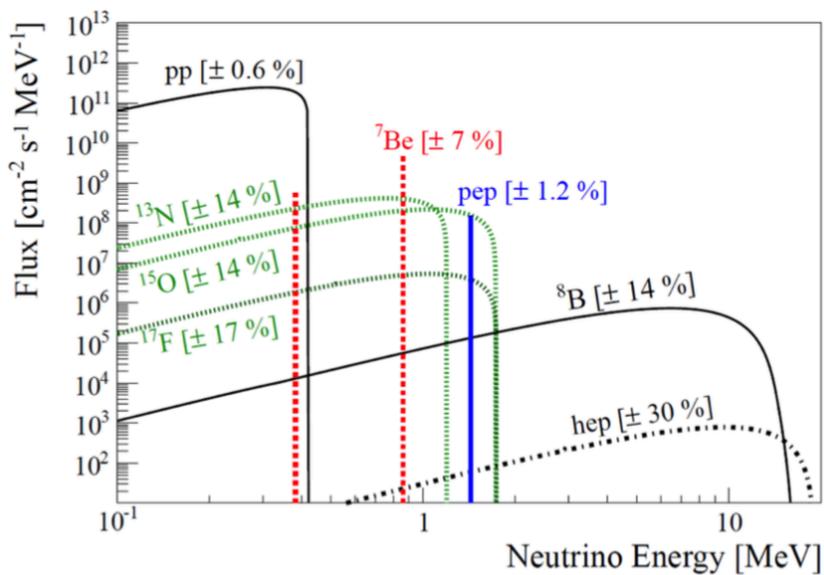
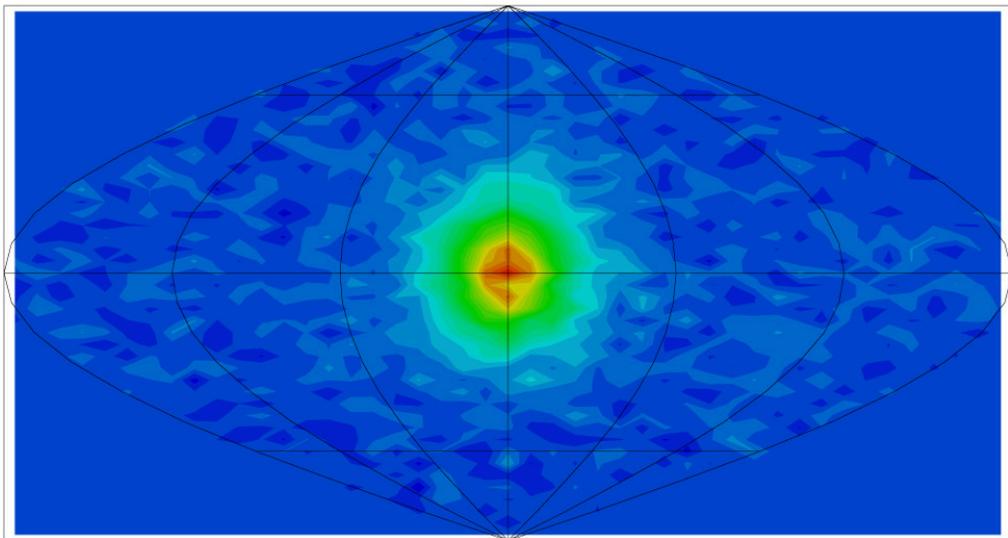
あと二つ，他の原子核を含む似たような反応があり，それらを p-p II, p-p III と呼ぶ．二つあわせて15パーセント程度．8割以上は p-p I

p-p II



p-p III

ニュートリノで「見る」太陽の姿



スーパーカミオカンデは到来するニュートリノの方向を測ることができ、左上の図を得ることができる。

太陽ニュートリノは中心部から「直接」地球に届く。光は太陽中心から表面に到達するのに10万年以上かかることを思い出そう。

トンネル効果とガモフエネルギー

現実的な Coulomb ポテンシャル ($1/r$) に対してもうすこしまともな計算をしよう。

$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{p_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi)$ と変数分離をすると、距離 r に対しては

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) - E \right] p_l(r) = 0 \quad \text{を得る。 (物理数学II)}$$

有効ポテンシャルを用いて $\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V_l(r)) \right] p_l(r) = 0$ と書き直す。

$$\text{ここで } V_l(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_A Z_B e^2}{r} \quad \text{for } r > r_1$$

$$\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_{\text{nuc}} \quad \text{for } r < r_1$$

WKB法のおさらい I

2階の微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} = -f(x)y$ をいくつかの近似のもとに解く。

まず、 $f(x)$ が正の定数ならその解は $\exp^{\pm i\sqrt{f}x}$ すなわちただの波。もし $f(x)$ が厳密には一定ではなくとも、変動が十分小さければ局所的には波 ($\sin x$ とか) のような解だろう。この状況で、解 (y) が大きく変動する空間スケールはだいたい $\Delta x \sim 1/\sqrt{f}$

関数 $f(x)$ の値自体の変化は $f' \Delta x$ 程度なので、もし次の条件 $f' \Delta x \sim \frac{f'}{\sqrt{f}} \ll f(x)$

ならば波的な近似解が得られるだろう。そこでもとの方程式に $y(x) = \exp^{i\phi(x)}$ を試し

に代入してみよう。 $i\phi'' - (\phi')^2 + f(x) = 0$ の解 $\phi(x)$ を求めればよい。 $\phi(x)$ 自体も

ゆっくりと変動する関数であろうから、2階微分 ϕ'' は十分小さいとして、

$\phi' \sim \pm \sqrt{f(x)}$ をとりあえずの近似解の振る舞いとして予想する。

WKB法のおさらい 2 $i\phi'' - (\phi')^2 + f(x) = 0$

$\phi' \sim \pm \sqrt{f(x)}$ から $\phi'' = \frac{1}{2} \frac{f'}{\sqrt{f(x)}}$ もともとの条件 (仮定) $\frac{f'}{\sqrt{f}} \ll f(x)$ と 2階微分

ϕ'' を十分ちいさいとしたことはさして矛盾していない。もう少し良い近似の解を得るには、 $\phi'(x) = \pm \sqrt{f(x)} + \eta(x)$ として、摂動的な $\eta(x)$ を求めればよいだろう。も

との方程式に代入すると $\pm \frac{i}{2} \frac{f'}{\sqrt{f}} + i\eta' \mp 2\eta\sqrt{f} - \eta^2 = 0$ を得る。摂動分 $\eta(x)$ はそ

もそも小さく、激しく変動することもないだろうから $i\eta' - \eta^2$ はとりあえずは無視し

ておこう。そうすると解は $\eta \sim \frac{i}{4} \frac{f'}{f} = \frac{i}{4} (\ln f)'$ とするのがよさそうだ。

ここでひとつ注意点は、 $\frac{f'}{f} \ll 1$ でないとこれまでの前提がくずれてしまうこと。

たとえば $f(x) \rightarrow 0$ となる x では破綻しそうだ。(転回点と接続条件)

WKB法のおさらい 3 $i\phi'' - (\phi')^2 + f(x) = 0$

宇宙であまり細かなことは心配せず、とりあえず $\phi'(x) = \pm \sqrt{f(x)} + \eta(x)$ を積分する

と $\phi(x) = \pm \int^x \sqrt{f(z)} dz + i \ln |f(x)|^{1/4}$ となる。これから大元の (近似) 解は

$y = e^{i\phi(x)} = A |f(x)|^{1/4} \exp \left[\pm i \int^x \sqrt{f(z)} dz \right]$ の2つなので、一般解は

$$y = C |f(x)|^{1/4} \exp \left[+i \int^x \sqrt{f(z)} dz \right] + D |f(x)|^{1/4} \exp \left[-i \int^x \sqrt{f(z)} dz \right]$$

で与えられ、境界条件により定数 C, D を決める。 $f(r = r_0) = 0$ での解の接続に注意!

はじめの目的のために大事なものは、有効ポテンシャルを用いて

$$f(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \frac{Z_A Z_B e^2}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] \text{であったことである。}$$

WKB法のおさらい4

$f(r)$ が負になるような部分では本当はいろいろ注意しながらやり直さなくてはならな

いが、 $\sqrt{f(r)} \rightarrow i\sqrt{|f(r)|}$ とすれば解 $y_- = E e^{i\pi/4} |f(r)|^{-1/4} \exp \left[\int_x^{x_0} \sqrt{|f(z)|} dz \right]$

となり、これは指数関数的に減少する。浸透確率を求めるにはこのあとさらにいろいろ展開したり基準点で絶対値の比 $P \sim |\psi(r_1)|^2 / |\psi(r_2)|^2$ をとったりするが、ここではエネルギー（障壁）が $\sqrt{E - V_{\text{eff}}}$ の形で出てくることが大事。

ガモフエネルギー

現実的なポテンシャルの形 $V(r)$ に対してはガモフエネルギーを

$E_G = 2m_p c^2 (\pi \alpha Z_A Z_B)^2$ と定義して、浸透確率は

$$P_{\text{penetration}} \sim \exp \left[- \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} \right] \quad \text{となる。}$$

こうして反応率を計算できたのはよいが、実は実際の値そのものは異様に小さい。

量子トンネル効果は小さいものを大きくする魔法ではない。たとえば陽子と陽子を

反応させるという最も簡単な反応でさえ $E_G = 493 \text{ keV}$ であり、一方で太陽中心部の

の温度は $10^7 \text{ K} \sim 1 \text{ keV}$ 程度である。この場合 $P_{\text{penetration}} = \exp(-22)!$

核融合反応率

量子力学的な効果のおかげで、反応率は小さいがゼロではない。最終的に断面積

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp \left[- \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} \right] \quad \text{がえられた。 } S(E) \text{ は個々の反応や核子の構造}$$

に依存する効果である。 $1/E$ をわざわざ陽に書いたのは、de Broglie 波長が

$$\lambda^2 = \frac{h^2}{2mE} \quad \text{と書かれるためである。つまり核子の速度(運動エネルギー)が大きいと反応断面積は小さくなるという効果がある。また、重い核子ほど反応しにくい。}$$

個々の核子は様々な速度を持つので、正味の反応率を求めるには

$$\langle \sigma v_r \rangle = \int_0^\infty \sigma(v_r) v_r P(v_r) dv_r \quad \text{を計算する必要がある。}$$

反応率

分子(核子)の速度よりも運動エネルギーを使う方がいろいろと便利なので

$$E = \frac{m_r v_r^2}{2} \Rightarrow \frac{dE}{dv_r} = \sqrt{2 m_r E} \quad \text{と変換して}$$

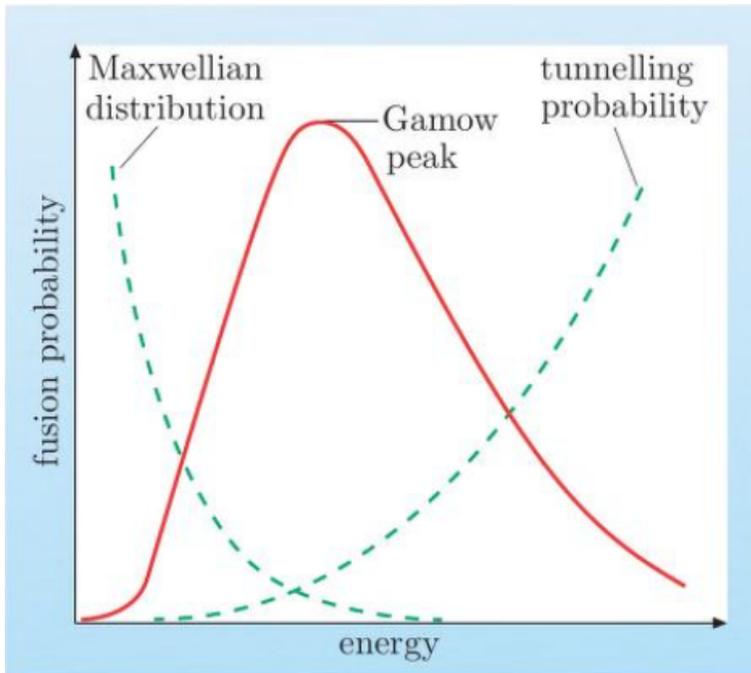
$$R_{AB} = n_A n_B \left(\frac{8}{\pi m_r} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} E \sigma(E) \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) dE$$

反応断面積 $\sigma(E)$ はそれぞれの反応に対してエネルギーの関数として与えられる。ただし、量子力学的計算から求めるにしろ、実験で計測するにしろ、ものによってはひどく大変で、いまだに反応率が正確にもとまっていないものも多い。

核子のエネルギー依存性

エネルギー依存性だけを取り出すと

$$\int_0^{\infty} S(E) \exp \left[- \left(\frac{E_G}{E} \right)^{1/2} \right] \exp \left(- \frac{E}{kT} \right) \quad \text{となり積分の中身は左下のよう}$$

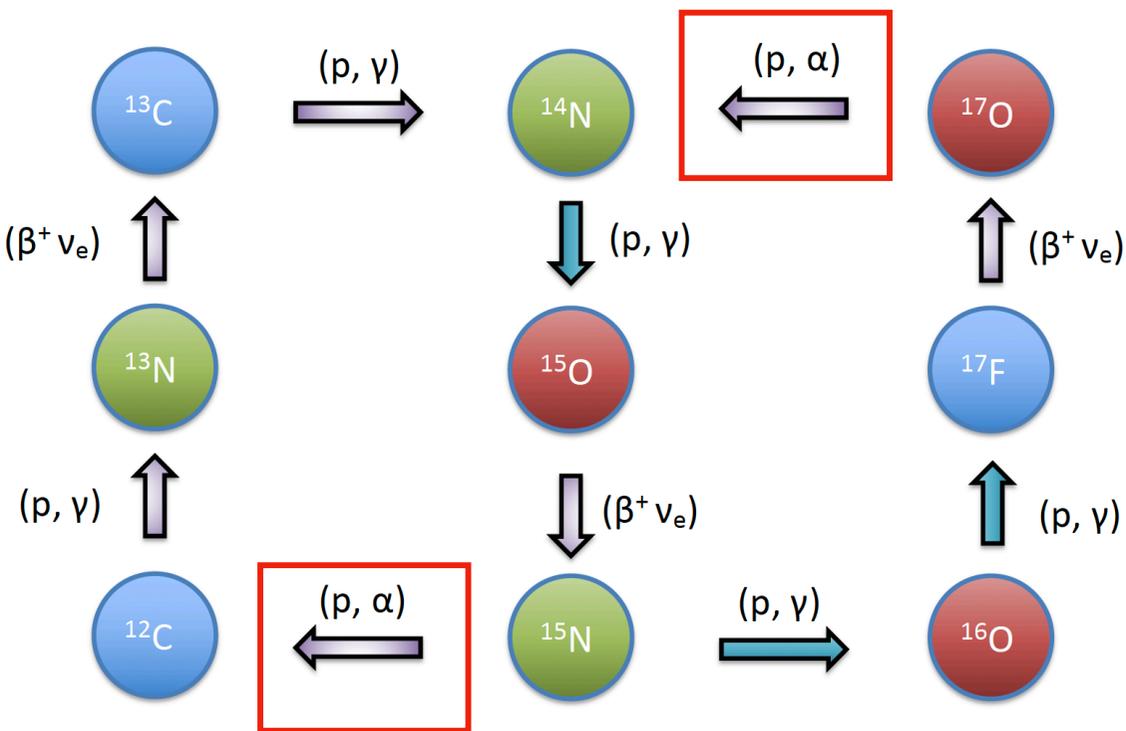


$$E_0 = \left(E_G \left(\frac{kT}{2} \right)^2 \right)^{1/3} \quad \text{付近のエネルギー}$$

を持つ核子が反応に寄与する。高エネルギーでは確率は高いが数が少ない。低エネルギーでは数は多いが確率は低い。

この←赤線がどれくらい幅広いかによって全体の反応率が決まる。

CNO サイクル

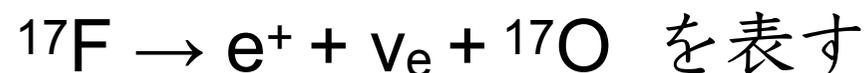


次のような記号で核反応を表記する



$^{12}\text{C} (p, \gamma) ^{13}\text{N}$ と簡略表記

$^{17}\text{F} (\beta^+ \nu_e) ^{17}\text{O}$ なら



比較的低温でも起こるCNサイクル（左）と、高温で起こるONサイクル（右）
 いずれも最後に (p, α) 、すなわち陽子を一つ取り込んでヘリウム原子核を一つ
 出す反応がある。トータルでは p を4つ使って He を一つ作り出している。

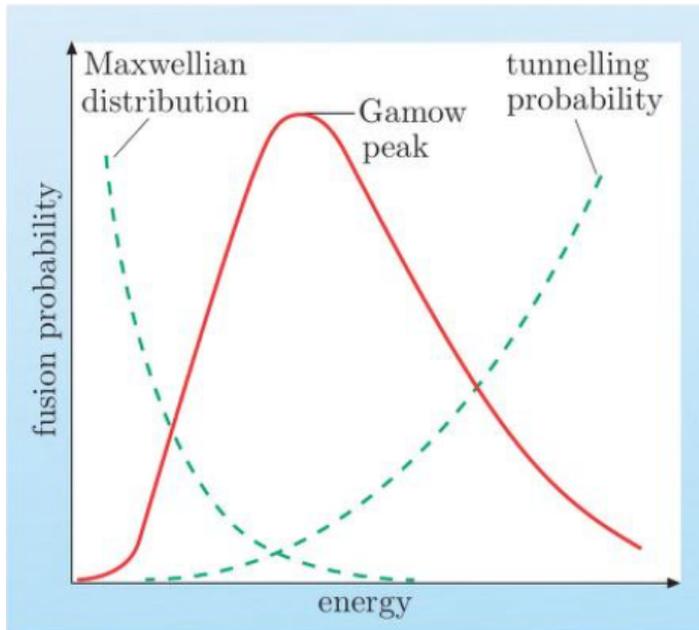
CNO サイクル

それぞれの核反応は異なる反応速度をもつため（桁違いに速い、遅い）

全体としてはもっとも遅いものがボトルネックとなり、反応速度を決める。

反応			平均寿命
$^{12}\text{C} + ^1\text{H} \longrightarrow$	$^{13}\text{N} + \gamma$	+1.95 MeV	1.3×10^7 年
$^{13}\text{N} \longrightarrow$	$^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	+1.37 MeV	7 分
$^{13}\text{C} + ^1\text{H} \longrightarrow$	$^{14}\text{N} + \gamma$	+7.54 MeV	2.7×10^6 年
$^{14}\text{N} + ^1\text{H} \longrightarrow$	$^{15}\text{O} + \gamma$	+7.35 MeV	3.2×10^8 年
$^{15}\text{O} \longrightarrow$	$^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	+1.86 MeV	82 秒
$^{15}\text{N} + ^1\text{H} \longrightarrow$	$^{12}\text{C} + ^4\text{He}$	+4.96 MeV	1.12×10^5 年

反応率の温度依存性



$$R_{AB} = n_A n_B \left(\frac{8}{\pi m_r} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} E \sigma(E) \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) dE$$

反応率の近似的な値をもとめるため、実効的な
”Gamow zone” を E_0 周りのガウシアンで近似し、積分を実行すると

$$R_{AB} = \frac{6.48 \times 10^{-24}}{A_r Z_A Z_B} \times \frac{n_A n_B}{\text{m}^{-6}} \times \frac{S(E_0)}{\text{keV barns}} \times \left(\frac{E_G}{4k_B T} \right)^{2/3} \times \exp \left[-3 \left(\frac{E_G}{4k_B T} \right)^{1/3} \right] \text{m}^{-3} \text{s}^{-1}$$

ここで 1 barn = 10^{-28} m^2

ちなみに $\sigma_{\text{Thomson}} = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$

反応率の温度依存性

反応率は温度に対して $R_{AB} \propto T^\nu$ ($d \log R_{AB} = \nu d \log T$) と変化すると仮定して

みよう。ある温度の周りに限ればこれはよい近似だろう。核融合反応では

$$R_{AB} \propto T \left[\left(\frac{E_G}{4kT} \right)^{1/3} - \frac{2}{3} \right] \text{ なので } \nu = \left(\frac{E_G}{4kT} \right)^{1/3} - \frac{2}{3} = \left(\frac{2m_{\text{r}}c^2(\pi\alpha Z_A Z_B)^2}{4kT} \right)^{1/3} - \frac{2}{3}$$

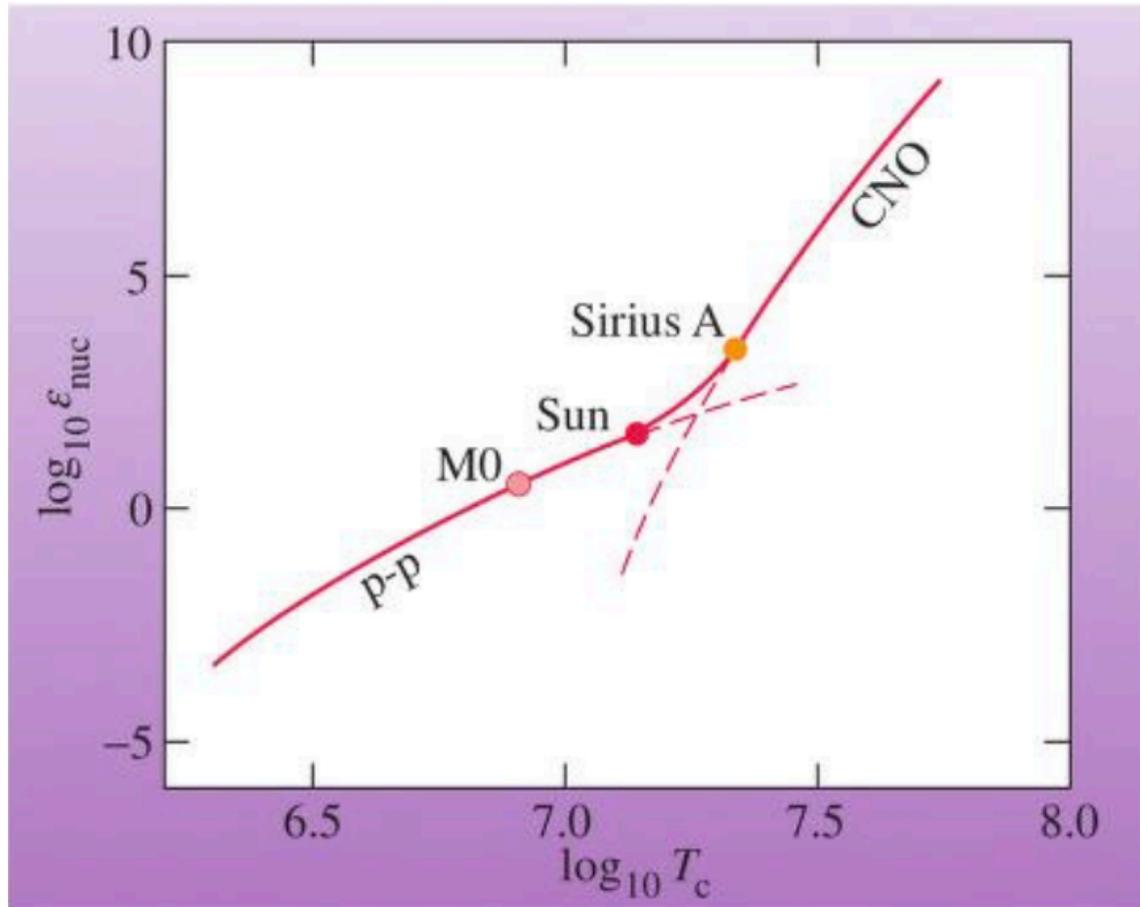
2/3は小さな定数なので、ガモフエネルギーがどれくらい大きいかで指数は決まる！

proton-proton 反応の場合、 $m_p c^2 \sim 1 \text{ GeV}$, $T \sim 10^7 \text{ K}$ を代入すると

$\nu = 3.8$ を得る。CNOサイクルでは主たる寄与は $p + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma$ なので

$R_{p^{14}\text{N}} \propto T^{20}$ で $\nu = 20$ (!) このとてつもない温度依存性が星の安定性を保つ。

反応率の温度依存性



太陽の中心部では p-p chain によるエネルギー生成が主だが、CNOサイクルの強い温度依存性により、ほんのすこし重い星では二つのプロセスの寄与はほぼ同じ。また2太陽質量を超えると CNOサイクルが主となる。