1　数値相対論

本節では数値相対論の詳細なスキームと必要な理論を説明する。基本的には Gourgoulhon の内容に従うが、記法はこの文章全体に合うように直したりしている。ここでの目標は BSSN スキームを理解することである。BSSN スキームとは発展方程式

$$\partial_\perp \phi = \frac{1}{6}(\bar{D}_i \beta^i - \alpha K) \tag{1}$$

$$\partial_\perp \bar{\gamma}_{ij} = -2\alpha \bar{A}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{D}_k \beta^k \bar{\gamma}_{ij} \tag{2}$$

$$\partial_\perp K = -\mathrm{e}^{-4\phi}\left(\bar{D}_i \bar{D}^i \alpha + 2\bar{D}_i \phi \bar{D}^i \alpha\right) + \alpha\left[4\pi(E+S) + \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \frac{K^2}{3}\right] \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\partial_\perp \bar{A}_{ij} = &-\frac{2}{3}\bar{A}_{ij}\bar{D}_k\beta^k - 2\alpha\bar{A}_{ik}\bar{A}^k_j + \alpha\bar{A}_{ij}K \\ &+\mathrm{e}^{-4\phi}\left[-2\alpha\bar{D}_i\bar{D}_j\phi + 4\alpha\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi + 4\bar{D}_{(i}\alpha\bar{D}_{j)}\phi - \bar{D}_i\bar{D}_j\alpha + \alpha(\bar{R}_{ij} - 8\pi S_{ij})\right]^{\mathrm{TF}}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\partial_\perp \bar{\Lambda}^i = &\bar{\gamma}^{jk}\hat{D}_j\hat{D}_k\beta^i + \frac{2}{3}\Delta\Gamma^i\bar{D}_j\beta^j + \frac{1}{3}\bar{\gamma}^{ik}\bar{D}_k\bar{D}_j\beta^j \\ &-2\bar{A}^{jk}({\delta^i}_j\partial_k\alpha - 6\alpha{\delta^i}_j\partial_k\phi - \alpha\Delta{\Gamma^i}_{jk}) - \frac{4}{3}\alpha\bar{\gamma}^{ij}\partial_j K - 16\pi\alpha\bar{\gamma}^{ij}S_j\end{aligned} \tag{5}$$

を constraint equations

$$\frac{2}{3}K^2 - \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{R} - 8\bar{D}^i\phi\bar{D}_i\phi - 8\bar{D}^2\phi) - 16\pi E = 0 \tag{6}$$

$$\bar{D}^j A_{ij} + 6\bar{A}_{ij}\bar{D}^j\phi - \frac{2}{3}\bar{D}_i K - 8\pi S_i = 0 \tag{7}$$

$$\det(\bar{\gamma}_{ij}) = \hat{\gamma} \tag{8}$$

$$\bar{\gamma}^{ij}\bar{A}_{ij} = 0 \tag{9}$$

$$\bar{\Lambda}^i + \hat{D}_j\bar{\gamma}^{ij} = 0 \tag{10}$$

と Ricci テンソル

$$\bar{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{k(i}\hat{D}_{j)}\bar{\Lambda}^k + \Delta\Gamma^k\Delta\Gamma_{(ij)k} + \bar{\gamma}^{kl}(2\Delta{\Gamma^m}_{k(i}\Delta\Gamma_{j)ml} + \Delta{\Gamma^m}_{ik}\Delta\Gamma_{mjl}) \tag{11}$$

の下で解く手法である。ただし、$\partial_\perp$、$\bar{\gamma}_{ij}$、ϕ、$\bar{D}_i$、$\hat{\gamma}$、$\hat{D}_i$、K、$\bar{A}_{ij}$、$\bar{R}_{ij}$、$\bar{\Gamma}^i$、E はそれぞれ $\partial_t - \mathcal{L}_\beta$、共形空間計量、共形因子、$\bar{\gamma}_{ij}$ に関する共変微分、背景計量 (の行列式)、背景計量に関する共変微分、外的曲率のトレース、外的曲率テンソルのトレースレス部分、共形 Ricci テンソル、ガンマベクトル、そして全エネルギー密度 $T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu$ である。定義は以下でおいおい述べる。また、$\mathcal{L}_\beta$ は β に沿った Lie 微分であり、上付き添字 TF とは $\bar{\gamma}_{ij}$ による trace が 0 である成分のことを指す。

以下では、まず Einstein 方程式の $3+1$ 分解を定式化する。これは超曲面上の曲率を表す各量の時間発展の方程式を求めるものである。次にその Einstein 方程式を共形分解という方法で書き直す。この方が初期値の設定をする上で便利だからである。最後に超曲面の取り方について議論する。

1.1 超曲面と foliation

相対論の $3+1$ 分解では、時空多様体 $\mathcal{M}$ を foliation と呼ばれる方法で分割する。即ち、時空 $\mathcal{M}$ には滑らかかつ勾配が決して 0 にならないスカラー場 t があって、これが一定である点の集合として定義される超曲面 Σ_t の集合で $\mathcal{M}$ が被覆されると仮定し、

$$\mathcal{M} = \cup_{t\in\mathbb{R}}\Sigma_t \tag{12}$$

と捉える。そして、各 Σ_t 上での空間曲率の時間発展を追う。時間座標と超曲面の選び方はゲージの自由度であり、どうするのが良いかは後述する。いま、スカラー場 t を「時間座標」とし、各超曲面 Σ_t には「空間座標」x^i を張る。このとき、計量がどう表わされるかを考える。

まず、Σ_t 上の点 $A(t,x^i)$ を考える。この点で、Σ_t に垂直な時間的単位ベクトル n^μ を考え、これが超曲面 $\Sigma_{t+\Delta t}$ と交わる点を $B(t+\Delta t, x'^i)$ とする。このとき、AB を結ぶベクトルの長さ (超曲面同士の間の距離) を $\Delta t\alpha$ とすると、ベクトル自体は $\Delta t\alpha n^\mu$ となる。一方で、$\Sigma_{t+\Delta t}$ 上の点 $C(t+\Delta t, x^i)$ を考えると、AC を結ぶベクトルは $\Delta t(\partial/\partial t)$ であり、BC を結ぶベクトルは $(x^i - x'^i)(\partial/\partial x^i) = \Delta t\beta^i(\partial/\partial x^i)$ と表す。すると、

$$\Delta t\frac{\partial}{\partial t} = \Delta t\alpha n + \Delta t\beta^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{13}$$

と表せる。計量の tt 成分は $\partial/\partial t$ 同士の内積で得られるので、

$$g_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \alpha^2 n\cdot n + 2\alpha\beta^i n\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta^i\beta^j\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{14}$$

であるが、定義より $n\cdot n = -1$、$n\cdot(\partial/\partial x^i) = 0$ であり、また $(\partial/\partial x^i)\cdot(\partial/\partial x^j)$ は超曲面 Σ_t の空間計量の成分 γ_{ij} を与えるので、

$$g_{tt} = -\alpha^2 + \beta^i\beta^j\gamma_{ij} \tag{15}$$

となる。同様にして、tx^i 成分は

$$g_{ti} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} = \alpha n\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta^j\frac{\partial}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} = \beta^j\gamma_{ji} \tag{16}$$

であり、x^ix^j 成分は

$$g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j} = \gamma_{ij} \tag{17}$$

である。まとめると、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^i\beta^j\gamma_{ij} & \gamma_{ij}\beta^j \\ \gamma_{ji}\beta^i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \tag{18}$$

であり、線素で書くと

$$\mathrm{d}s^2 = -\alpha^2\mathrm{d}t^2 + \gamma_{ij}(\mathrm{d}x^i + \beta^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + \beta^j\mathrm{d}t) \tag{19}$$

である。また、逆行列は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^j}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^j\beta^i}{\alpha^2} \end{pmatrix} \tag{20}$$

である。ただし、γ^{ij} は γ_{ij} の逆行列である。

次に単位法ベクトル n^μ の成分を求めていく。法ベクトルなので、Σ_t 内の任意のベクトル v^μ に対して $n_\mu v^\mu = 0$ であるから、n_μ は第 0 成分のみを持つ。そこで $n_\mu = (a,0,0,0)$ と置くと、逆行列から $n^\mu = (-a/\alpha^2, a\beta^i/\alpha^2)$ である。さらに時間的単位ベクトルであることから $n^\mu n_\mu = -1$ より $-a^2/\alpha^2 = -1$、よって $a = \pm\alpha$。n^μ の第 0 成分が t の増大する方向を向いているとしたいので、$a = -\alpha$ ととれば、

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha}\right) \tag{21}$$

$$n_\mu = (-\alpha, 0) \tag{22}$$

となる。

さらに、四次元時空上のベクトルやテンソルを三次元超曲面に接するものに射影するテンソルとして ${\gamma^\mu}_\nu = {\delta^\mu}_\nu + n^\mu n_\nu$ を考える。実際、これが射影テンソルであることは

$$
\begin{aligned}
{\gamma^\mu}_\nu {\gamma^\nu}_\rho &= ({\delta^\mu}_\nu + n^\mu n_\nu)({\delta^\nu}_\rho + n^\nu n_\rho) && (23)\\
&= {\delta^\mu}_\rho + n^\mu n_\rho + n^\mu n_\rho + n^\mu n_\nu n^\nu n_\rho && (24)\\
&= {\delta^\mu}_\rho + n^\mu n_\rho = {\gamma^\mu}_\rho && (25)
\end{aligned}
$$

と示され、さらに超曲面に接することは

$$
\begin{aligned}
{\gamma^\mu}_\nu n^\nu &= {\delta^\mu}_\nu n^\nu + n^\mu n_\nu n^\nu && (26)\\
&= n^\mu - n^\mu = 0 && (27)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
{\gamma^\mu}_\nu n_\mu &= {\delta^\mu}_\nu n_\mu + n^\mu n_\nu n_\mu && (28)\\
&= n_\nu - n_\nu = 0 && (29)
\end{aligned}
$$

であるから、何らかのテンソルをこれで射影したあと法ベクトル n との内積をとると 0 になることから示される。

また、三次元超曲面上で定義されたテンソルを四次元時空上のものに拡張することがある。これもこの射影テンソルによって定義できる。即ち、添字をまとめて $\mu = \mu_1 \cdots \mu_p$、$\nu = \nu_1 \cdots \nu_q$、$i = i_1 \cdots i_p$、$j = j_1 \cdots j_q$ として表すと、三次元超曲面上のテンソル ${T^i}_j$ を四次元時空上のテンソルに拡張したものは ${T^\mu}_\nu = {T^i}_j {\gamma^\mu}_i {\gamma^j}_\nu$ である。ここで、${\gamma^\mu}_i = {\gamma^{\mu_1}}_{i_1} \cdots {\gamma^{\mu_p}}_{i_p}$ の略記であり、${\gamma^j}_\nu$ も同様である。この拡張は、三次元テンソル T のベクトルの引数に関しては四次元時空のベクトルを三次元超曲面に射影したものにとり、余ベクトルの引数に関しては射影したベクトルを引数に取るような余ベクトルにとるということである。特に、三次元計量 γ_{ij} をこのようにして拡張したものは $\gamma_{\mu\nu}$ と書くことにし、

$$
\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{30}
$$

となる。[*1]

三次元超曲面 Σ_t 上の曲率等は四次元中の一般相対論における曲率と同様 (ただし計量の符号には注意すること) に γ_{ij} から定義される。これは特に内的曲率 (intrinsic curvature) と呼ばれる。その一方で、四次元時空に埋め込まれていることから別種の曲率を考えることもできる。この曲率は外的曲率 (extrinsic curvature) $\tilde{K}$ と呼ばれるものであり、二階の共変テンソルである。定義としては、超曲面に接するベクトルの組 (u, v) に対して

$$
\tilde{K}(u, v) = -u \cdot \nabla_v n \tag{31}
$$

であり、法ベクトルの変化の仕方を記述するものである。即ち、法ベクトルを四次元時空の計量のもとで平行移動し、移動した先の Σ_t 上の法ベクトルとのずれを表すものである。勿論、∇ は時空多様体上の共変微分である。また、これは二つのスロットに対して対称である。なんとなれば、

$$
\begin{aligned}
u \cdot \nabla_v n &= u^\mu v^\nu \nabla_\nu n_\mu && (32)\\
&= v^\nu \nabla_\nu (u^\mu n_\mu) - n_\mu v^\nu \nabla_\nu u^\mu && (33)\\
&= -n_\mu u^\nu \nabla_\nu v^\mu + n_\mu u^\nu \nabla_\nu v^\mu - n_\mu v^\nu \nabla_\nu u^\mu && (34)
\end{aligned}
$$

である。ただし、超曲面上のベクトルに関しては $\mu = 0$ の成分が 0 であるような時空上のベクトルと見直し (超曲面を時空に埋め込む写像に誘導される写像)、また二行目から三行目で $u^\mu \perp n^\mu$ であることを用い、さら

[*1] 実際、四次元時空で定義された二つのベクトル u、v に対して、埋め込み写像 $\iota : \Sigma \to \mathcal{M}$ の誘導写像 $\iota_* : T_p(\Sigma) \to T_p(\mathcal{M})$ で $\gamma u = \iota_* \bar{u}$ などとなるような三次元ベクトル $\bar{u}$、$\bar{v}$ を考える。ここでは三次元計量は $\bar{\gamma}$ で表すが、g の誘導計量 $\iota^* g$ と一致する。ただし $\iota^* : T_p^*(\mathcal{M}) \to T_p^*(\Sigma)$。このとき、$\gamma(u, v) = g(\gamma u, \gamma v) = g(\iota_* \bar{u}, \iota_* \bar{v}) = \iota^* g(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{\gamma}(\bar{u}, \bar{v})$ であるので、$\gamma(u, v) = \bar{\gamma}(\bar{u}, \bar{v})$ となる。この意味で、γ は誘導された計量である。

に足すと 0 になる項を挿入した。ここで $n_\mu = -\alpha\nabla_\mu t$ であることから

$$n_\mu u^\nu \nabla_\nu v^\mu - n_\mu v^\nu \nabla_\nu u^\mu \propto \nabla_\mu t u^\nu \nabla_\nu v^\mu - \nabla_\mu t v^\nu \nabla_\nu u^\mu \tag{35}$$

$$= u^\nu(\nabla_\nu(\nabla_\mu t v^\mu) - v^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu t) - v^\nu(\nabla_\nu(\nabla_\mu t u^\mu) - u^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu t) \tag{36}$$

$$= u^\nu v^\mu (\nabla_\nu \nabla_\mu t - \nabla_\mu \nabla_\nu t) \tag{37}$$

$$= 0 \tag{38}$$

を得る。ただし $\nabla_\mu t \perp u(v)^\mu$ であること、及び接続係数 $\Gamma^i{}_{jk}$ が下付き添字について対称となることを用いた。これを利用すると

$$u \cdot \nabla_v n = -n_\mu u^\nu \nabla_\nu v^\mu \tag{39}$$

$$= -u^\nu \nabla_\nu (n_\mu v^\mu) + u^\nu v^\mu \nabla_\nu n_\mu \tag{40}$$

$$= u^\nu v^\mu \nabla_\nu n_\mu \tag{41}$$

と対称性を示せる。ここでは再び $v^\mu \perp n^\mu$ を用いた。

上記の $\tilde{K}$ は三次元超曲面に接するベクトルを引数に取るので、これを四次元時空上のベクトルを引数にとるようなテンソル K に拡張する。その方法は上で定義した通りであり、超曲面のベクトル u の代わりに四次元時空上のベクトルを超曲面に射影した $\gamma^\mu{}_\nu u^\nu = (u + (n \cdot u)n)^\mu$ を用いればよい。これは確かに $\mu = 0$ の成分が 0 であるようなベクトルであり、$\tilde{K}$ の引数に取って差し支えない。これにより、

$$K(u,v) = \tilde{K}(u + (n\cdot u)n, v + (n \cdot v)n) \tag{42}$$

$$= -(u^\mu + n_\nu u^\nu n^\mu)(v^\sigma + n_\rho v^\rho n^\sigma)\nabla_\sigma n_\mu \tag{43}$$

$$= -u^\mu v^\sigma \nabla_\sigma n_\mu - n_\nu u^\nu n^\mu v^\sigma \nabla_\sigma n_\mu - u^\mu n_\rho v^\rho n^\sigma \nabla_\sigma n_\mu - n_\nu u^\nu n^\mu n_\rho v^\rho n^\sigma \nabla_\sigma n_\mu \tag{44}$$

を得る。ここで、∇_μ を挟んで添字の上げ下げは自由に行えるので $n^\mu \nabla_\nu n_\mu = \nabla_\nu(n^\mu n_\mu) - n_\mu \nabla_\nu n^\mu = -n^\mu \nabla_\nu n_\mu = 0$ である。よって、

$$K(u,v) = -u^\mu v^\sigma \nabla_\sigma n_\mu - u^\mu v^\rho n_\rho n^\sigma \nabla_\sigma n_\mu \tag{45}$$

となる。ここから、$K_{\mu\nu} = -\nabla_\nu n_\mu - n_\nu n^\sigma \nabla_\sigma n_\mu$ を得る。即ち、

$$\nabla_\mu n_\nu = -K_{\nu\mu} - n_\mu n^\sigma \nabla_\sigma n_\nu \tag{46}$$

である。これを超曲面に射影すれば、

$$\gamma^\mu{}_\sigma \gamma^\nu{}_\rho K_{\mu\nu} = -\gamma^\mu{}_\sigma \gamma^\nu{}_\rho \nabla_\nu n_\mu \tag{47}$$

であるが、構成から

$$K_{\mu\nu} = \gamma^i{}_\mu \gamma^j{}_\nu \tilde{K}_{ij} \tag{48}$$

なので、

$$\gamma^\mu{}_\sigma \gamma^\nu{}_\rho K_{\mu\nu} = \gamma^\mu{}_\sigma \gamma^\nu{}_\rho \gamma^i{}_\mu \gamma^j{}_\nu \tilde{K}_{ij} = \gamma^i{}_\sigma \gamma^j{}_\rho \tilde{K}_{ij} = K_{\sigma\rho} \tag{49}$$

である。即ち、

$$K_{\mu\nu} = -\gamma^\sigma{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu \nabla_\rho n_\sigma \tag{50}$$

となる。

また、上で述べた通り $n_\mu = -\alpha \nabla_\mu t$ であり、これを利用すると

$$n^\sigma \nabla_\sigma n_\mu = n^\sigma \nabla_\sigma(-\alpha \nabla_\mu t) \tag{51}$$

$$= -n^\sigma \nabla_\sigma \alpha \nabla_\mu t - \alpha n^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\mu t = -n^\sigma \nabla_\sigma \alpha \nabla_\mu t - \alpha n^\sigma \nabla_\mu \nabla_\sigma t \tag{52}$$

$$= \frac{1}{\alpha} n^\sigma \nabla_\sigma \alpha n_\mu - \alpha n^\sigma \nabla_\mu \left(-\frac{1}{\alpha} n_\sigma\right) \tag{53}$$

$$= \frac{1}{\alpha} n^\sigma \nabla_\sigma \alpha n_\mu + n^\sigma \nabla_\mu n_\sigma - \frac{1}{\alpha} n^\sigma \nabla_\mu \alpha n_\sigma \tag{54}$$

$$= \alpha^{-1}(\nabla_\mu \alpha + n_\mu n^\sigma \nabla_\sigma \alpha) \tag{55}$$

$$= \alpha^{-1}(\delta^\sigma{}_\mu + n^\sigma n_\mu)\nabla_\sigma \alpha \tag{56}$$

$$= \alpha^{-1} \gamma^\sigma{}_\mu \nabla_\sigma \alpha \tag{57}$$

となる。ここで、二行目で ∇ が torsion-free であること、また最後に射影テンソルの定義を用いた。

いま、$\gamma^\sigma{}_\mu \nabla_\sigma$ は空間計量 $\gamma_{\mu\nu}$ で定義する共変微分 D_μ に等しい。即ち、四次元時空で定義された任意のテンソル T で n に垂直なものに対して

$$D_\mu T^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}{}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_q} = \gamma^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \cdots \gamma^{\alpha_p}{}_{\mu_p} \gamma^{\nu_1}{}_{\beta_1} \cdots \gamma^{\nu_q}{}_{\beta_q} \gamma^\sigma{}_\rho \nabla_\sigma T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \tag{58}$$

が成り立つ。ただし、D_μ は四次元時空で定義されたテンソルのうち n に垂直なものと縮約を取るものとする。ここで D_μ は次の性質を満たす微分作用素であり、一意に決まるものである：

1. 線形性
2. Leibnitz 則
3. 縮約との交換
4. スカラー場への作用はただの微分
5. 捩率 0
6. $\gamma_{\mu\nu}$ に作用すると 0 になる

そこで、右辺がこれらの条件を満たすことを示せばよい。

線形性は ∇_μ の線形性から明らか。

Leibnitz 則に関しては、

$$\begin{aligned} D_\epsilon (T^\alpha{}_\beta S^\gamma{}_\epsilon) &= \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\lambda{}_\delta \gamma^\sigma{}_\epsilon \nabla_\sigma (T^\mu{}_\nu S^\rho{}_\lambda) && (59) \\ &= \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta \gamma^\sigma{}_\epsilon (\nabla_\sigma T^\mu{}_\nu) \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\lambda{}_\delta S^\rho{}_\lambda \\ &\quad + \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\nu{}_\beta T^\mu{}_\nu \gamma^\gamma{}_\rho \gamma^\lambda{}_\delta \gamma^\sigma{}_\epsilon \nabla_\sigma S^\rho{}_\lambda && (60) \\ &= (D_\epsilon T^\alpha{}_\beta) S^\gamma{}_\delta + T^\alpha{}_\beta (D_\epsilon S^\gamma{}_\delta) && (61) \end{aligned}$$

と ∇_μ の Leibnitz 性から示される。

縮約との交換に関しては、$D_\sigma T^\mu{}_\mu = D_\sigma (T^\mu{}_\mu)$ を示す。さらに高階の場合の拡張は明らか。

$$\begin{aligned} D_\sigma T^\mu{}_\mu &= \gamma^\mu{}_\alpha \gamma^\beta{}_\beta \gamma^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma T^\alpha{}_\beta && (62) \\ &= \gamma^\beta{}_\alpha \gamma^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma T^\alpha{}_\beta && (63) \\ &= \gamma^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma (\gamma^\beta{}_\alpha T^\alpha{}_\beta) - \gamma^\gamma{}_\sigma T^\alpha{}_\beta (n^\beta \nabla_\gamma n_\alpha + n_\alpha \nabla_\gamma n^\beta) && (64) \\ &= \gamma^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma (T^\mu{}_\mu) = D_\sigma (T^\mu{}_\mu) && (65) \end{aligned}$$

となる。ただし、二行目から三行目にかけて $\nabla_\gamma \gamma^\beta{}_\alpha = n^\beta \nabla_\gamma n_\alpha + n_\alpha \nabla_\gamma n^\beta$ を用いた

スカラー場への作用がただの微分となることは、u^μ を四次元時空の n に垂直なベクトル、f を四次元時空のスカラー場として

$$u^\mu D_\mu f = u^\mu \gamma^\nu{}_\mu \nabla_\nu f = u^\nu \partial_\nu f \tag{66}$$

と示される。ただし、∇_ν がそのような性質を持っていることを用いた。

捩率が 0 であることは、以下のように示す。即ち、時空上の関数 f に対し、二度続けて微分作用素を作用させると

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu f &= \gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu \nabla_\lambda (\gamma^\sigma{}_\rho \nabla_\sigma f) && (67) \\ &= \gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu (\nabla_\lambda \gamma^\sigma{}_\rho \nabla_\sigma f + \gamma^\sigma{}_\rho \nabla_\lambda \nabla_\sigma f) && (68) \\ &= \gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu (n^\sigma \nabla_\lambda n_\rho + n_\rho \nabla_\lambda n^\sigma) \nabla_\sigma f + \gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu \nabla_\lambda \nabla_\sigma f && (69) \\ &= \gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu \nabla_\lambda n_\rho n^\sigma \nabla_\sigma f + \gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu \nabla_\lambda \nabla_\sigma f && (70) \end{aligned}$$

となる。ただし、途中で $\gamma^\sigma{}_\rho = \delta^\sigma{}_\rho + n^\sigma n_\rho$ であることや γ と n が直交することを用いた。さらに、$\gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu \nabla_\lambda n_\rho = -K_{\mu\nu}$ であり、これは対称テンソルである。∇_σ そのものが捩率 0 の共変微分なので、$\nabla_\mu \nabla_\nu f$ も対称テンソルであり、上式は第一項も第二項も μ と ν について対称である。よって、$D_\mu D_\nu f - D_\nu D_\mu f = \gamma^\lambda{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu \nabla_\lambda (\gamma^\sigma{}_\rho \nabla_\sigma f) - \gamma^\lambda{}_\nu \gamma^\rho{}_\mu \nabla_\lambda (\gamma^\sigma{}_\rho \nabla_\sigma f) = 0$ となり、捩率は 0 である。

最後に計量に作用させると 0 になることを示す。これは、

$$\gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\rho}{}_{\sigma}\nabla_{\rho}\gamma_{\mu\nu} = \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\rho}{}_{\sigma}(n_{\mu}\nabla_{\rho}n_{\nu} + n_{\nu}\nabla_{\rho}n_{\mu}) \tag{71}$$

$$= \gamma^{\rho}{}_{\sigma}(\gamma^{\mu}{}_{\alpha}n_{\mu}\gamma^{\nu}{}_{\beta}\nabla_{\rho}n_{\nu} + \gamma^{\mu}{}_{\alpha}\gamma^{\nu}{}_{\beta}n_{\nu}\nabla_{\rho}n_{\mu}) = 0 \tag{72}$$

というように示される。ここで、$\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} = 0$ および γ と n の直交性を用いた。

以上により式 (58) が示されたので、

$$\alpha^{-1}\gamma^{\sigma}{}_{\mu}\nabla_{\sigma}\alpha = \alpha^{-1}D_{\mu}\alpha \tag{73}$$

が示されたことになり、

$$n^{\sigma}\nabla_{\sigma}n_{\mu} = \alpha^{-1}D_{\mu}\alpha \tag{74}$$

を得る。ここから、

$$K_{\mu\nu} = -\nabla_{\nu}n_{\mu} - \alpha^{-1}(D_{\mu}\alpha)n_{\nu} \tag{75}$$

となる。

1.2 Einstein 方程式の $3+1$ 分解

時間発展を記述するのに便利なのは、Lie 微分である。まず、射影テンソルの αn に沿った Lie 微分は[*2]

$$\mathcal{L}_{\alpha n}\gamma^{\mu}{}_{\nu} = \alpha n^{\sigma}\nabla_{\sigma}\gamma^{\mu}{}_{\nu} - \gamma^{\sigma}{}_{\nu}\nabla_{\sigma}(\alpha n^{\mu}) + \gamma^{\mu}{}_{\sigma}\nabla_{\nu}(\alpha n^{\sigma}) \tag{79}$$

$$= \alpha n^{\sigma}\nabla_{\sigma}(n^{\mu}n_{\nu}) - \gamma^{\sigma}{}_{\nu}n^{\mu}\nabla_{\sigma}\alpha - \alpha\gamma^{\sigma}{}_{\nu}\nabla_{\sigma}n^{\mu} + \gamma^{\mu}{}_{\sigma}n^{\sigma}\nabla_{\nu}\alpha + \alpha\gamma^{\mu}{}_{\sigma}\nabla_{\nu}n^{\sigma} \tag{80}$$

$$= \alpha n^{\sigma}\nabla_{\sigma}(n^{\mu}n_{\nu}) + \gamma^{\sigma}{}_{\nu}(\alpha K^{\mu}{}_{\sigma} + n_{\sigma}D^{\mu}\alpha - n^{\mu}\nabla_{\sigma}\alpha) - \gamma^{\mu}{}_{\sigma}(\alpha K^{\sigma}{}_{\nu} + n_{\nu}D^{\sigma}\alpha - n^{\sigma}\nabla_{\nu}\alpha) \tag{81}$$

$$= n_{\nu}D^{\mu}\alpha + n^{\mu}D_{\nu}\alpha + \alpha K^{\mu}{}_{\nu} - n^{\mu}D_{\nu}\alpha - \alpha K^{\mu}{}_{\nu} - n_{\nu}D^{\mu}\alpha = 0 \tag{82}$$

となる。ただし、二行目から三行目にかけて式 (75) とを用い、三行目から四行目にかけて式 (74) と式 (58)、及び γ と n の直交性を用いた。この関係式を用いると、超曲面に接するテンソルは αn が生成する流れに沿った Lie 微分もまた超曲面に接するということを示すことができる。すなわち、例えば (p, q) 型の超曲面に接するテンソル $T^{\mu}{}_{\nu}$ (添字はまとめて μ と ν で表す) は、

$$\gamma^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\rho}{}_{\nu}T^{\sigma}{}_{\rho} = T^{\mu}{}_{\nu} \tag{83}$$

という性質を満たす。ゆえに、

$$\mathcal{L}_{\alpha n}(\gamma^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\rho}{}_{\nu}T^{\sigma}{}_{\rho}) = \mathcal{L}_{\alpha n}(T^{\mu}{}_{\nu}) \tag{84}$$

であるが、左辺は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\alpha n}(\gamma^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\rho}{}_{\nu}T^{\sigma}{}_{\rho}) = &\sum_{i}\gamma^{\mu_1}{}_{\sigma_1}\cdots\mathcal{L}_{\alpha n}\gamma^{\mu_i}{}_{\sigma_i}\cdots\gamma^{\mu_p}{}_{\sigma_p}\gamma^{\rho}{}_{\nu}T^{\sigma}{}_{\rho}\\ &+\sum_{j}\gamma^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\rho_1}{}_{\nu_1}\cdots\mathcal{L}_{\alpha n}\gamma^{\rho_j}{}_{\nu_j}\cdots\gamma^{\rho_q}{}_{\nu_q}T^{\sigma}{}_{\rho}\\ &+\gamma^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\rho}\mathcal{L}_{\alpha n}T^{\mu}{}_{\nu}\end{aligned} \tag{85}$$

$$= \gamma^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\rho}\mathcal{L}_{\alpha n}T^{\mu}{}_{\nu} \tag{86}$$

であるから、

$$\gamma^{\mu}{}_{\sigma}\gamma^{\nu}{}_{\rho}\mathcal{L}_{\alpha n}T^{\mu}{}_{\nu} = \mathcal{L}_{\alpha n}T^{\mu}{}_{\nu} \tag{87}$$

[*2] 共変微分の tortion free 性を用いれば

$$\mathcal{L}_{\alpha n}\gamma^{\mu}{}_{\nu} = \alpha n^{\sigma}\partial_{\sigma}\gamma^{\mu}{}_{\nu} - \gamma^{\sigma}{}_{\nu}\partial_{\sigma}(\alpha n^{\mu}) + \gamma^{\mu}{}_{\sigma}\partial_{\nu}(\alpha n^{\sigma}) \tag{76}$$

$$= \alpha n^{\sigma}\nabla_{\sigma}\gamma^{\mu}{}_{\nu} - \alpha n^{\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda}\gamma^{\lambda}{}_{\nu} + \alpha n^{\sigma}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\gamma^{\mu}{}_{\lambda} - \gamma^{\sigma}{}_{\nu}\nabla_{\sigma}(\alpha n^{\mu}) + \gamma^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda}\alpha n^{\lambda} + \gamma^{\mu}{}_{\sigma}\nabla_{\nu}(\alpha n^{\sigma}) - \gamma^{\mu}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\lambda}\alpha n^{\lambda} \tag{77}$$

$$= \alpha n^{\sigma}\nabla_{\sigma}\gamma^{\mu}{}_{\nu} - \gamma^{\sigma}{}_{\nu}\nabla_{\sigma}(\alpha n^{\mu}) + \gamma^{\mu}{}_{\sigma}\nabla_{\nu}(\alpha n^{\sigma}) \tag{78}$$

が成り立つ。即ち、T を αn に沿って Lie 微分しても超曲面に接することは変わらないことが示された。ゆえに、超曲面に接するテンソルの垂直な方向への時間発展は Lie 微分で記述すると便利である。そこで、超曲面に垂直な方向への微分演算子 $\partial_\perp$ を

$$\partial_\perp := \mathcal{L}_{\alpha n} = \mathcal{L}_{\partial_t} - \mathcal{L}_\beta \tag{88}$$

で定義する。このとき、たとえば $\mathcal{L}_{\partial_t}$ を $(1,1)$ 型テンソル $T^\mu{}_\nu$ に作用させることを考えると、∂_t は時間方向の座標基底ベクトルなので、成分は $\delta^\mu{}_0$ となる。つまり時間成分のみ 1 で他の成分は 0。よって、

$$\mathcal{L}_{\partial_t} T^\mu{}_\nu = \delta^\sigma{}_0 \partial_\sigma T^\mu{}_\nu - T^\sigma{}_\nu \partial_\sigma \delta^\mu{}_0 + T^\mu{}_\sigma \partial_\nu \delta^\sigma{}_0 = \partial_t T^\mu{}_\nu \tag{89}$$

他の型のテンソルも同様なので、垂直方向への微分演算子は

$$\partial_\perp = \partial_t - \mathcal{L}_\beta \tag{90}$$

となる。

空間計量 $\gamma_{\mu\nu}$ の時間発展は

$$\begin{aligned}
\partial_\perp \gamma_{\mu\nu} &= \alpha n^\sigma \nabla_\sigma \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\sigma\nu} \nabla_\mu (\alpha n^\sigma) + \gamma_{\mu\sigma} \nabla_\nu (\alpha n^\sigma) && (91)\\
&= \alpha n^\sigma \nabla_\sigma (n_\mu n_\nu) - \gamma_{\sigma\nu} (\alpha K^\sigma{}_\mu + n_\mu D^\sigma \alpha - n^\sigma \nabla_\mu \alpha) - \gamma_{\mu\sigma} (\alpha K^\sigma{}_\nu + n_\nu D^\sigma \alpha - n^\sigma \nabla_\nu \alpha) && (92)\\
&= n_\mu D_\nu \alpha + n_\nu D_\mu \alpha - \alpha K_{\nu\mu} - n_\mu D_\nu \alpha - \alpha K_{\mu\nu} - n_\nu D_\mu \alpha = -2\alpha K_{\mu\nu} && (93)
\end{aligned}$$

と超曲面の外的曲率で記述できる。導出方法は射影テンソルの Lie 微分と同様で、さらに $\nabla_\mu g_{\sigma\rho} = 0$ を用いた。特に、重要なのは計量テンソルの空間成分なので

$$\partial_\perp \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \tag{94}$$

を考えればよい。

以上のように、計量の時間発展を求めるには外的曲率が必要になるため、外的曲率の時間発展も知らなくてはならない。これを与えるのが Einstein 方程式を超曲面上に射影した式になる。Einstein 方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \tag{95}$$

であるが、これと等価な

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \tag{96}$$

を考える。ただし $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ であり、全エネルギー密度 $E := T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$、応力テンソル $S_{\mu\nu} := T_{\sigma\rho} \gamma^\sigma{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu$ とそのトレース $S := \gamma^{ij} S_{ij} = g^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$ を用いる[*3]と $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \gamma^{\rho\sigma} \gamma^\mu{}_\rho \gamma^\nu{}_\sigma T_{\mu\nu} - E = \gamma^{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} - E = S - E$ を得る。Einstein 方程式に $\gamma_i{}^\sigma \gamma_j{}^\rho$ をかけて[*4]超曲面に射影すると

$$\text{R.H.S.} = 8\pi \left[S_{ij} - \frac{1}{2} (S - E) \gamma_{ij} \right] \tag{99}$$

$$\text{L.H.S.} = \gamma_i{}^\sigma \gamma_j{}^\rho R_{\sigma\rho} \tag{100}$$

となる。左辺を求めるために、ここで (縮約)Gauss の関係式を導く。

[*3] 上付きの $\gamma^{\mu\nu}$ を $\gamma_{\mu\nu}$ の逆行列ではなく

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu \tag{97}$$

と定義する。$S_{\mu\nu}$ は T を射影したものなので n とは直交するため、$g^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$。さらに、成分表示すると

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{ij} \end{pmatrix} \tag{98}$$

であるから、$\gamma^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = \gamma^{ij} S_{ij} = S$ となる。

[*4] 即ち $\delta_i{}^\sigma \delta_j{}^\rho$。

いま、共変微分 D_μ によって導かれる Riemann テンソルを $Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho}$ とする。即ち、n に直交する任意のベクトル v に対して

$$D_\sigma D_\rho v^\mu - D_\rho D_\sigma v^\mu = Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho} v^\nu \tag{101}$$

と定義する。本来、これが曲率として意味があるのは v だけでなく σ、ρ と縮約を取るベクトルも n に直交するベクトルの場合だけであるが、いま、これらの引数を四次元ベクトルに拡張することを考える。四次元時空の接空間の任意のベクトル場 v に対して、$\gamma^\mu{}_\nu v^\nu$ は n に直交するので D_μ を作用させることができる。全てのベクトルの引数 (この場合は ν、σ、ρ と縮約を取るもの) についてそのように四次元時空のベクトルを n と直交するように射影したものにするとして、拡張する。σ、ρ と縮約をとるものについては、D_σ の定義に既に $\gamma^\alpha{}_\sigma$ が入っているため以下の計算には影響しない。一方、ν と縮約を取るベクトル v に関しては

$$D_\sigma D_\rho \gamma^\mu{}_\nu v^\nu - D_\rho D_\sigma \gamma^\mu{}_\nu v^\nu = Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho} v^\nu \tag{102}$$

となる。ここで、$\gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu$、$\gamma^\sigma{}_\nu n_\sigma = 0$、$v^\mu n_\mu = 0$、(50) を用いると

$$\begin{aligned}
D_\sigma D_\rho \gamma^\mu{}_\nu v^\nu &= \gamma^\alpha{}_\sigma \gamma^\beta{}_\rho \gamma^\mu{}_\gamma \nabla_\alpha(\gamma^\delta{}_\beta \gamma^\gamma{}_\nu \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma) && (103)\\
&= \gamma^\alpha{}_\sigma \gamma^\beta{}_\rho \gamma^\mu{}_\gamma (n^\delta \nabla_\alpha n_\beta \gamma^\gamma{}_\nu \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma) + n_\nu \nabla_\alpha n^\gamma \gamma^\delta{}_\beta \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma) + \gamma^\delta{}_\beta \gamma^\gamma{}_\nu \nabla_\alpha \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma)) && (104)\\
&= \gamma^\alpha{}_\sigma \gamma^\beta{}_\rho \gamma^\mu{}_\gamma (n^\delta \nabla_\alpha n_\beta \gamma^\gamma{}_\nu \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma) - \gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma \nabla_\alpha n^\gamma \gamma^\delta{}_\beta \nabla_\delta n_\nu + \gamma^\delta{}_\beta \gamma^\gamma{}_\nu \nabla_\alpha \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma)) && (105)\\
&= -K_{\sigma\rho} \gamma^\mu{}_\nu n^\delta \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma) - K^\mu{}_\sigma K_{\rho\nu} v^\nu + \gamma^\alpha{}_\sigma \gamma^\delta{}_\rho \gamma^\mu{}_\nu \nabla_\alpha \nabla_\delta(\gamma^\nu{}_\sigma v^\sigma) && (106)
\end{aligned}$$

となる。ただし、一行目では式 (58)、一行目から二行目にかけては $\gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu$ と $\gamma^\sigma{}_\nu n_\sigma = 0$、二行目から三行目にかけては $n_\mu v^\mu = 0$、三行目から四行目にかけては式 (50) とを用いた。

共変微分の添字を入れ替えれば、K の対称性と四次元の Riemann テンソルの定義 $\nabla_\mu \nabla_\nu(\gamma^\rho{}_\sigma v^\sigma) - \nabla_\nu \nabla_\mu(\gamma^\rho{}_\sigma v^\sigma) = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \gamma^\sigma{}_\lambda v^\lambda$ も用いて、結局

$$(K_{\sigma\nu} K^\mu{}_\rho - K_{\rho\nu} K^\mu{}_\sigma) \gamma^\nu{}_\lambda v^\lambda + \gamma^\tau{}_\sigma \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\mu{}_\lambda R^\lambda{}_{\nu\tau\varphi} \gamma^\nu{}_\theta v^\theta = Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho} v^\nu \tag{107}$$

を得る。ここで、$K_{\sigma\nu}$ は n には直交するので射影テンソルを作用させても変わらず、

$$\gamma^\tau{}_\sigma \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\mu{}_\lambda \gamma^\theta{}_\nu R^\lambda{}_{\theta\tau\varphi} v^\nu = Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho} v^\nu + K_{\rho\nu} K^\mu{}_\sigma v^\nu - K_{\sigma\nu} K^\mu{}_\rho v^\nu \tag{108}$$

となる。v は任意であったから

$$\gamma^\tau{}_\sigma \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\mu{}_\lambda \gamma^\theta{}_\nu R^\lambda{}_{\theta\tau\varphi} = Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho} + K_{\rho\nu} K^\mu{}_\sigma - K_{\sigma\nu} K^\mu{}_\rho \tag{109}$$

を得る。これをを Gauss の関係式という。さらに、μ と σ について縮約を取ると

$$\begin{aligned}
\gamma^\tau{}_\lambda \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\theta{}_\nu R^\lambda{}_{\theta\tau\varphi} &= (\delta^\tau{}_\lambda + n^\tau n_\lambda) \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\theta{}_\nu R^\lambda{}_{\theta\tau\varphi} && (110)\\
&= \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\theta{}_\nu R_{\theta\varphi} + n^\tau n^\lambda \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\theta{}_\nu R_{\lambda\theta\tau\varphi} && (111)\\
&= \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\theta{}_\nu R_{\theta\varphi} + n^\tau n^\lambda \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\theta{}_\nu R_{\theta\lambda\varphi\tau} && (112)\\
&= \gamma^\varphi{}_\rho \gamma^\theta{}_\nu R_{\theta\varphi} + n^\tau n^\lambda \gamma^\varphi{}_\rho \gamma_{\theta\nu} R^\theta{}_{\lambda\varphi\tau} && (113)
\end{aligned}$$

となる。ただし、二行目から三行目にかけて Riemann テンソルの反対称性を用いた。ここから添字を整理することで、Ricci テンソルについての関係式

$$\gamma^\sigma{}_\mu \gamma^\rho{}_\nu R_{\sigma\rho} + \gamma_{\mu\sigma} n^\rho \gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = Q_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\sigma} K^\sigma{}_\nu \tag{114}$$

を得る。ただし $Q_{\mu\nu} = Q^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}$。これを縮約 Gauss の関係式という。さらに、Riemann テンソル R の部分は定義から

$$\gamma_{\mu\sigma} n^\rho \gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = \gamma_{\mu\sigma} n^\tau \gamma^\lambda{}_\nu (\nabla_\lambda \nabla_\tau n^\sigma - \nabla_\tau \nabla_\lambda n^\sigma) \tag{115}$$

である。これをさらに展開していくと、

$$\gamma_{\mu\sigma}n^\tau\gamma^\lambda{}_\nu(\nabla_\lambda\nabla_\tau n^\sigma - \nabla_\tau\nabla_\lambda n^\sigma) = \gamma_{\mu\sigma}n^\tau\gamma^\lambda{}_\nu[-\nabla_\lambda(K^\sigma{}_\tau + n_\tau n^\rho\nabla_\rho n^\sigma) + \nabla_\tau(K^\sigma{}_\lambda + n_\lambda n^\rho\nabla_\rho n^\sigma)] \tag{116}$$

$$= \gamma_{\mu\sigma}n^\tau\gamma^\lambda{}_\nu[-\nabla_\lambda(K^\sigma{}_\tau + n_\tau\alpha^{-1}D^\sigma\alpha) + \nabla_\tau(K^\sigma{}_\lambda + n_\lambda\alpha^{-1}D^\sigma\alpha)] \tag{117}$$

$$= \gamma_{\mu\sigma}\gamma^\lambda{}_\nu[K^\sigma{}_\tau\nabla_\lambda n^\tau + \nabla_\lambda(\alpha^{-1}D^\sigma\alpha) + n^\tau\nabla_\tau K^\sigma{}_\lambda + \alpha^{-1}D_\lambda\alpha\alpha^{-1}D^\sigma\alpha + n^\tau n_\lambda\nabla_\tau(\alpha^{-1}D^\sigma\alpha)] \tag{118}$$

$$= \gamma_{\mu\sigma}\gamma^\lambda{}_\nu K^\sigma{}_\tau(-K^\tau{}_\lambda - n_\lambda\alpha^{-1}D^\tau\alpha) + D_\nu D_\mu(\ln\alpha) + \gamma_{\mu\sigma}\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau\nabla_\tau K^\sigma{}_\lambda + D_\nu\ln\alpha D_\mu\ln\alpha \tag{119}$$

$$= -K_{\mu\tau}K^\tau{}_\nu + D_\nu D_\mu(\ln\alpha) + \gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau\nabla_\tau K_{\sigma\lambda} + D_\nu\ln\alpha D_\mu\ln\alpha \tag{120}$$

となる。ただし、一行目では式 (75)、二行目から三行目で $K^\mu{}_\sigma n^\sigma = 0$ と $n^\sigma\nabla_\nu n_\sigma = 0$、三行目から四行目で再度式 (75) と γ と n の直交性、四行目から五行目では $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ を用いた。最後にまとめると、

$$\gamma_{\mu\sigma}n^\rho\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = -K_{\mu\sigma}K^\sigma{}_\nu + \alpha^{-1}D_\nu D_\mu\alpha + \gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu n^\lambda\nabla_\lambda K_{\sigma\rho} \tag{121}$$

を得る。一方で、

$$\partial_\perp K_{\mu\nu} = \alpha n^\sigma\nabla_\sigma K_{\mu\nu} + K_{\sigma\nu}\nabla_\mu(\alpha n^\sigma) + K_{\mu\sigma}\nabla_\nu(\alpha n^\sigma) \tag{122}$$

を $\gamma^\mu{}_\lambda\gamma^\nu{}_\rho$ で射影すると左辺は式 (87) から変わらず $\partial_\perp K_{\mu\nu}$。ゆえにこの等式は $\gamma_{\mu\nu}$ の時と似たような計算の後、射影操作で

$$\partial_\perp K_{\lambda\rho} = \alpha\gamma^\mu{}_\lambda\gamma^\nu{}_\rho n^\sigma\nabla_\sigma K_{\mu\nu} + \gamma^\mu{}_\lambda K_{\sigma\rho}(n^\sigma\nabla_\mu\alpha + \alpha\nabla_\mu n^\sigma) + \gamma^\nu{}_\rho K_{\lambda\sigma}(n^\sigma\nabla_\nu\alpha + \alpha\nabla_\nu n^\sigma) \tag{123}$$

$$= \alpha\gamma^\mu{}_\lambda\gamma^\nu{}_\rho n^\sigma\nabla_\sigma K_{\mu\nu} + \gamma^\mu{}_\lambda K_{\sigma\rho}\alpha(-K^\sigma{}_\mu - n_\mu n^\tau\nabla_\tau n^\sigma) + \gamma^\nu{}_\rho K_{\lambda\sigma}\alpha(-K^\sigma{}_\nu - n_\nu n^\tau\nabla_\tau n^\sigma) \tag{124}$$

$$= \alpha\gamma^\mu{}_\lambda\gamma^\nu{}_\rho n^\sigma\nabla_\sigma K_{\mu\nu} - 2\alpha K_{\rho\sigma}K^\sigma{}_\lambda \tag{125}$$

を得る。これを Riemann テンソルの式に入れると、

$$\gamma_{\mu\sigma}n^\rho\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = \alpha^{-1}\partial_\perp K_{\mu\nu} + \alpha^{-1}D_\mu D_\nu\alpha + K_{\mu\sigma}K^\sigma{}_\nu \tag{126}$$

となり、これを縮尺 Gauss の関係式に入れると

$$\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu R_{\sigma\rho} = -\alpha^{-1}\partial_\perp K_{\mu\nu} - \alpha^{-1}D_\mu D_\nu\alpha + Q_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K_{\mu\sigma}K^\sigma{}_\nu \tag{127}$$

となる。ここで、$\mu = i$、$\nu = j$ と空間成分を考えるとまさに超曲面に射影した Einstein 方程式の左辺に他ならないので、これらを整理して

$$\partial_\perp K_{ij} = -D_iD_j\alpha + \alpha(Q_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j + 4\pi[(S-E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]) \tag{128}$$

を得る。ここで $K_{i\mu}K^\mu{}_j = K_{ik}K^k{}_j$ を用いた。

さらに、超曲面に垂直な方向への射影を考える。これは Hamiltonian constraint と呼ばれるものである。これはもともとの Einstein 方程式を考えたほうが見通しがよく、

$$R^{\mu\nu}n_\mu n_\nu + \frac{1}{2}R = 8\pi T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu \tag{129}$$

である。いま、上で求めた縮約 Gauss の関係式の γ による trace を取ると、左辺の項は

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu R_{\sigma\rho} = (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu)R_{\mu\nu} = R + R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \tag{130}$$

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\sigma}n^\rho\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = n^\rho n^\tau\gamma^\lambda{}_\sigma R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} \tag{131}$$

$$= n^\rho n^\tau R_{\rho\tau} + n^\rho n^\tau n^\lambda n_\sigma R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} \tag{132}$$

$$= R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \tag{133}$$

となる。ただし、最後は Riemann テンソルの反対称性を用いた。これにより、関係式は

$$R + 2R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = Q + K^2 - K_{ij}K^{ij} \tag{134}$$

となる。これは Hamiltonian constraint の左辺の丁度 2 倍なので、結局 Hamiltonian constraint として

$$Q + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 16\pi E = 0 \tag{135}$$

を得る。

最後に超曲面とそれに垂直な方向それぞれについて一回ずつ射影したものを考える。これは momentum constraint と呼ばれる。$n^\mu\gamma_{\mu\nu} = 0$ なので

$$R_{\sigma\rho}n^\sigma\gamma^\rho{}_\mu = -8\pi S_\mu \tag{136}$$

である。ただし、$S_\mu = -T_{\sigma\nu}n^\sigma\gamma^\nu{}_\mu$ は運動量密度である。この左辺を計算するためには、縮約 Codazzi 方程式というものが必要になる。いま、四次元時空上の Riemann テンソルの定義から

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)n^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}n^\rho \tag{137}$$

であるが、これを超曲面上に射影すると

$$\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau R^\tau{}_{\theta\sigma\rho}n^\theta = \gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau(\nabla_\sigma\nabla_\rho n^\tau - \nabla_\rho\nabla_\sigma n^\tau) \tag{138}$$

である。簡単な計算により

$$\begin{aligned}
\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau\nabla_\sigma\nabla_\rho n^\tau &= \gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau\nabla_\sigma(-K^\tau{}_\rho - n_\rho n^\alpha\nabla_\alpha n^\tau) &(139)\\
&= -D_\mu K^\lambda{}_\nu - \gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau(\nabla_\sigma n_\rho n^\alpha\nabla_\alpha n^\tau + n_\rho\nabla_\sigma n^\alpha\nabla_\alpha n^\tau + n_\rho n^\alpha\nabla_\sigma\nabla_\alpha n^\tau) &(140)\\
&= -D_\mu K^\lambda{}_\nu + \gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau(K_{\rho\sigma}n^\alpha\nabla_\alpha n^\tau + n_\sigma n^\beta\nabla_\beta n_\rho n^\alpha\nabla_\alpha n^\tau) &(141)\\
&= -D_\mu K^\lambda{}_\nu + K_{\mu\nu}(n^\sigma\nabla_\sigma)n^\lambda &(142)
\end{aligned}$$

という式を得られ、これを μ と ν について反対称化することで

$$\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau R^\tau{}_{\theta\sigma\rho}n^\theta = -D_\mu K^\lambda{}_\nu + D_\nu K^\lambda{}_\mu \tag{143}$$

という Codazzi の関係式を得る。さらにこれで λ と μ を縮約すると左辺は Riemann テンソルの反対称性を用いて

$$\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\mu{}_\tau R^\tau{}_{\theta\sigma\rho}n^\theta = R_{\theta\rho}\gamma^\rho{}_\nu n^\theta + \gamma^\rho{}_\nu n^\theta n^\sigma n_\tau R^\tau{}_{\theta\sigma\rho} = R_{\theta\rho}\gamma^\rho{}_\nu n^\theta \tag{144}$$

となるので、

$$\gamma^\rho{}_\mu n^\sigma R_{\sigma\rho} = D_\mu K - D_\sigma K^\sigma{}_\mu \tag{145}$$

という縮約 Codazzi の関係式を得る。momentum constraint に再度戻ると、重要なのは空間成分だけなので、結局

$$D_i K - D_j K^j{}_i + 8\pi S_i = 0 \tag{146}$$

となる。ただし、$K^\sigma{}_\mu n_\sigma = 0$ なので $K^0{}_\mu = 0$ であることを用いた。

ここで、自由度の勘定をしておく。もともとの Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{147}$$

で、10 本の方程式だった。そのうえ、これは変数 $g_{\mu\nu}$ の二階の方程式である。このうち、Bianchi の恒等式 (またはエネルギーと運動量の保存則) から自由度は 4 つ減り、座標の定め方から自由度は 4 つ減り、独立なのは 2 本分つまり自由度は 2 である。一方で、$3+1$ 分解したあとの方程式は $\partial_\perp\gamma_{ij}$ と $\partial_\perp K_{ij}$ の計 12 本の一階微分方程式であり、これとは別に Hamiltonian と momentum の constraint があるので 4 つ自由度が減り、さらに座標の定め方 (ラプスとシフトの定め方) から 4 つ減る[*5]ので、独立なのは 4 本分つまり自由度は 4 である。ここでは二階微分方程式 2 本分の自由度と一階微分方程式 4 本分なので、その自由度の勘定は同じになる。

[*5] ラプスとシフトの値そのものと時間微分を定めるので二階微分方程式を 4 つ、一階微分方程式なら 8 つ潰せるだけの拘束条件だが、時間微分は方程式に出てこないので結局 4 つ分減らすことにしかならない。

1.3 Einstein 方程式の共形分解

ここまでで Einstein 方程式の $3+1$ 分解自体はできているが、いまの形式では初期条件のセッティングが難しい。これを解決するために、共形分解という手法を用いる。具体的にここからどう初期条件を設定するかは後述する。

共形分解では、空間計量を

$$\bar{\gamma}_{ij} = \mathrm{e}^{-4\phi}\gamma_{ij} \tag{148}$$

と書き直す。この $\bar{\gamma}$ は曲がった空間の計量ではあるが、行列式は平坦計量のもの $\hat{\gamma}$ と一致するように取る。即ち、

$$\det(\bar{\gamma}_{ij}) = \hat{\gamma} \tag{149}$$

である。この $\bar{\gamma}_{ij}$ を conformally related metric、ϕ を共形因子 (の exponent) と呼ぶ。また、$\hat{\gamma}_{ij}$ は背景計量と呼ぶ。conformally related metric の逆行列 $\bar{\gamma}^{ij}$ ともともとの空間計量の逆行列 γ^{ij} は

$$\bar{\gamma}^{ij} = \mathrm{e}^{4\phi}\gamma^{ij} \tag{150}$$

という関係にある。この conformally related metric に関する共変微分 $\bar{D}_i$ と、もともとの空間計量 γ_{ij} に関する共変微分 $\tilde{D}_i$ とは、それぞれで定義される Christoffel 記号 $\bar{\Gamma}^i{}_{jk}$ と $\tilde{\Gamma}^i{}_{jk}$ の差 $C^i{}_{jk} = \tilde{\Gamma}^i{}_{jk} - \bar{\Gamma}^i{}_{jk}$ を用いて関連づけられる。ただし、$\tilde{D}_i$ は超曲面の接空間・余接空間の元に作用するよう定義されている、普通の意味での超曲面上の共変微分である。[*6]即ち、例えばベクトルに対しては

$$\tilde{D}_i v^j = \bar{D}_i v^j + C^j{}_{ik} v^k \tag{151}$$

であり、その他の一般のテンソルに関しても同様である。この定義から明らかなように、$C^i{}_{jk}$ はテンソルである。いま、$\bar{D}_i$ も $\tilde{D}_i$ も対称接続なので、$C^i{}_{jk} = C^i{}_{kj}$ である。また、$\tilde{D}_i$ を γ_{ij} に作用させると 0 になることから

$$0 = \tilde{D}_i\gamma_{jk} = \bar{D}_i\gamma_{jk} - C^l{}_{ij}\gamma_{lk} - C^l{}_{ik}\gamma_{jl} \tag{152}$$

これは添字が ijk だが、さらに jki としたものを足して kij としたものを引くことで、

$$C^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\bar{D}_j\gamma_{lk} + \bar{D}_k\gamma_{jl} - \bar{D}_l\gamma_{jk}) \tag{153}$$

を得る。ここで、$\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta^i{}_j$ を用いた。さらに、$\bar{D}_i$ は $\bar{\gamma}_{ij}$ と交換することから、式 (148) から

$$0 = \bar{D}_i\bar{\gamma}_{jk} = \bar{D}_i(\mathrm{e}^{-4\phi}\gamma_{jk}) = -4\mathrm{e}^{-4\phi}\gamma_{jk}\bar{D}_i\phi + \mathrm{e}^{-4\phi}\bar{D}_i\gamma_{jk} \tag{154}$$

であり、

$$\bar{D}_i\gamma_{jk} = 4\gamma_{jk}\bar{D}_i\phi \tag{155}$$

を得る。これを用いて具体的に C の表式を求めると、

$$C^i{}_{jk} = 2(\delta^i{}_j\bar{D}_k\phi + \delta^i{}_k\bar{D}_j\phi - \bar{D}^i\phi\bar{\gamma}_{jk}) \tag{156}$$

となる。ただし、第三項は $\gamma^{il}\gamma_{jk} = \bar{\gamma}^{il}\bar{\gamma}_{jk}$ という関係式を用い、$\bar{D}^i = \bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_j$ と $\bar{D}_j$ の添字の上下を $\bar{\gamma}^{ij}$ でおこなった。

後で利用するので、ここで Ricci テンソルの共形版を求めておく。式 (102) で定義された Riemann テンソルは四次元で D_μ によって定義されたものなので、三次元で $\tilde{D}_i$ によって定義される Riemann テンソル ${}^3R^i{}_{jkl}$ との関連を示す。具体的には、座標表示した $Q^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ の空間のみの成分は ${}^3R^i{}_{jkl}$ に一致することを示す。式

*6 四次元時空の接空間・余接空間の元で n に直交するものに作用する D_μ とは似ているが、とりあえず今は違うもの。

(102) の左辺は定義により n に直交するので、$n_\mu Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho}=0$。よって、$Q^0{}_{\nu\sigma\rho}=0$ となる。ここから、Ricci テンソルを求めると

$$Q_{ij}=Q^\sigma{}_{i\sigma j}=Q^k{}_{ikj} \tag{157}$$

と空間成分の縮約を取るだけでよいので、空間成分 $Q^i{}_{jkl}$ だけを考えるのでよい。

これは具体的には、

$$Q^i{}_{jkl}=\langle \mathrm{d}x^i,\, D_{\boldsymbol{e}_k}D_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j-D_{\boldsymbol{e}_l}D_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j\rangle \tag{158}$$

で計算できる。ただし、$\langle\,\rangle$ は双対ベクトルをベクトルに作用させることを表し、$\boldsymbol{e}_j$ は座標基底である。いま n に直交する空間座標基底を考えているので、D_μ を作用させてよい。また、D も空間成分、即ち空間座標基底方向への共変微分にしている。これを求めるために、共変微分 $D_{\boldsymbol{e}_i}$ を座標基底 $\boldsymbol{e}_j$ に作用させることを考え、接続係数 $G^\mu{}_{ij}$ を求める。[*7]いま、接続係数の定義により

$$D_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j=G^\mu{}_{ij}\boldsymbol{e}_\mu \tag{159}$$

である。[*8]ここでは、左辺が $\boldsymbol{e}_0$ 成分を持つ可能性も考えて μ には 0 も許しているが、

$$G^0{}_{ij}=\langle \mathrm{d}x^0,\, D_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j\rangle\propto\langle \underline{n},\, D_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j\rangle=0 \tag{160}$$

より、$\mu=0$ の場合は実際には 0 となる。ただし、$\underline{n}$ は n を計量で双対ベクトルに移したものであり、また D を作用させたテンソルは n に直交するようになることを用いた。すなわち、

$$D_{\boldsymbol{e}_i}\boldsymbol{e}_j=G^k{}_{ij}\boldsymbol{e}_k \tag{161}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{d}x^i,\, D_{\boldsymbol{e}_k}D_{\boldsymbol{e}_l}\boldsymbol{e}_j\rangle &=\langle \mathrm{d}x^i,\, D_{\boldsymbol{e}_k}(G^m{}_{lj}\boldsymbol{e}_m)\rangle &(162)\\
&=\langle \mathrm{d}x^i,\, D_{\boldsymbol{e}_k}(G^m{}_{lj})\boldsymbol{e}_m+G^m{}_{lj}D_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_m\rangle &(163)\\
&=\langle \mathrm{d}x^i,\, \partial_k(G^m{}_{lj})\boldsymbol{e}_m+G^m{}_{lj}G^n{}_{km}\boldsymbol{e}_n\rangle &(164)\\
&=\partial_k(G^i{}_{lj})+G^m{}_{lj}G^i{}_{km} &(165)
\end{aligned}$$

ただし、$\boldsymbol{e}_k$ が n に直交するベクトルのため $D_{\boldsymbol{e}_k}$ をスカラー場に作用させるとただの k 方向への偏微分になることを用いた。ゆえに、Riemann テンソルは

$$Q^i_{jkl}=\partial_k G^i{}_{lj}-\partial_l G^i{}_{kj}+G^m{}_{lj}G^i{}_{km}-G^m{}_{kj}G^i{}_{lm} \tag{166}$$

で計算できる。

さらに、接続係数を計量で表す。$\gamma_{\mu\nu}$ に D_μ を作用させると 0 になったので、このテンソルの純空間成分を考えると[*9]

$$0=D_i\gamma_{jk}=\partial_i\gamma_{jk}-G^l{}_{ij}\gamma_{lk}-G^l{}_{ik}\gamma_{jl} \tag{167}$$

である。ひとたび最右辺の表式を得れば、これは成分の表式なので $\gamma_{\mu\nu}$ の純空間成分と考えても超曲面の空間計量 γ_{ij} と考えても良い。また、これは添字が ijk であるが、jki としたものを加え、kij としたものを引くと

$$\partial_i\gamma_{jk}+\partial_j\gamma_{ki}-\partial_k\gamma_{ij}-2G^l{}_{ij}\gamma_{lk}=0 \tag{168}$$

[*7] 四次元の接続係数 $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ は、$\nabla_{\boldsymbol{e}_\nu}\boldsymbol{e}_\rho=\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\boldsymbol{e}_\mu$ で定義されていた。

[*8] D が微分として作用する相手は n に直交している必要があり、D 自体の足も n に直交するベクトルとの縮約しか取れない。なので、G の下付きの足は空間成分のみを考えている。下付きの足が 0 を含む場合に拡張することもできるが、上付きの足が 0 の時は G が 0 になることをここで示しているので、二階微分の左側の D が $\boldsymbol{e}_0$ に作用することはないこと、また、Q も空間成分を考えているので $\boldsymbol{e}_0$ と縮約を取ることもないことから、ここでは考えないことにする。

[*9] 共変微分の作用と接続係数の関係を考えておく。n に直交するベクトル場 v と u に対し、これは $\boldsymbol{e}_i\,(i=1,2,3)$ によって展開できるため、$D_uv=D_u(v^j\boldsymbol{e}_j)=(D_uv^j)\boldsymbol{e}_j+u^iv^jD_{\boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{e}_j)$ となる。いまは v^j はただのスカラー関数で u は n に直交するベクトルなので $D_uv=u^i(\partial_iv^j)\boldsymbol{e}_j+u^iv^jG^k{}_{ij}\boldsymbol{e}_k$ であり、ここで成分表示により $D_iv^j=\partial_iv^j+G^j{}_{ik}v^k$ を得る。ここから Leibnitz 則等を用いて n に直交する双対ベクトルへの作用は $D_i\omega_j=\partial_i\omega_j-G^k{}_{ij}\omega_k$ である。計量 $\gamma_{\mu\nu}$ への作用も同様に拡張できる。

となる。ここから、

$$G^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j \gamma_{lk} + \partial_k \gamma_{lj} - \partial_l \gamma_{jk}) \tag{169}$$

を得る。従って、成分の比較から純空間成分については $G^i{}_{jk} = \tilde{\Gamma}^i{}_{jk}$ となる。$\tilde{D}_i$ で定義される Riemann テンソルはお馴染みの計算により

$$^3R^i{}_{jkl} = \partial_k \tilde{\Gamma}^i{}_{lj} - \partial_l \tilde{\Gamma}^i{}_{kj} + \tilde{\Gamma}^m{}_{lj}\tilde{\Gamma}^i{}_{km} - \tilde{\Gamma}^m{}_{kj}\tilde{\Gamma}^i{}_{lm} \tag{170}$$

となるので、$Q^i{}_{jkl} = {}^3R^i{}_{jkl}$ を得る。さらに前述の議論により、$Q_{ij} = {}^3R_{ij}$ である。

さらに、超曲面上の Ricci テンソルと conformally related metric の Ricci テンソルを関係づける。超曲面上、$\tilde{D}_i$ に関する Ricci テンソルは Riemann テンソルの定義を縮約して、超曲面の接空間の任意のベクトル v によって

$$^3R_{ij}v^j = \tilde{D}_j\tilde{D}_i v^j - \tilde{D}_i\tilde{D}_j v^j \tag{171}$$

となる。この $\tilde{D}_i$ を $\bar{D}_i$ に書き換えると、

$$\begin{aligned}
{}^3R_{ij}v^j &= \bar{D}_j(\tilde{D}_i v^j) + C^j{}_{jk}\tilde{D}_i v^k - C^k{}_{ji}\tilde{D}_k v^j - \bar{D}_i(\tilde{D}_j v^j) \qquad (172)\\
&= \bar{D}_j(\bar{D}_i v^j + C^j{}_{ik}v^k) + C^j{}_{jk}\bar{D}_i v^k + C^j{}_{jk}C^k{}_{il}v^l - C^k{}_{ji}\bar{D}_k v^j - C^k{}_{ji}C^j{}_{kl}v^l - \bar{D}_i(\bar{D}_j v^j + C^j{}_{jk}v^k) \qquad (173)\\
&= \bar{D}_j\bar{D}_i v^j + (\bar{D}_j C^j{}_{ik})v^k + C^j{}_{ik}\bar{D}_j v^k + C^j{}_{jk}\bar{D}_i v^k + C^j{}_{jk}C^k{}_{il}v^l \\
&\quad - C^k{}_{ji}\bar{D}_k v^j - C^k{}_{ji}C^j{}_{kl}v^l - \bar{D}_i\bar{D}_j v^j - (\bar{D}_i C^j{}_{jk})v^k - C^j{}_{jk}\bar{D}_i v^k \qquad (174)\\
&= \bar{D}_j\bar{D}_i v^j - \bar{D}_i\bar{D}_j v^j + (\bar{D}_j C^j{}_{ik})v^k - C^k{}_{ji}C^j{}_{kl}v^l + C^j{}_{jk}C^k{}_{il}v^l - (\bar{D}_i C^j{}_{jk})v^j \qquad (175)
\end{aligned}$$

であるから、$\bar{D}_i$ で定義される共形版 Ricci テンソル $\bar{R}_{ij}$ とは

$$^3R_{ij} = \bar{R}_{ij} + \bar{D}_l C^l{}_{ij} - C^k{}_{li}C^l{}_{kj} + C^l{}_{lk}C^k{}_{ij} - \bar{D}_i C^k{}_{kj} \tag{176}$$

という関係で結ばれる。これを共形因子で表すと、

$$C^k{}_{ki} = 2(3\bar{D}_i\phi + \bar{D}_i\phi - \bar{D}_i\phi) = 6\bar{D}_i\phi \tag{177}$$

であることから

$$\bar{D}_l C^l{}_{ij} = 2\bar{D}_i\bar{D}_j\phi + 2\bar{D}_j\bar{D}_i\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_l\bar{D}^l\phi \tag{178}$$

$$\begin{aligned}
C^k{}_{li}C^l{}_{kj} &= 4(3\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi + \bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - \bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi \\
&\qquad \bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi + \bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - \bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_l\phi\bar{D}^l\phi \\
&\qquad -\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - \bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi + \bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi) \qquad (179)\\
&= 20\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - 8\bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi \qquad (180)
\end{aligned}$$

$$C^l{}_{lk}C^k{}_{ij} = 12\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi + 12\bar{D}_j\phi\bar{D}_i\phi - 12\bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi \tag{181}$$

$$\bar{D}_i C^k{}_{kj} = 6\bar{D}_i\bar{D}_j\phi \tag{182}$$

となり、これらをまとめることで

$$^3R_{ij} = \bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i\bar{D}_j\phi - 2\bar{D}_k\bar{D}^k\phi\bar{\gamma}_{ij} + 4\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - 4\bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi\bar{\gamma}_{ij} \tag{183}$$

となる。trace を求めておくと、

$$^3R(= \gamma^{ij}\,{}^3R_{ij}) = \mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{R} - 8(\bar{D}_k\bar{D}^k\phi + \bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi)) \tag{184}$$

である。このとき、$\bar{R} = \bar{\gamma}^{ij}\bar{R}_{ij}$ である。さらに、式 (134) に出てくる Q は

$$Q = \gamma^{\mu\nu}Q_{\mu\nu} = \gamma^{ij}Q_{ij} = \gamma^{ij}\,{}^3R_{ij} = {}^3R \tag{185}$$

と上記のスカラー曲率に等しいことがわかるので、Hamiltonian constraint の Q は上式の $\bar{R}$ を用いた式で表せたことになる。

外的曲率も共形版にする。ここで、外的曲率の trace が $3+1$ 分解した方程式に現れていたことから、外的曲率の成分を trace と traceless 部分に分解する:

$$A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3}K\gamma_{ij} \tag{186}$$

これは γ^{ij} で trace を取ると 0 になる。この traceless 部分の共形版はある程度の任意性があるが、ここでは

$$\bar{A}_{ij} = \mathrm{e}^{-4\phi}A_{ij} \tag{187}$$

というスケーリングで共形版を定義する。これも $\bar{\gamma}$ による trace は 0、$\bar{\gamma}^{ij}\bar{A}_{ij} = 0$ という条件を満たす。

空間計量の時間発展は

$$\partial_\perp(\mathrm{e}^{4\phi}\bar{\gamma}_{ij}) = -2\alpha A_{ij} - \frac{2}{3}K\gamma_{ij} \tag{188}$$

である。ここで

$$\partial_\perp(\mathrm{e}^{4\phi}\bar{\gamma}_{ij}) = 4\mathrm{e}^{4\phi}\bar{\gamma}_{ij}\partial_\perp\phi + \mathrm{e}^{4\phi}\partial_\perp\bar{\gamma}_{ij} \tag{189}$$

において、$\bar{\gamma}^{ij}$ をかけると第二項は

$$\bar{\gamma}^{ij}\partial_\perp\bar{\gamma}_{ij} = \partial_\perp \ln\det(\bar{\gamma}_{ij}) = \partial_\perp \ln\hat{\gamma} = -\mathcal{L}_\beta \ln\hat{\gamma} = -\mathcal{L}_\beta \ln\det(\bar{\gamma}_{ij}) \tag{190}$$

となる。ただし $\partial_t\hat{\gamma} = 0$ である。これはさらに

$$-\mathcal{L}_\beta \ln\det(\bar{\gamma}_{ij}) = -\bar{\gamma}^{ij}\mathcal{L}_\beta\bar{\gamma}_{ij} = -\bar{\gamma}^{ij}(\beta^k\bar{D}_k\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{ik}\bar{D}_j\beta^k + \bar{\gamma}_{kj}\bar{D}_i\beta^k) = -2\bar{D}_i\beta^i \tag{191}$$

となる。[*10] これを利用すると、共形因子の時間発展を求められる:

$$\partial_\perp\phi = \frac{1}{6}(\bar{D}_i\beta^i - \alpha K) \tag{195}$$

ただし、$\bar{\gamma}_{ij} = \mathrm{e}^{-4\phi}\gamma_{ij}$ と $\bar{A}_{ij}$ の traceless 性を用いた。さらに、空間計量の時間発展からこの共形因子の時間発展を差し引くと conformally related metric の時間発展が求まる。つまり、

$$\partial_\perp\bar{\gamma}_{ij} = -4\bar{\gamma}_{ij}\partial_\perp\phi - 2\alpha\bar{A}_{ij} - \frac{2}{3}K\bar{\gamma}_{ij} \tag{196}$$

より

$$\partial_\perp\bar{\gamma}_{ij} = -2\alpha\bar{A}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{D}_k\beta^k\bar{\gamma}_{ij} \tag{197}$$

また、$\bar{A}^{ij} := \bar{\gamma}^{ik}\bar{\gamma}^{jl}\bar{A}_{kl}$ を定義すると

$$\begin{aligned}
-2\alpha\bar{A}^{ij} - \frac{2}{3}\bar{D}_k\beta^k\bar{\gamma}^{ij} &= \bar{\gamma}^{ik}\bar{\gamma}^{jl}\partial_\perp\bar{\gamma}_{ij} && (198)\\
&= \bar{\gamma}^{ik}(\partial_\perp(\bar{\gamma}^{jl}\bar{\gamma}_{ij}) - \bar{\gamma}_{ij}\partial_\perp\bar{\gamma}^{jl}) && (199)\\
&= \bar{\gamma}^{ik}\partial_\perp(\delta^l{}_i) - \delta^k{}_j\partial_\perp\bar{\gamma}^{jl} && (200)\\
&= -\partial_\perp\bar{\gamma}^{kl} && (201)
\end{aligned}$$

[*10] β は第 0 成分がないので

$$\mathcal{L}_\beta\bar{\gamma}_{ij} = \beta^k\partial_k\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{ik}\partial_j\beta^k + \bar{\gamma}_{kj}\partial_i\beta^k \tag{192}$$

であるが、微分の足も作用しているものも n に直交しているので D による共変微分に書きなおすことができて (計算としては普通の Lie 微分を ∇ で書きなおした時と同様)

$$\beta^k D_k\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{ik}D_j\beta^k + \bar{\gamma}_{kj}D_i\beta^k \tag{193}$$

さらに、今は空間成分だけを考えるので接続係数の一致する $\tilde{D}$ で書き直すことができて

$$\beta^k\tilde{D}_k\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{ik}\tilde{D}_j\beta^k + \bar{\gamma}_{kj}\tilde{D}_i\beta^k \tag{194}$$

加えて、式 (151) を用いて $\bar{D}$ で書き直すことができる。

なので、

$$\partial_\perp \bar{\gamma}^{ij} = 2\alpha \bar{A}^{ij} + \frac{2}{3}\bar{D}_k\beta^k\bar{\gamma}^{ij} \tag{202}$$

である。この式は後で使う。

外的曲率の trace の時間発展は

$$\partial_\perp K = \partial_\perp(K_{ij}\gamma^{ij}) = K_{ij}\partial_\perp\gamma^{ij} + \gamma^{ij}\partial_\perp K_{ij} = 2\alpha K_{ij}K^{ij} + \gamma^{ij}\partial_\perp K_{ij} \tag{203}$$

なので[*11] 外的曲率の時間発展の式の γ^{ij} による trace を取ると

$$\text{L.H.S.} = \gamma^{ij}\partial_\perp K_{ij} = \partial_\perp K - 2\alpha K_{ij}K^{ij} \tag{207}$$

及び

$$\text{R.H.S.} = -D_iD^i\alpha + \alpha(Q + K^2 - 2K_{ij}K^{ij} + 4\pi(3(S-E) - 2S)) \tag{208}$$

から

$$\partial_\perp K = -D_iD^i\alpha + \alpha(Q + K^2 + 4\pi(S - 3E)) \tag{209}$$

となる。さらに Hamiltonian constraint $Q + K^2 = K_{ij}K^{ij} + 16\pi E$ から

$$\partial_\perp K = -D_iD^i\alpha + \alpha(4\pi(S+E) + K_{ij}K^{ij}) \tag{210}$$

を得る。これを更に共形版にすると、まず空間成分しか考えていないことから

$$\begin{aligned}
D_iD^i\alpha &= \tilde{D}_i\tilde{D}^i\alpha = \tilde{D}_i(\gamma^{ij}\tilde{D}_j\alpha) = \bar{D}_i(\gamma^{ij}\tilde{D}_j\alpha) + C^i{}_{ij}\gamma^{jk}\tilde{D}_k\alpha && (211)\\
&= \bar{D}_i(\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_j\alpha) + 6\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{\gamma}^{jk}\bar{D}_j\phi\bar{D}_k\alpha && (212)\\
&= -4\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{D}_i\phi\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_j\alpha + \mathrm{e}^{-4\phi}\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 6\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{\gamma}^{jk}\bar{D}_j\phi\bar{D}_k\alpha = \mathrm{e}^{-4\phi}\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 2\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{\gamma}^{jk}\bar{D}_j\phi\bar{D}_k\alpha && (213)
\end{aligned}$$

を得て、さらに traceless 性を用いて

$$K_{ij}K^{ij} = \left(A_{ij} + \frac{1}{3}K\gamma_{ij}\right)\left(A^{ij} + \frac{1}{3}K\gamma^{ij}\right) = A_{ij}A^{ij} + \frac{1}{3}K^2 = \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2 \tag{214}$$

を得る。K の式では $\bar{A}^{ij} = \mathrm{e}^{4\phi}A^{ij}$ を用いた。これらを組み合わせて、

$$\partial_\perp K = -\mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 2\bar{D}_i\phi\bar{D}^i\alpha) + \alpha\left[4\pi(E+S) + \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \frac{K^2}{3}\right] \tag{215}$$

を得る。

続けて traceless 部分の時間発展を求める。

$$\begin{aligned}
\partial_\perp K_{ij} &= \partial_\perp A_{ij} + \frac{1}{3}\partial_\perp K\gamma_{ij} + \frac{1}{3}K\partial_\perp\gamma_{ij} && (216)\\
&= \partial_\perp A_{ij} + \frac{1}{3}\partial_\perp K\gamma_{ij} - \frac{2}{3}\alpha KK_{ij} && (217)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\partial_\perp K = \partial_\perp(K_{ij}\gamma^{ij}) = K_{ij}\partial_\perp\gamma^{ij} + \gamma^{ij}\partial_\perp K_{ij} \tag{218}$$

---

*11

$$\gamma^{ik}\gamma^{jl}\partial_\perp\gamma_{ij} = \gamma^{ik}\partial_\perp(\gamma^{jl}\gamma_{ij}) - \gamma^{ik}\gamma_{ij}\partial_\perp\gamma^{jl} = -\partial_\perp\gamma^{kl} \tag{204}$$

及び

$$\gamma^{ik}\gamma^{jl}K_{ij} = K^{kl} \tag{205}$$

から

$$\partial_\perp\gamma^{ij} = 2\alpha K^{ij} \tag{206}$$

となる。

から

$$\partial_\perp A_{ij} = \partial_\perp K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\partial_\perp K + \frac{2}{3}\alpha K K_{ij} \tag{219}$$

である。この第二項には上で求めた $\partial_\perp K$ の式を、第一項には Einstein 方程式の空間射影を代入することで

$$\begin{aligned}\partial_\perp A_{ij} &= -D_iD_j\alpha + \alpha(Q_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j + 4\pi((S-E)\gamma_{ij} - 2S_{ij})) \\ &\quad -\frac{1}{3}\gamma_{ij}(-D_iD^i\alpha + \alpha(Q + K^2 + 4\pi(S-3E))) + \frac{2}{3}\alpha K K_{ij} \qquad (220) \\ &= -\left(D_iD_j\alpha - \frac{1}{3}\gamma_{ij}D_kD^k\alpha\right) + \alpha\left(Q_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}Q\right) + \alpha\left(\frac{5}{3}KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K^2\right) \\ &\quad -8\pi\alpha\left(S_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}S\right) \qquad (221)\end{aligned}$$

となる。このとき、第三項はさらに traceless 部分に分解することで

$$\begin{aligned}\frac{5}{3}KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K^2 &= \frac{5}{3}K\left(A_{ij} + \frac{1}{3}K\gamma_{ij}\right) - 2\left(A_{ik} + \frac{1}{3}K\gamma_{ik}\right)\left(A^k{}_j + \frac{1}{3}K\delta^k{}_j\right) - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K^2 \qquad (222) \\ &= \frac{5}{3}KA_{ij} + \frac{5}{9}K^2\gamma_{ij} - 2\left(A_{ik}A^k{}_j + \frac{1}{3}A_{ij}K + \frac{1}{3}KA_{ij} + \frac{1}{9}K^2\gamma_{ij}\right) - \frac{1}{3}K^2\gamma_{ij} \qquad (223) \\ &= \frac{1}{3}KA_{ij} - 2A_{ik}A^k{}_j \qquad (224)\end{aligned}$$

とできる。

以上の式をまとめると、

$$\partial_\perp A_{ij} = \frac{1}{3}\alpha K A_{ij} - 2\alpha A_{ik}A^k{}_j + (-D_iD_j\alpha + \alpha Q_{ij} - 8\pi\alpha S_{ij})^{\mathrm{TF}} \tag{225}$$

と書くことができる。ただし上付き添字 TF は traceless 部分 (trace free) であることを表し、なんらかの二階共変テンソル T_{ij} の TF 部分は $T_{ij} - \frac{1}{3}T\gamma_{ij}$ で表す。

さらにこれを conformally related metric による諸量で表す。左辺は

$$\partial_\perp A_{ij} = \partial_\perp(\mathrm{e}^{4\phi}\bar{A}_{ij}) = \mathrm{e}^{4\phi}\partial_\perp\bar{A}_{ij} + 4\mathrm{e}^{4\phi}\bar{A}_{ij}\partial_\perp\phi = \mathrm{e}^{4\phi}\partial_\perp\bar{A}_{ij} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{4\phi}\bar{A}_{ij}(\bar{D}_i\beta^i - \alpha K) \tag{226}$$

である。右辺は各項毎に、

$$\begin{aligned}D_iD_j\alpha &= \tilde{D}_i\tilde{D}_j\alpha = \tilde{D}_i\bar{D}_j\alpha \qquad (227) \\ &= \bar{D}_i\bar{D}_j\alpha - C^k{}_{ij}\bar{D}_k\alpha \qquad (228) \\ &= \bar{D}_i\bar{D}_j\alpha - 2(\bar{D}_j\phi\bar{D}_i\alpha + \bar{D}_i\phi\bar{D}_j\alpha - \bar{\gamma}_{ij}\bar{D}^k\phi\bar{D}_k\alpha) \qquad (229)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}-\left(D_iD_j\alpha - \frac{1}{3}\gamma_{ij}D_kD^k\alpha\right) &= -\bar{D}_i\bar{D}_j\alpha + 2(\bar{D}_j\phi\bar{D}_i\alpha + \bar{D}_i\phi\bar{D}_j\alpha - \bar{\gamma}_{ij}\bar{D}^k\phi\bar{D}_k\alpha) \\ &\quad +\frac{1}{3}\bar{\gamma}_{ij}(\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 2\bar{\gamma}^{jk}\bar{D}_j\phi\bar{D}_k\alpha) \qquad (230) \\ &= -(\bar{D}_i\bar{D}_j\alpha)^{\mathrm{TF}} + 2(\bar{D}_j\phi\bar{D}_i\alpha)^{\mathrm{TF}} + 2(\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\alpha)^{\mathrm{TF}} \qquad (231) \\ &= -(\bar{D}_i\bar{D}_j\alpha - 4\bar{D}_{(j}\phi\bar{D}_{i)}\alpha)^{\mathrm{TF}} \qquad (232)\end{aligned}$$

ここでの TF は $\bar{\gamma}^{ij}$ についての trace が 0 になるという意味である。以下でもこれは同様。さらに Ricci テンソル Q_{ij} は式 (183) により

$$\begin{aligned}Q_{ij} - \frac{1}{3}Q\gamma_{ij} &= \bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i\bar{D}_j\phi - 2\bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_k\bar{D}^k\phi + 4\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - 4\bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_k\bar{D}^k\phi - \frac{1}{3}\bar{\gamma}_{ij}(\bar{R} - 8(\bar{D}_k\bar{D}^k\phi + \bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi)) \qquad (233) \\ &= \bar{R}^{\mathrm{TF}}_{ij} - 2(\bar{D}_i\bar{D}_j\phi)^{\mathrm{TF}} + 4(\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi)^{\mathrm{TF}} \qquad (234)\end{aligned}$$

加えて、

$$S_{ij} - \frac{1}{3}S\gamma_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kl}\gamma^{kl}\gamma_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3}S_{kl}\bar{\gamma}^{kl}\bar{\gamma}_{ij} = S_{ij}^{\mathrm{TF}} \tag{235}$$

である。さらに、

$$A_{ik}A^k{}_j = \gamma^{kl}A_{ik}A_{lj} = \mathrm{e}^{-4\phi}\bar{\gamma}^{kl}\mathrm{e}^{4\phi}\bar{A}_{ik}\mathrm{e}^{4\phi}\bar{A}_{lj} = \mathrm{e}^{4\phi}\bar{A}_{ik}\bar{A}^k{}_j \tag{236}$$

である。

以上を総合することで、

$$\begin{aligned}\partial_\perp \bar{A}_{ij} = &-\frac{2}{3}\bar{D}_k\beta^k\bar{A}_{ij} + \alpha K\bar{A}_{ij} - 2\alpha\bar{A}_{ik}A^k{}_j \\ &+\mathrm{e}^{-4\phi}(-\bar{D}_i\bar{D}_j\alpha + 4\bar{D}_{(i}\alpha\bar{D}_{j)}\phi + \alpha(\bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i\bar{D}_j\phi + 4\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - 8\pi S_{ij}))^{\mathrm{TF}}\end{aligned} \tag{237}$$

となる。

Ricci テンソルの計算方法は後述することにして、今度は constraints の共形版を導く。Hamiltonian constraint は

$$\frac{2}{3}K^2 - \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} - 16\pi E + \mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{R} - 8\bar{D}_k\bar{D}^k\phi - 8\bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi) = 0 \tag{238}$$

であり、momentum constraint は

$$D_iK = \tilde{D}_iK = \bar{D}_iK \tag{239}$$

$$D_jK^j{}_i = \tilde{D}_jK^j{}_i = \tilde{D}_j\left(A^j{}_i + \frac{1}{3}K\delta^j{}_i\right) = \tilde{D}_jA^j{}_i + \frac{1}{3}\tilde{D}_iK \tag{240}$$

さらに

$$\begin{aligned}\tilde{D}_jA^j{}_i &= \bar{D}_j\bar{A}^j{}_i + C^j{}_{jl}\bar{A}^l{}_i - C^l{}_{ji}\bar{A}^j{}_l &(241)\\ &= \bar{D}_j\bar{A}^j{}_i + 6\bar{A}^l{}_i\bar{D}_l\phi - 2\bar{A}^j{}_l\delta^l{}_j\bar{D}_i\phi - 2\bar{A}^j{}_i\bar{D}_j\phi + 2\bar{A}_{ij}\bar{D}^j\phi &(242)\\ &= \bar{D}_j\bar{A}^j{}_i + 6\bar{A}^j{}_i\bar{D}_j\phi &(243)\end{aligned}$$

を用いて、

$$\frac{2}{3}\bar{D}_iK - \bar{\gamma}_{ik}\bar{D}_j\bar{A}^{jk} - 6\bar{\gamma}_{ik}\bar{A}^{jk}\bar{D}_j\phi + 8\pi S_i = 0 \tag{244}$$

となる。

1.4 BSSN 形式

BSSN 形式の最後のピースとして、Ricci テンソルの表式を求める。$Q_{ij} = {}^3R_{ij}$ と $\bar{R}_{ij}$ を結びつけた時のように、$\bar{R}_{ij}$ と平坦空間の Ricci テンソル $\hat{R}_{ij}(=0)$ を結びつける。平坦空間の Christoffel 記号 $\hat{\Gamma}^i{}_{jk}$ を用いて $\Delta\Gamma^i{}_{jk} = \bar{\Gamma}^i{}_{jk} - \hat{\Gamma}^i{}_{jk}$ を定義すると、

$$0 = \bar{D}_k\bar{\gamma}_{ij} = \hat{D}_k\bar{\gamma}_{ij} - \Delta\Gamma^l{}_{ki}\bar{\gamma}_{lj} - \Delta\Gamma^l{}_{kj}\bar{\gamma}_{li} \tag{245}$$

に、添字を ijk にしたものを足して jki にしたものを引くと

$$\Delta\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{il}(\hat{D}_j\bar{\gamma}_{lk} + \hat{D}_k\bar{\gamma}_{jl} - \hat{D}_l\bar{\gamma}_{jk}) \tag{246}$$

と書ける。$\bar{D}_i$ についての Ricci テンソルは Christroffel 記号 $\bar{\Gamma}^i{}_{jk}$ で書くと

$$\bar{R}_{ij} = \partial_k\bar{\Gamma}^k{}_{ij} - \partial_i\bar{\Gamma}^k{}_{kj} + \bar{\Gamma}^l{}_{lk}\bar{\Gamma}^k{}_{ij} - \bar{\Gamma}^k{}_{li}\bar{\Gamma}^l{}_{kj} \tag{247}$$

である。ここから、

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{ij} &= \partial_k(\hat{\Gamma}^k{}_{ij} + \Delta\Gamma^k{}_{ij}) - \partial_i(\hat{\Gamma}^k{}_{kj} + \Delta\Gamma^k{}_{kj}) \\
&\quad +(\hat{\Gamma}^l{}_{lk} + \Delta\Gamma^l{}_{lk})(\hat{\Gamma}^k{}_{ij} + \Delta\Gamma^k{}_{ij}) - (\hat{\Gamma}^k{}_{li} + \Delta\Gamma^k{}_{li})(\hat{\Gamma}^l{}_{kj} + \Delta\Gamma^l{}_{kj}) &(248)\\
&= \partial_k\hat{\Gamma}^k{}_{ij} - \partial_i\hat{\Gamma}^k{}_{kj} + \hat{\Gamma}^l{}_{lk}\hat{\Gamma}^k{}_{ij} - \hat{\Gamma}^k{}_{li}\hat{\Gamma}^l{}_{kj} \\
&\quad +\partial_k\Delta\Gamma^k{}_{ij} + \hat{\Gamma}^l{}_{lk}\Delta\Gamma^k{}_{ij} - \hat{\Gamma}^k{}_{li}\Delta\Gamma^l{}_{kj} \\
&\quad -\partial_i\Delta\Gamma^k{}_{kj} + \hat{\Gamma}^k{}_{ij}\Delta\Gamma^l{}_{lk} - \hat{\Gamma}^l{}_{kj}\Delta\Gamma^k{}_{li} \\
&\quad +\Delta\Gamma^l{}_{lk}\Delta\Gamma^k{}_{ij} - \Delta\Gamma^k{}_{li}\Delta\Gamma^l{}_{kj} &(249)\\
&= \hat{R}_{ij} \\
&\quad +\partial_k\Delta\Gamma^k{}_{ij} + \hat{\Gamma}^l{}_{lk}\Delta\Gamma^k{}_{ij} - \hat{\Gamma}^k{}_{li}\Delta\Gamma^l{}_{kj} - \hat{\Gamma}^l{}_{ki}\Delta\Gamma^k{}_{lj} \\
&\quad -\partial_i\Delta\Gamma^k{}_{kj} - \hat{\Gamma}^l{}_{kj}\Delta\Gamma^k{}_{li} + \hat{\Gamma}^k{}_{ij}\Delta\Gamma^l{}_{lk} + \hat{\Gamma}^l{}_{ki}\Delta\Gamma^k{}_{lj} \\
&\quad +\Delta\Gamma^l{}_{lk}\Delta\Gamma^k{}_{ij} - \Delta\Gamma^k{}_{li}\Delta\Gamma^l{}_{kj} &(250)
\end{aligned}
$$

最後の表式に移るときには足すと 0 になる自明な項を挿入した。また、最後の表式は二行目と三行目が $\hat{D}_i$ による共変微分になっているので

$$\bar{R}_{ij} = \hat{D}_l\Delta\Gamma^l{}_{ij} - \hat{D}_i\Delta\Gamma^k{}_{kj} - \Delta\Gamma^k{}_{li}\Delta\Gamma^l{}_{kj} + \Delta\Gamma^l{}_{lk}\Delta\Gamma^k{}_{ij} \tag{251}$$

となる。$\Delta\Gamma_{ijk} = \bar{\gamma}_{il}\Delta\Gamma^l{}_{jk}$ とすると

$$\Delta\Gamma_{ijk} = \Delta\Gamma_{ikj} \tag{252}$$

と

$$\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jk} = \Delta\Gamma_{jki} + \Delta\Gamma_{kji} \tag{253}$$

が成り立つ。よって、第一項は

$$
\begin{aligned}
\hat{D}_k\Delta\Gamma^k{}_{ij} &= \frac{1}{2}\hat{D}_k(\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \hat{D}_j\bar{\gamma}_{il} - \hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij})) &(254)\\
&= \hat{D}_k\bar{\gamma}^{kl}\Delta\Gamma_{lij} + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \hat{D}_k\hat{D}_j\bar{\gamma}_{il} - \hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij}) &(255)
\end{aligned}
$$

ここで、$0 = \hat{D}_k(\delta^i{}_j) = \hat{D}_k(\bar{\gamma}^{il}\bar{\gamma}_{lj}) = \bar{\gamma}^{il}\hat{D}_k\bar{\gamma}_{il} + \bar{\gamma}_{il}\hat{D}_k\bar{\gamma}^{il}$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\hat{D}_k\bar{\gamma}^{ij} &= -\bar{\gamma}^{il}\bar{\gamma}^{jm}\hat{D}_k\bar{\gamma}_{lm} &(256)\\
&= -\bar{\gamma}^{il}\bar{\gamma}^{jm}(\Delta\Gamma_{lmk} + \Delta\Gamma_{mlk}) &(257)\\
&= -\bar{\gamma}^{jm}\Delta\Gamma^i{}_{mk} - \bar{\gamma}^{il}\Delta\Gamma^j{}_{lk} &(258)
\end{aligned}
$$

となるので、[*12]

$$\hat{D}_k\Delta\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \hat{D}_k\hat{D}_j\bar{\gamma}_{il} - \hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij}) - \bar{\gamma}^{kl}\Delta\Gamma^m{}_{kl}\Delta\Gamma_{mij} - \Delta\Gamma^l{}_{ij}\Delta\Gamma^k{}_{kl} \tag{259}$$

となる。第二項は

$$
\begin{aligned}
\hat{D}_j\Delta\Gamma^k{}_{ki} &= \frac{1}{2}\hat{D}_i\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_j\bar{\gamma}_{kl} + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_j\hat{D}_i\bar{\gamma}_{kl} &(260)\\
&= -\frac{1}{2}(\bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{mi} + \bar{\gamma}^{lm}\Delta\Gamma^k{}_{mi})(\Delta\Gamma_{klj} + \Delta\Gamma_{lkj}) + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_j\hat{D}_i\bar{\gamma}_{kl} &(261)\\
&= \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_j\hat{D}_i\bar{\gamma}_{kl} - \Delta\Gamma^k{}_{lj}\Delta\Gamma^l{}_{ki} - \bar{\gamma}^{kl}\Delta\Gamma^m{}_{lj}\Delta\Gamma_{mki} &(262)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$\bar{R}_{ij} = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \hat{D}_k\hat{D}_j\bar{\gamma}_{il} - \hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij} - \hat{D}_i\hat{D}_j\bar{\gamma}_{kl}) + \bar{\gamma}^{kl}(\Delta\Gamma^m{}_{lj}\Delta\Gamma_{mki} - \Delta\Gamma^m{}_{kl}\Delta\Gamma_{mij}) \tag{263}$$

[*12] $\hat{D}_k\bar{\gamma}^{kl} = -\bar{\gamma}^{lm}\Delta\Gamma^k{}_{mk} - \bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{mk}$

となる。このままでは二階微分に非 Laplace 的な項が含まれてしまい、波動方程式のような解きやすい時間発展方程式に書くことができない。そこで、非 Laplace 的な項を新しい変数の一階微分の項として表し、方程式を波動方程式に似た形に変形する。これが BSSN 形式である。

具体的には、第一、第二、第四項の二階微分を接続ベクトル $\Delta\Gamma^k := \bar{\gamma}^{ij}\Delta\Gamma^k{}_{ij}$ で書き直す。$0 = \hat{D}_i(\delta^j{}_k) = \hat{D}_i(\bar{\gamma}^{jl}\bar{\gamma}_{lk}) = (\hat{D}_i\bar{\gamma}^{jl})\bar{\gamma}_{lk} + \bar{\gamma}^{jl}\hat{D}_i\bar{\gamma}_{lk}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\Delta\Gamma^k &:= \bar{\gamma}^{ij}\Delta\Gamma^k{}_{ij} && (264)\\
&= \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{ij}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_i\bar{\gamma}_{lj} + \hat{D}_j\bar{\gamma}_{il} - \hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij}) && (265)\\
&= -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{ij}\bar{\gamma}_{lj}\hat{D}_i\bar{\gamma}^{kl} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{ij}\gamma_{li}\hat{D}_j\bar{\gamma}^{kl} - \bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_l\ln\sqrt{\bar{\gamma}} && (266)\\
&= -\hat{D}_l\bar{\gamma}^{kl} - \bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_l\ln\sqrt{\bar{\gamma}} && (267)
\end{aligned}
$$

を得る。これを利用すれば第一項は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} &= \frac{1}{2}\hat{D}_k(\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl}) - \frac{1}{2}\hat{D}_k\bar{\gamma}^{lk}\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} && (268)\\
&= -\frac{1}{2}\hat{D}_k(\bar{\gamma}_{jl}\hat{D}_i\hat{\gamma}^{kl}) + \frac{1}{2}\Delta\Gamma^k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_k\ln\sqrt{\bar{\gamma}})\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} && (269)\\
&= -\frac{1}{2}\hat{D}_k\bar{\gamma}_{jl}\hat{D}_i\bar{\gamma}^{kl} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{jl}\hat{D}_i\hat{D}_k\bar{\gamma}^{kl} + \frac{1}{2}\Delta\Gamma^k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_k\ln\sqrt{\bar{\gamma}})\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} && (270)\\
&= \frac{1}{2}(\Delta\Gamma_{jlk} + \Delta\Gamma_{ljk})(\bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{im} + \bar{\gamma}^{lm}\Delta\Gamma^k{}_{im}) + \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{jl}\hat{D}_i(\Delta\Gamma^l + \bar{\gamma}^{lm}\hat{D}_m\ln\sqrt{\bar{\gamma}})\\
&\quad + \frac{1}{2}\Delta\Gamma^k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_k\ln\sqrt{\bar{\gamma}})\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} && (271)\\
&= \bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{mi}\Delta\Gamma_{jlk} + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{mi}\Delta\Gamma_{lkj} + \frac{1}{2}\Delta\Gamma^l{}_{mi}\Delta\Gamma^m{}_{lj}\\
&\quad \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{lj}\hat{D}_i\Delta\Gamma^l + \frac{1}{2}\hat{D}_i\hat{D}_j\ln\sqrt{\bar{\gamma}} + \frac{1}{2}\Delta\Gamma^l\Delta\Gamma_{jil} + \frac{1}{2}\Delta\Gamma^l\Delta\Gamma_{lij} && (272)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、途中で $\hat{D}_i$ が平坦計量に関する共変微分のため、交換することを用いた。第二項はこれで $i \leftrightarrow j$ としたものになり、第四項は

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_i\hat{D}_j\bar{\gamma}_{kl} &= -\frac{1}{2}\hat{D}_i(\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_j\bar{\gamma}_{kl}) + \frac{1}{2}\hat{D}_i\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_j\bar{\gamma}_{kl} && (273)\\
&= -\hat{D}_i\hat{D}_j\ln\sqrt{\bar{\gamma}} - \frac{1}{2}(\bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{im} + \bar{\gamma}^{lm}\Delta\Gamma^k{}_{im})(\Delta\Gamma_{klj} + \Delta\Gamma_{lkj}) && (274)\\
&= -\hat{D}_i\hat{D}_j\ln\sqrt{\bar{\gamma}} - \Delta\Gamma^l{}_{mi}\Delta\Gamma^m{}_{li} - \bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{mi}\Delta\Gamma_{lkj} && (275)
\end{aligned}
$$

以上を足すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_j\bar{\gamma}_{il} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_i\hat{D}_j\bar{\gamma}_{kl} &= \bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{m(i}\Delta\Gamma_{j)lk} + \bar{\gamma}_{l(i}\hat{D}_{i)}\Delta\Gamma^l + \hat{D}_i\hat{D}_j\ln\sqrt{\bar{\gamma}}\\
&\quad + \Delta\Gamma^l\Delta\Gamma_{(ij)l} + \bar{\gamma}^{km}\Delta\Gamma^l{}_{km}\Delta\Gamma_{lij} && (276)
\end{aligned}
$$

を得る。「いま、新しい変数 $\bar{\Lambda}^k$ を導入し、これは constraint $\bar{\Lambda}^k - \Delta\Gamma^k = 0$ を満たすものとする。」すると、これを Ricci テンソルの式に代入すれば

$$
\bar{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{k(i}\hat{D}_{j)}\bar{\Lambda}^k + \Delta\Gamma^k\Delta\Gamma_{(ij)k} + \bar{\gamma}^{kl}(2\Delta\Gamma^m{}_{k(i}\Delta\Gamma_{j)ml} + \Delta\Gamma^m{}_{ik}\Delta\Gamma_{mjl}) \qquad (277)
$$

を得ることができる。これを $\bar{A}_{ij}$ の方程式に代入すれば発展を記述できるようになるが、そのためにはさらに $\bar{\Lambda}^k$ の発展方程式が必要になる。

ここで、$\bar{\gamma} = \hat{\gamma}$ を用いれば

$$\bar{\Lambda}^k = -\hat{D}_l \bar{\gamma}^{kl} - \bar{\gamma}^{kl} \hat{D}_l \ln \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{278}$$
$$= -\hat{D}_l \bar{\gamma}^{kl} - \bar{\gamma}^{kl} \hat{D}_l \ln \sqrt{\hat{\gamma}} \tag{279}$$
$$(= -\hat{D}_l \bar{\gamma}^{kl} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}^{kl} \hat{\gamma}^{ij} \hat{D}_l \hat{\gamma}_{ij}) \tag{280}$$
$$= -\hat{D}_l \bar{\gamma}^{kl} \tag{281}$$

である。そこで、式 (202) を $\hat{D}_j$ によって divergence を取ると、

$$\partial_\perp \bar{\gamma}^{ij} = \partial_t \bar{\gamma}^{ij} - \beta^k \hat{D}_k \bar{\gamma}^{ij} + \bar{\gamma}^{kj} \hat{D}_k \beta^i + \bar{\gamma}^{ik} \hat{D}_k \beta^j \tag{282}$$

であるから、

$$\hat{D}_j \partial_t \bar{\gamma}^{ij} = \partial_t \hat{D}_j \gamma^{ij} = -\partial_t \bar{\Lambda}^i \tag{283}$$
$$\begin{aligned} &= (\hat{D}_j \beta^k) \hat{D}_k \bar{\gamma}^{ij} + \beta^k \hat{D}_k \hat{D}_j \bar{\gamma}^{ij} - (\hat{D}_j \bar{\gamma}^{kj}) \hat{D}_k \beta^i - \bar{\gamma}^{kj} \hat{D}_j \hat{D}_k \beta^i - (\hat{D}_j \bar{\gamma}^{ik}) \hat{D}_k \beta^j \\ &\quad - \bar{\gamma}^{ik} \hat{D}_k \hat{D}_j \beta^j + 2(\hat{D}_j \alpha) \bar{A}^{ij} + 2\alpha \hat{D}_j \bar{A}^{ij} + \frac{2}{3} (\hat{D}_j \hat{D}_k \beta^k) \bar{\gamma}^{ij} + \frac{2}{3} \hat{D}_k \beta^k \hat{D}_j \bar{\gamma}^{ij} \end{aligned} \tag{284}$$
$$\begin{aligned} &= 2\bar{A}^{ij} \hat{D}_j \alpha + 2\alpha \hat{D}_j \bar{A}^{ij} + \bar{\Lambda}^k \hat{D}_k \beta^i - \beta^k \hat{D}_k \bar{\Lambda}^i - \bar{\gamma}^{kj} \hat{D}_j \hat{D}_k \beta^i \\ &\quad - \frac{1}{3} \bar{\gamma}^{ik} \hat{D}_k \hat{D}_j \beta^j - \frac{2}{3} \hat{D}_k \beta^k \bar{\Lambda}^i \end{aligned} \tag{285}$$

となり、

$$\frac{\partial \bar{\Lambda}^i}{\partial t} = -2\alpha \hat{D}_j \bar{A}^{ij} - 2\bar{A}^{ij} \hat{D}_j \alpha + \beta^k \hat{D}_k \bar{\Lambda}^i - \bar{\Lambda}^k \hat{D}_k \beta^i + \frac{2}{3} \bar{\Lambda}^i \hat{D}_k \beta^k + \bar{\gamma}^{jk} \hat{D}_j \hat{D}_k \beta^i + \frac{1}{3} \bar{\gamma}^{ij} \hat{D}_j \hat{D}_k \beta^k \tag{286}$$

を得る。$\beta^k \hat{D}_k \bar{\Lambda}^i - \bar{\Lambda}^k \hat{D}_k \beta^i = \mathcal{L}_\beta \bar{\Lambda}^i$ であること、$\det(\bar{\gamma}_{ij}) = \hat{\gamma}$ であることから $\hat{D}_k \beta^k = \partial_k \beta^k + \hat{\Gamma}^k{}_{kj} \beta^j = \partial_k \beta^k + \frac{1}{2} \partial_j \ln \hat{\gamma} \beta^j = \partial_k \beta^k + \frac{1}{2} \partial_j \ln \det(\bar{\gamma}_{kl}) \beta^j = \partial_k \beta^k + \bar{\Gamma}^k{}_{kj} \beta^j = \bar{D}_k \beta^k$、スカラー量への作用は $\hat{D}_j$ も $\bar{D}_j$ も ∂_j を与えること、それに

$$\bar{D}_j \bar{A}^{ij} = \hat{D}_j \bar{A}^{ij} + \Delta\Gamma^i{}_{jk} \bar{A}^{kj} + (\bar{\Gamma}^j{}_{jk} - \hat{\Gamma}^j{}_{jk}) \bar{A}^{ik} = \hat{D}_j \bar{A}^{ij} + \Delta\Gamma^i{}_{jk} \bar{A}^{kj} \tag{287}$$

かつ momentum constraint

$$\bar{D}_j \bar{A}^{ij} = \frac{2}{3} \bar{\gamma}^{ki} \bar{D}_k K - 6\bar{A}^{ji} \bar{D}_j \phi + 8\pi \bar{\gamma}^{ik} S_k \tag{288}$$

を用いて

$$\partial_\perp \bar{\Lambda}^i = \bar{\gamma}^{jk} \hat{D}_j \hat{D}_k \beta^i + \frac{2}{3} \Delta\Gamma^i \bar{D}_j \beta^j + \frac{1}{3} \bar{\gamma}^{ik} \bar{D}_k \bar{D}_j \beta^j - 2\bar{A}^{jk} (\delta^i{}_j \partial_k \alpha - 6\alpha \delta^i{}_j \partial_k \phi - \alpha \Delta\Gamma^i{}_{jk}) - \frac{4}{3} \alpha \bar{\gamma}^{ij} \partial_j K - 16\pi\alpha \bar{\gamma}^{ij} S_j \tag{289}$$

を得る。

以上が最初にまとめた通りの BSSN 形式である。

1.5 初期条件の生成法

ここでは初期条件の生成法を述べる。もともとの $3+1$ 分解の解くべき変数 γ_{ij} と K_{ij} はどちらも対称テンソルのため自由度は $6+6=12$ のようであるが、Hamiltonian 1 本と momentum 3 本の constraint によって実質的な自由度は 8 になっている。そのため、初期条件として γ_{ij} と K_{ij} の全てを自由に決めることはできない。以下で考える初期条件生成法は、自由に決めていい初期条件 8 個と constraint で決まる 4 個の条件をどう分けるかということを議論する。

- Conformal transvers-traceless method

ここでは、traceless extrinsic curvature A_{ij} の共形版を、

$$\tilde{A}_{ij} = \mathrm{e}^{10\phi} A_{ij} = \mathrm{e}^{6\phi} \bar{A}_{ij} \tag{290}$$

で定義する。この $\tilde{A}_{ij}$ を $\bar{\gamma}^{ij}$ で反変テンソルにし、transverse 成分と longitudinal 成分に分ける：

$$\tilde{A}^{ij} = (\bar{L}X)^{ij} + \tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}} \tag{291}$$

ただし、$\tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}}$ は transverse 成分で、traceless 条件

$$\bar{\gamma}_{ij} \tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}} = 0 \tag{292}$$

と transverse 条件

$$\bar{D}_j \tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}} = 0 \tag{293}$$

を満たすものとする。さらに、$\bar{L}X$ は longitudinal 成分で、共形 Killing 作用素 $\bar{L}$ をある三次元ベクトル X に作用させた

$$(\bar{L}X)^{ij} := \bar{D}^i X^j + \bar{D}^j X^i - \frac{2}{3} \bar{D}_k X^k \bar{\gamma}^{ij} \tag{294}$$

と定義される。これは $\bar{\gamma}_{ij}(\bar{L}X)^{ij} = 0$ である。$\tilde{A}^{ij}$ の divergence を取ると

$$\begin{aligned}
\bar{D}_j \tilde{A}^{ij} = \bar{D}_j (\bar{L}X)^{ij} &= \bar{D}_j \bar{D}^j X^i + \bar{D}_j \bar{D}^i X^j - \frac{2}{3} \bar{D}^i \bar{D}_k X^k && (295)\\
&= \bar{D}_j \bar{D}^j X^i + \bar{D}^i \bar{D}_j X^j + \bar{R}^i{}_j X^j - \frac{2}{3} \bar{D}^i \bar{D}_k X^k && (296)\\
&= \bar{D}_j \bar{D}^j X^i + \frac{1}{3} \bar{D}^i \bar{D}_j X^j + \bar{R}^i{}_j X^j && (297)
\end{aligned}$$

となる。ただし、$\bar{D}_i \bar{D}_j X^k - \bar{D}_j \bar{D}_i X^k = R^k{}_{lij} X^l$ から $\bar{D}_j \bar{D}^i X^j - \bar{D}^i \bar{D}_j X^j = \bar{R}^i{}_j X^j$ を用いた。この最後の表式は共形ベクトル Laplacian $\bar{\Delta}_{\mathrm{L}} X^i$ と呼ぶ。

Hamiltonian constraint を $\tilde{A}$ を用いて書き直すと、

$$\mathrm{e}^{\phi} \bar{D}_k \bar{D}^k \phi + \mathrm{e}^{\phi} \bar{D}_k \phi \bar{D}^k \phi - \frac{1}{8} \bar{R} \mathrm{e}^{\phi} + \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} \mathrm{e}^{-7\phi} - \frac{1}{12} K^2 \mathrm{e}^{5\phi} + 2\pi E \mathrm{e}^{5\phi} = 0 \tag{298}$$

となる。また、momentum constraint は

$$\frac{2}{3} \mathrm{e}^{6\phi} \bar{D}_i K - \bar{\gamma}_{ik} \bar{D}_j \tilde{A}^{jk} + 8\pi \mathrm{e}^{6\phi} S_i = 0 \tag{299}$$

で $\bar{D}_j \tilde{A}^{jk}$ を書きなおして

$$\bar{\Delta}_{\mathrm{L}} X^i - \frac{2}{3} \mathrm{e}^{6\phi} \bar{D}^i K = 8\pi \mathrm{e}^{6\phi} \bar{\gamma}^{ik} S_k \tag{300}$$

となる。これらは ϕ および X^i の方程式と見なすことができて、$\bar{\gamma}_{ij}$、$\tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}}$、$K$、および物質場の量を自由に与え、constraints から ϕ と X^i を求めることで二つの constraint を満たす初期条件を構成することができる。この方法を conformal transverse-traceless method と呼ぶ。[*13]

- Conformal thin-sandwich method

[*13] 変数 (自由度) と表すと、3 + 1 分解では式は $\gamma_{ij}(6)$ と $K_{ij}(6)$ に関する発展方程式が計 12 個。これを $\phi(1)$、$\bar{\gamma}_{ij}(5)$、$K(1)$、$\tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}}(2)$、$X^i(3)$ の 12 の変数に分割し、ϕ と X^i を Hamiltonian constraint と momentum constraint から決める。残りの 8 個の変数 $\bar{\gamma}_{ij}(5)$、$K(1)$、$\tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}}(2)$ のうち、α と β^i を勝手に決めて良いというところから自由度を 4 個減らせる。例えば、β^i の 3 つの自由度を利用して $\partial_\perp \bar{\gamma}_{ij} = -2\alpha \bar{A}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{D}_k \beta^k \bar{\gamma}_{ij}$ から $\bar{\gamma}_{ij}$ の三つの非対角成分を、α の 1 つの自由度を利用して $\partial_\perp K = -D_i D^i \alpha + \alpha({}^3R + K^2 + 4\pi(S - 3E))$ から K を、それぞれ常に一定であるように設定できる。これは実質、超曲面の形 (α) と座標の張り方 (β^i) を決めたことに対応する。こうすると、残った自由度は $\bar{\gamma}_{ij}$ に 2 個と $\bar{A}_{ij}$ に 2 個の計 4 個となる。ただし、ゲージの自由度を $\bar{\gamma}_{ij}$ や K の自由度を減らすのではなく、座標特異点を消したりするのに使うようにすると、その分解くべき方程式は増えて 8 個とかになる。

Conformal transverse-traceless method では γ と K の初期値を与えたが、ここでは γ と $\partial_t\gamma$ の初期値を与えるような初期条件構成法を考える。

$$\partial_\perp \bar{\gamma}^{ij} = 2\alpha \bar{A}^{ij} + \frac{2}{3}\bar{D}_k\beta^k\bar{\gamma}^{ij} \tag{301}$$

であるが、

$$\mathcal{L}_\beta\bar{\gamma}^{ij} = \beta^k\bar{D}_k\bar{\gamma}^{ij} - \bar{\gamma}^{ik}\bar{D}_k\beta^j - \bar{\gamma}^{kj}\bar{D}_k\beta^i = -\bar{\gamma}^{ik}\bar{D}_k\beta^j - \bar{\gamma}^{kj}\bar{D}_k\beta^i = -(\bar{L}\beta)^{ij} - \frac{2}{3}\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_k\beta^k \tag{302}$$

から、

$$\bar{A}^{ij} = \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_t\bar{\gamma}^{ij} + (\bar{L}\beta)^{ij}\right) \tag{303}$$

であり、$\bar{A}^{ij} = \mathrm{e}^{-6\phi}\tilde{A}^{ij}$ であるから、conformal lapse $\tilde{\alpha} := \mathrm{e}^{-6\phi}\alpha$ を用いると

$$\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}}\left(\partial_t\bar{\gamma}^{ij} + (\bar{L}\beta)^{ij}\right) \tag{304}$$

となる。これを momentum constraint

$$\frac{2}{3}\mathrm{e}^{6\phi}\bar{D}_iK - \bar{\gamma}_{ik}\bar{D}_j\tilde{A}^{jk} + 8\pi\mathrm{e}^{6\phi}S_i = 0 \tag{305}$$

に入れると

$$\frac{4}{3}\mathrm{e}^{6\phi}\bar{D}_iK - \bar{\gamma}_{ik}\bar{D}_j\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}}\partial_t\bar{\gamma}^{ij}\right) + \bar{\gamma}_{ik}\bar{D}_j\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}}(\bar{L}\beta)^{ij}\right) + 16\pi\mathrm{e}^{6\phi}S_i = 0 \tag{306}$$

となる。つまり

$$\bar{D}_j\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}}(\bar{L}\beta)^{ij}\right) + \bar{D}_j\left(\frac{1}{\tilde{\alpha}}\partial_t\bar{\gamma}^{ij}\right) - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{6\phi}\bar{D}^iK - 16\pi\mathrm{e}^{6\phi}\bar{\gamma}^{ij}S_j = 0 \tag{307}$$

という表式を得る。ここから、$\partial_t\bar{\gamma}^{ij}$、$K$、$S_j$、そして ϕ を与えれば shift vector β が求まり、外的曲率を決定できる。ϕ は Hamiltonian constraint から conformal transverse-traceless method と同様に求める。以上のようにして $\bar{\gamma}_{ij}$、$\partial_t\bar{\gamma}^{ij}$、$K$、$\tilde{\alpha}$ と E、S_i を自由に決めて、ϕ と β^i を constraint から求める手法のことを conformal thin-sandwich method と呼ぶ。

ここで、(conformal) lapse を自由に決めるとしたが、どう決めればいいかという問題は簡単ではない。そこで、代わりに ∂_tK を決めて、$\tilde{\alpha}$ はそこから導くという手法が提案されている。恒等式

$$\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 2\bar{D}_i\phi\bar{D}^i\alpha = \mathrm{e}^{-\phi}(\bar{D}_i\bar{D}^i(\alpha\mathrm{e}^{\phi}) - \alpha\bar{D}_i\bar{D}^i\mathrm{e}^{\phi}) \tag{308}$$

を用いると、$\partial_\perp K$ の式は

$$\partial_\perp K = -\mathrm{e}^{-5\phi}(\bar{D}_i\bar{D}^i(\alpha\mathrm{e}^{\phi}) - \alpha\bar{D}_i\bar{D}^i\mathrm{e}^{\phi}) + \alpha\left[4\pi(E+S) + \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \frac{K^2}{3}\right] \tag{309}$$

となる。ここにさらに $\alpha\mathrm{e}^{\phi} = \tilde{\alpha}\mathrm{e}^{7\phi}$ と Hamiltonian constraint を用いて

$$\bar{D}_i\bar{D}^i(\tilde{\alpha}\mathrm{e}^{7\phi}) - (\tilde{\alpha}\mathrm{e}^{7\phi})\left(\frac{1}{8}\bar{R} + \frac{5}{12}K^2\mathrm{e}^{4\phi} + \frac{7}{8}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij}\mathrm{e}^{-8\phi} + 2\pi(E+2S)\mathrm{e}^{4\phi}\right) + (\partial_tK - \beta^i\bar{D}_iK)\mathrm{e}^{5\phi} = 0 \tag{310}$$

を得る。ここでは、$\bar{\gamma}_{ij}$、$\partial_t\bar{\gamma}^{ij}$、$K$、$\partial_tK$ と物質場に伴う量 E、S、S_i を与えて ϕ、$\tilde{\alpha}$、β を求めており、この手法を extended conformal thin-sandwich method と呼ぶ。

1.6 ゲージの定め方

以上までで BSSN 形式と初期条件の求め方を議論したが、ゲージの自由度の定め方はまだ議論していない。Lapse と shift は自分で好きなように定めてよいので、ある特定のゲージを定めることで、そのゲージ条件を満たすように Lapse と shift の時間発展を定めることにする。ここでは、超曲面の張り方に伴うゲージ条件 (geodesic slicing、maximal slicing、harmonic slicing、$1+\log$ slicing) をまず議論し、続けて座標の張り方に伴うゲージ条件 (normal coordinates、minimal distortion、Gamma freezing、Gamma driver) を議論する。

- geodesic slicing

最も簡単な α の選び方は、

$$\alpha = 1 \tag{311}$$

とする geodesic slicing である。ただし、これは座標特異点を形成してしまうためあまり使われない。$\alpha = 1$、$\beta^i = 0$ とすると、

$$\partial_t K = 4\pi(E + S) + K_{ij}K^{ij} \geq 0 \tag{312}$$

となり、K は単調増大となる。

$$K = -\gamma^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu - n^\mu n^\nu \nabla_\mu n_\nu = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu = -\nabla_\mu n^\mu \tag{313}$$

より K が大きいと n はどんどん集中していくことになる。*14特に $\beta = 0$ とした場合、n の方向は ∂_t の方向に一致するため、いずれ時間座標軸が一点に集中して特異点を形成してしまう。

- maximal slicing

maximal slicing というのは、

$$K = 0 \tag{323}$$

と定めるゲージ条件である。これはゲージの自由度で変数を消せる一例である。これは Lapse に直すと、$\partial_\perp K = 0$ でもあるので、K の発展方程式から

$$D_i D^i \alpha = \alpha \left[4\pi(E + S) + K_{ij}K^{ij}\right] \tag{324}$$

---

*14 ここで、測地線の「束」を考え、その接ベクトル u^μ の四次元 divergence の意味を考える。今は測地線の affine parameter を適当に定めることで timelike unit vector になるようにしておく。また、測地線の束として時空の全ての点を通るように束を集めておくと、u^μ はベクトル場をなす。いま、時空の各点における「時間」座標を、その点を通る測地線のその点における affine parameter とし、同じ時間座標を持つ点を集めて三次元超曲面を張る。各超曲面において、同じ測地線に乗る点同士は同じ空間座標を持つものとする。また、affine parameter には原点の取り方の自由度があるが、u^μ が超曲面の normal vector になるように各測地線の affine parameter の原点を定める。これは少なくとも一つの超曲面をそうなるように定めれば、他の時刻の超曲面でもそうなるように定まる。まずこれを示す。いま、近傍にある異なる二本の測地線を選び、等しい affine parameter を持つ点同士をつなぐことで deviation vector ξ^μ を作る。deviation vector はその構成から $\mathcal{L}_u \xi = 0$ である。なんとなれば、u は unit vector のため、時刻 $t + \Delta t$ での ξ の始点と終点はそれぞれ時刻 t での ξ の始点と終点を $\Delta t u$ だけ動かしたものになっているからである。この Lie 微分の関係から、$u^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = \xi^\mu \nabla_\mu u^\nu$ という関係を得る。これを用いて、時刻 $t + \Delta t$ における u と ξ の内積を評価すると

$$\begin{aligned} u \cdot \xi(t + \Delta t) &= u \cdot \xi(t) + \Delta t \partial_t (u \cdot \xi) && (314) \\ &= u \cdot \xi(t) + \Delta t u^\mu \nabla_\mu (u \cdot \xi) && (315) \\ &= u \cdot \xi(t) + \Delta t u_\nu u^\mu \nabla_\mu \xi^\nu && (316) \\ &= u \cdot \xi(t) + \Delta t u_\nu \xi^\mu \nabla_\mu u^\nu && (317) \\ &= u \cdot \xi(t) && (318) \end{aligned}$$

となる。ただし unit vector であることから $u_\mu \nabla_\nu u^\mu = 0$ を用いた。ここから、ある時刻で $u \cdot \xi = 0$ となるように選べば他の時刻でも成り立ち、また ξ は構成から超曲面に接するため、u は常に超曲面に垂直であり続ける。この超曲面を leaf とする foliation を作り、そこで計量を $3 + 1$ 分解すれば、lapse と shift、空間計量を定義できる。ただし、この場合 lapse は 1 であり、shift は 0 である。いま、測地線上のある点 (時刻 t) における微小体積要素は $\sqrt{\gamma(t)}\mathrm{d}^3x$ であり、次の時刻 $t + \Delta t$ では

$$\sqrt{\gamma(t + \Delta t)}\mathrm{d}^3x = \left(\sqrt{\gamma(t)} + \frac{\Delta t}{2\gamma}\partial_t \gamma\right)\mathrm{d}^3x \tag{319}$$

となる。いま、lapse が 1、shift が 0 なので、$\partial_t \gamma_{ij} = -2K_{ij}$ となり、この trace を取ると

$$\gamma^{ij}\partial_t \gamma_{ij} = \frac{1}{\gamma}\partial_t \gamma = -2K \tag{320}$$

となり、本文中の議論と合わせて

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma(t + \Delta t)}\mathrm{d}^3x &= \left(\sqrt{\gamma(t)} - K\Delta t\right)\mathrm{d}^3x && (321) \\ &= \left(\sqrt{\gamma(t)} + \nabla_\mu u^\mu \Delta t\right)\mathrm{d}^3x && (322) \end{aligned}$$

となる。即ち、timelike unit vector 場の四次元 divergence は、それに沿った空間体積の変化を表す。K が大きいとこの空間体積がどんどん小さくなり、やがて特異点を形成するということになる。

という楕円形方程式になる。これを満たすようにする限り、$K=0$ を保ちつづける。さらに、これは

$$\nabla_\mu n^\mu = 0 \tag{325}$$

を導き、特異点の形成を防いでくれるため、長時間発展させられる。ただし、楕円形方程式を解かなければならないため計算時間がかかる。

- harmonic slicing

harmonic slicing は、時間座標について調和条件

$$\nabla_\mu \nabla^\mu t = 0 \tag{326}$$

を満たすというものである。これを式展開していくと、

$$\nabla_\mu \nabla^\mu t = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\partial_\nu t\right) \tag{327}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta^0{}_\nu\right) \tag{328}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu 0}\right) \tag{329}$$

より

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu 0}\right) = 0 \tag{330}$$

ここで $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}$ であるから、*15座標表示して

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\beta^i\right) = 0 \tag{331}$$

であり、これを整理すると

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\beta^i\right) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t} - \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha^2}\beta^i\frac{\partial \alpha}{\partial x^i} + \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\frac{\partial \beta^i}{\partial x^i} + \frac{\beta^i}{\alpha}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^i} \tag{332}$$

$$= \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \beta^i\frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t} + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\beta^i\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^i} + \alpha\frac{\partial \beta^i}{\partial x^i}\right) \tag{333}$$

$$= \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \beta^i\frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t} + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\gamma}\beta^i)\right) \tag{334}$$

から

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \beta^i\frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \alpha\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial t} - D_i\beta^i\right] = 0 \tag{335}$$

ここで、

$$\partial_\perp \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \tag{336}$$

の trace を取ると

$$\gamma^{ij}\partial_\perp\gamma_{ij} = \gamma^{ij}\partial_t\gamma_{ij} - \gamma^{ij}\mathcal{L}_\beta\gamma^{ij} \tag{337}$$

$$= \partial_t \ln\gamma - \gamma^{ij}(\beta^k D_k\gamma_{ij} + \gamma_{ik}D_j\beta^k + \gamma_{kj}D_i\beta^k \tag{338}$$

$$= 2\partial_t \ln\sqrt{\gamma} - 2D_k\beta^k \tag{339}$$

$$= -2\alpha K \tag{340}$$

となるので、調和条件の式は

$$\partial_\perp \alpha = -\alpha^2 K \tag{341}$$

*15 g_{00} の余因子は小行列式 γ であり、また余因子行列は行列式かける逆行列なので、gg^{00} に等しい。$g^{00} = -\alpha^{-2}$ であるから、$g = -\alpha^2\gamma$ となる。

となる。これが harmonic slicing を満たすために α が従う方程式である。もし $\beta = 0$ とすると、harmonic condition は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\right) = 0 \tag{342}$$

から、空間座標の任意関数 $C(x^i)$ を用いて

$$\alpha = C(x^i)\sqrt{\gamma} \tag{343}$$

となる。γ が小さくなって特異点が近づくと α は小さくなるため、特異点にはなかなか近づかず避けることができる。

- $1 + \log$ slicing

harmonic slicing の方程式を一般化して $\partial_\perp \alpha = -K\alpha^2 f(\alpha)$ とし、$f(\alpha) = 2/\alpha$ としたのが $1 + \log$ slicing である。即ち、α が従う方程式は

$$\partial_\perp \alpha = -2\alpha K \tag{344}$$

である。これは

$$\partial_t \alpha - \mathcal{L}_\beta \alpha = \partial_t \ln \gamma - 2D_i \beta^i \tag{345}$$

と表され、$\beta = 0$ のときは

$$\partial_t \alpha = \partial_t \ln \gamma \tag{346}$$

より

$$\alpha = 1 + \log \gamma \tag{347}$$

という解を取れることが名前の由来である。この関数形は harmonic slicing の $\sqrt{\gamma}$ より γ が小さくなったときの減少程度が大きく、より特異点を避けやすい。

以下では座標の定め方を議論していく。

- normal coordinates

最も簡単なのは、単に

$$\beta^i = 0 \tag{348}$$

とする normal coordinates である。これは特異点を作ることもないが、coordinate shear、つまり座標の歪みを抑えるという点でより良いゲージの取り方が存在する。

- minimal distortion

まず、歪みテンソル Q_{ij} を γ_{ij} の時間微分の traceless 部分として定義する：[*16]

$$Q_{ij} := \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{3}\gamma^{kl}\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t}\gamma_{ij} \tag{350}$$

これは traceless なため 5 つの独立な成分があるが、shift の 3 つの自由度を使ってこれを出来る限り小さくしたい。そこで、さらにこれを (A^{ij} の時と同様に)transverse 部分と longitudinal 部分に分ける。まずベクトル X^i を

$$D^j(LX)_{ij} = D^j Q_{ij} \tag{351}$$

[*16] 三次元超曲面において、座標基底で張る平行六面体の体積は $\sqrt{\gamma}$ となる。ただし γ は空間計量の行列式。時間座標が Δt だけ離れた二つの超曲面の間で、この体積は

$$\sqrt{\gamma(t+\Delta t)} - \sqrt{\gamma(t)} = \frac{\Delta t}{2}\frac{1}{\gamma}\partial_t \gamma = \frac{\Delta t}{2}\gamma^{ij}\partial_t \gamma_{ij} \tag{349}$$

だけ変化する。この通り、$\partial_t \gamma_{ij}$ の γ^{ij} による trace は体積の時間変化率に関係するので、$\partial_t \gamma_{ij}$ の traceless 部分は形の歪みの時間変化率に関係する。

を満たすように選ぶ。このとき、

$$(LX)_{ij} = D_i X_j + D_j X_i - \frac{2}{3} D_k X^k \gamma_{ij} \tag{352}$$

である。この X^i を用いて、

$$Q_{ij}^{\mathrm{TT}} = Q_{ij} - (LX)_{ij} \tag{353}$$

と transverse 部分 Q_{ij}^{TT} を選ぶ。minimal distortion とは、この分解で $X = 0$、すなわち $D^j Q_{ij} = 0$ と選ぶことである。

γ_{ij} の発展方程式から、

$$Q_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}(-2\alpha K + 2D_k\beta^k) = -2\alpha A_{ij} + (L\beta)_{ij} \tag{354}$$

を得る。minimal distortion 条件は適当に添字を上げ下げして

$$-2\alpha D_j A^{ij} - 2A^{ij} D_j \alpha + D_j (L\beta)^{ij} = 0 \tag{355}$$

となる。ここで、momentum constraint は

$$D_i K - D_j \left(A^j{}_i + \frac{1}{3}\delta^j{}_i K \right) + 8\pi S_i = 0 \tag{356}$$

より

$$D_j A^{ji} - \frac{2}{3} D^i K - 8\pi S^i = 0 \tag{357}$$

となるので、ここから

$$-\frac{4}{3}\alpha D^i K - 2A^{ij} D_j \alpha - 16\pi\alpha S^i + D_j (L\beta)^{ij} = 0 \tag{358}$$

となり、さらに共形ベクトル Laplacian の時と同様に

$$D_j (L\beta)^{ij} = D_j D^j \beta^i + \frac{1}{3} D^i D_j \beta^j + R^i{}_j \beta^j \tag{359}$$

であるから、まとめると

$$D_j D^j \beta^i + \frac{1}{3} D^i D_j \beta^j + R^i{}_j \beta^j = 16\pi\alpha S^i + \frac{4}{3}\alpha D^i K + 2A^{ij} D_j \alpha \tag{360}$$

を得る。これが minimal distortion 条件における β の方程式である。このゲージは coordinate shear を抑えるという点で便利だが、一方で楕円型方程式を解くのに時間がかかる。

- Gamma freezing

いま、conformally related metric ともともとの計量との関係を考えよう。

$$\bar{\gamma}_{ij} = \mathrm{e}^{-4\phi} \gamma_{ij} \tag{361}$$

であったので、

$$\det(\bar{\gamma}_{ij}) = \mathrm{e}^{-12\phi} \det(\gamma_{ij}) \tag{362}$$

となる。$\det(\bar{\gamma}_{ij}) = \hat{\gamma}$ だったので、

$$\ln\det(\gamma_{ij}) = 12\phi + \ln\hat{\gamma} \tag{363}$$

となる。従って、

$$\gamma^{ij}\partial_t \gamma_{ij} = \partial_t \ln\det(\gamma_{ij}) = 12\partial_t\phi + \partial_t \ln\hat{\gamma} = 12\partial_t\phi \tag{364}$$

という関係が得られる。ここから、先ほどの歪みテンソルは conformally related metric とは

$$Q_{ij} = \partial_t \gamma_{ij} - 4\gamma_{ij}\partial_t\phi = \partial_t(\mathrm{e}^{4\phi}\bar{\gamma}_{ij}) - (\partial_t \mathrm{e}^{4\phi})\bar{\gamma}_{ij} = \mathrm{e}^{4\phi}\partial_t\bar{\gamma}_{ij} \tag{365}$$

と関係することがわかる。そこで、先ほどの $D_j Q^{ij} = 0$ に似た条件として、

$$\hat{D}_j(\partial_t \gamma^{ij}) = 0 \tag{366}$$

という Gamma freezing 条件を考える。これは minimal distortion を近似するような歪みを抑える性質を持ち、なおかつ発展方程式が一つ簡単になる。なぜなら、既に導いたように

$$0 = \hat{D}_j(\partial_t \gamma^{ij}) = \partial_t(\hat{D}_j \gamma^{ij}) = -\partial_t \bar{\Lambda}^i \tag{367}$$

と $\bar{\Lambda}^i$ が時間変化しないという条件になるからである。constraint が満たされる限り

$$\partial_t \Delta\Gamma^k = 0 \tag{368}$$

と Delta Gamma が凍結されるので、Gamma freezing と呼ばれる。これを満たすよう β を決める式は式 (289) の $\bar{D}_j$ を $\hat{D}_j$ に書き換えて[*17] $\partial_t \bar{\Lambda}^i = 0$ とすれば得られる。具体的な表式は省くが、これもまだ楕円形方程式になっている。

- Gamma driver

楕円形方程式を解く代わりに、適当な正の関数 k を用いて

$$\partial_t \beta^i = k \partial_t \Delta\Gamma^i \tag{369}$$

とすると時間発展の方程式となり、速く解ける。ただし、この右辺は β の空間二階微分を含むため、放物型 Gamma driver と呼ばれる。

これを解きやすい双曲型にした

$$\partial_t^2 \beta^i = k \partial_t \Delta\Gamma^i - (\eta - \partial_t \ln k)\partial_t \beta^i \tag{370}$$

は双曲型 Gamma driver と呼ばれる。これは二階の偏微分方程式の形ではなく、

$$\partial_t \beta^i = k B^i \tag{371}$$
$$\partial_t B^i = \partial_t \Delta\Gamma^i - \eta B^i \tag{372}$$

という形で解かれる。$k = 3/4$ とすることが多いが、これによって特性速度をほぼ光速にできるらしい。

- puncture gauge

ここまで様々な形のゲージ条件を紹介してきたが、ブラックホールのシミュレーションなどで最もよく使われるのは $1 + \log$ slicing と双曲型 Gamma driver を組み合わせた puncture gauge である。超新星シミュレーションでも、まずこれを使うことを考える。

[*17] $\bar{D}_j \beta^j = \hat{D}_j \beta^j$