1　数値相対論

ここでは、数値相対論の詳細なスキームと必要な理論を説明する。基本的には Gourgoulhon の内容に従うが、記法はこの文章全体に合うように直したりしている。また、ギリシア文字の添字は 0 から 3 を走り、ラテン文字の添字は 1 から 3 を走るものとする。ここでの目標は BSSN スキームを理解することである。BSSN スキームとは発展方程式

$$\partial_\perp \phi = \frac{1}{6}(\bar{D}_i \beta^i - \alpha K) \tag{1}$$

$$\partial_\perp \bar{\gamma}_{ij} = -2\alpha \bar{A}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{D}_k \beta^k \bar{\gamma}_{ij} \tag{2}$$

$$\partial_\perp K = -\mathrm{e}^{-4\phi}\left(\bar{D}_i \bar{D}^i \alpha + 2\bar{D}_i \phi \bar{D}^i \alpha\right) + \alpha\left[4\pi(E+S) + \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \frac{K^2}{3}\right] \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\partial_\perp \bar{A}_{ij} = &-\frac{2}{3}\bar{A}_{ij}\bar{D}_k\beta^k - 2\alpha\bar{A}_{ik}\bar{A}^k_j + \alpha\bar{A}_{ij}K \\ &+\mathrm{e}^{-4\phi}\left[-2\alpha\bar{D}_i\bar{D}_j\phi + 4\alpha\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi + 4\bar{D}_{(i}\alpha\bar{D}_{j)}\phi - \bar{D}_i\bar{D}_j\alpha + \alpha(\bar{R}_{ij} - 8\pi S_{ij})\right]^{\mathrm{TF}}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\partial_\perp \bar{\Lambda}^i = &\bar{\gamma}^{jk}\hat{D}_j\hat{D}_k\beta^i + \frac{2}{3}\Delta\Gamma^i\bar{D}_j\beta^j + \frac{1}{3}\bar{\gamma}^{ik}\bar{D}_k\bar{D}_j\beta^j \\ &-2\bar{A}^{jk}(\delta^i{}_j\partial_k\alpha - 6\alpha\delta^i{}_j\partial_k\phi - \alpha\Delta\Gamma^i{}_{jk}) - \frac{4}{3}\alpha\bar{\gamma}^{ij}\partial_j K - 16\pi\alpha\bar{\gamma}^{ij}S_j\end{aligned} \tag{5}$$

を constraint equations

$$\frac{2}{3}K^2 - \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{R} - 8\bar{D}^i\phi\bar{D}_i\phi - 8\bar{D}^2\phi) - 16\pi E = 0 \tag{6}$$

$$\bar{D}^j A_{ij} + 6\bar{A}_{ij}\bar{D}^j\phi - \frac{2}{3}\bar{D}_i K - 8\pi S_i = 0 \tag{7}$$

$$\det(\bar{\gamma}_{ij}) = \hat{\gamma} \tag{8}$$

$$\bar{\gamma}^{ij}\bar{A}_{ij} = 0 \tag{9}$$

$$\bar{\Lambda}^i + \hat{D}_j\bar{\gamma}^{ij} = 0 \tag{10}$$

と Ricci テンソル

$$\bar{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{k(i}\hat{D}_{j)}\bar{\Lambda}^k + \Delta\Gamma^k\Delta\Gamma_{(ij)k} + \bar{\gamma}^{kl}(2\Delta\Gamma^m{}_{k(i}\Delta\Gamma_{j)ml} + \Delta\Gamma^m{}_{ik}\Delta\Gamma_{mjl}) \tag{11}$$

の下で解く手法である。ただし、$\partial_\perp$、$\bar{\gamma}_{ij}$、ϕ、$\bar{D}_i$、$\hat{\gamma}$、$\hat{D}_i$、K、$\bar{A}_{ij}$、$\bar{R}_{ij}$、$\bar{\Gamma}^i$、E はそれぞれ $\partial_t - \mathcal{L}_\beta$、共形空間計量、共形因子、$\bar{\gamma}_{ij}$ に関する共変微分、背景計量 (の行列式)、背景計量に関する共変微分、外的曲率のトレース、外的曲率テンソルのトレースレス部分、共形 Ricci テンソル、ガンマベクトル、そして全エネルギー密度 $T^{\mu\nu}n_\mu n_\nu$ である。定義は以下でおいおい述べる。また、$\mathcal{L}_\beta$ は β に沿った Lie 微分であり、上付き添字 TF とは $\bar{\gamma}_{ij}$ による trace が 0 である成分のことを指す。

以下では、まず Einstein 方程式の $3+1$ 分解を定式化する。これは超曲面上の曲率を表す各量の時間発展の方程式を求めるものである。次にその Einstein 方程式を共形分解という方法で書き直す。この方が初期値の設定をする上で便利だからである。最後に超曲面の取り方について議論する。

1.1　超曲面と foliation

相対論の $3+1$ 分解では、時空多様体 $\mathcal{M}$ を foliation と呼ばれる方法で分割する。即ち、時空 $\mathcal{M}$ 全体で「時間座標」t が存在すると仮定して、この t の値が一定である点の集合として空間超曲面 Σ_t を定義し、$\mathcal{M}$ を Σ_t の集まり

$$\mathcal{M} = \cup_{t\in\mathbb{R}}\Sigma_t \tag{12}$$

と捉える。そして、各 Σ_t 上での空間曲率の時間発展を追う。時間座標と超曲面の選び方はゲージの自由度であり、自分で勝手に定めてよい。いま、各超曲面 Σ_t に空間座標 x^i を張る。このとき、計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\alpha^2\mathrm{d}t^2 + \gamma_{ij}(\mathrm{d}x^i + \beta^i\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + \beta^j\mathrm{d}t) \tag{13}$$

で与えられる。ただし、α は lapse 関数と呼ばれ、β^i は shift vector と呼ばれる。γ_{ij} は Σ_t 上の三次元の計量である。これらは幾何学的には次のような量である。

まず、Σ_t 上の点 $A(t, x^i)$ を考える。この点で、Σ_t に垂直な時間的単位ベクトル n^μ を考え、これが超曲面 $\Sigma_{t+\Delta t}$ と交わる点を $B(t+\Delta t, x'^i)$ とする。このとき、AB を結ぶベクトルの長さ (超曲面同士の間の距離) は Δt に比例するはずで、その比例係数が α である。n^μ が単位ベクトルだったことを考えれば、ベクトル自体は $\Delta t\alpha n^\mu$ となる。一方で、$\Sigma_{t+\Delta t}$ 上の点 $C(t+\Delta t, x^i)$ を考えると、一般に C と B は一致するとは限らない。そこで、BC を結ぶベクトルは一般に 0 でないが、これも Δt に比例するはずなので、これを $(x^i - x'^i)(\partial/\partial x^i) = \Delta t\beta^i(\partial/\partial x^i)$ と表す。これが β^i である。

また、以上をまとめると、三角形 ABC の各辺のベクトルの関係を考えると

$$\Delta t(\boldsymbol{e}_t)^\mu = \Delta t\alpha n^\mu + \Delta t\beta^i(\boldsymbol{e}_i)^\mu \tag{14}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{e}_t$ は時間方向の座標基底 (つまり、(t, x^i) と $(t+\Delta t, x^i)$ をつなぐベクトルが $\Delta t\boldsymbol{e}_t = (\Delta t, 0, 0, 0)$)、$\boldsymbol{e}_i$ は空間方向の座標基底であり、$^\mu$ はそれらのベクトルの第 μ 成分であることを表す。ここから、

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha}\right) \tag{15}$$

および、これの添字を $g_{\mu\nu}$ で下げて

$$n_\mu = (-\alpha, 0) \tag{16}$$

を得る。n^μ は timelike なので、$n^\mu n_\mu = -1$ と負になることに注意。

いま、これらを使って射影テンソル

$$\gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu \tag{17}$$

を定義する。これは

$$\gamma^\mu{}_\nu n^\nu = 0 \tag{18}$$

を満たすので、何らかのベクトルにこの射影テンソルを作用させたものは n^μ と直交するようになる。この意味で、射影テンソルはベクトルを空間超曲面上に射影するものである。さらにこの射影テンソルを時空の計量 $g_{\mu\nu}$ に作用させることで、誘導計量

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{19}$$

を定義することができる。誘導軽量による内積は、ベクトルを一度空間超曲面に射影してから内積をとるという操作になる。

ここまで、三種類の γ が出てきた。添字で区別するが、γ_{ij} は計量の空間成分、$\gamma_{\mu\nu}$ は誘導計量、$\gamma^\mu{}_\nu$ は射影テンソルである。

空間の曲率を考えるには、中での「座標のゆがみ方」を考える内的曲率 (第一基本形式) の他に、高次元空間のなかでどのように空間を「曲げて」配置しているかを考える外的曲率 (第二基本形式) がある。$3+1$ 分解では、この外的曲率の発展が大切になる。外的曲率は、

$$K_{\mu\nu} = -\gamma^{\sigma}{}_{\mu}\gamma^{\rho}{}_{\nu}\nabla_{\rho}n_{\sigma} \tag{20}$$

で定義する。法線ベクトルの共変微分を空間に射影するもので、特に trace は曲面の曲率半径のようなものを与える。また、証明は省くが、外的曲率は対称テンソルである。

射影テンソルの定義を使うと、外的曲率の定義式は

$$K_{\mu\nu} = -\nabla_{\nu}n_{\mu} - n_{\nu}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}n_{\mu} \tag{21}$$

となる。さらに、

$$n^{\sigma}\nabla_{\sigma}n_{\mu} = \gamma^{\sigma}{}_{\mu}\nabla_{\sigma}\ln\alpha \tag{22}$$

であることを示すことができる。ここで、$\gamma^{\sigma}{}_{\mu}\nabla_{\sigma}$ というものが出てきたが、このようにスカラーまたは空間的テンソルを四次元の意味で共変微分し、さらに射影したものは三次元の共変微分 D_{μ} になる。つまり、Christoffel 記号が

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_{\nu}g_{\sigma\rho} + \partial_{\rho}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\nu\rho}) \tag{23}$$

の代わりに

$$G^{i}{}_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_{j}\gamma_{lk} + \partial_{k}\gamma_{jl} - \partial_{l}\gamma_{jk}) \tag{24}$$

であるような共変微分になる。G の添字が 0 を含むような場合は以下では出てこないので、ここでは考えない。この三次元共変微分を使うと、

$$K_{\mu\nu} = -\nabla_{\nu}n_{\mu} - (D_{\mu}\ln\alpha)n_{\nu} \tag{25}$$

となる。

1.2 Einstein 方程式の $3+1$ 分解

時間発展を記述するには、Lie 微分 $\mathcal{L}$ を使うのが便利である。特に、αn^{μ} 方向への Lie 微分は、単に n^{μ} 方向にするだけの場合と違い、単位時間経った時のテンソルの変化を記述することができる。実際、$\alpha n^{\mu} = (1, -\beta^{i})$ なので、空間計量の Lie 微分は

$$\mathcal{L}_{\alpha n}\gamma_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{e}_t}\gamma\mu\nu - \mathcal{L}_{\beta}\gamma_{\mu\nu} = \partial_{t}\gamma_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\beta}\gamma_{\mu\nu} \tag{26}$$

となり、確かに計量の時間微分を記述できることになる。このとき、座標基底方向への Lie 微分はただの微分になることを用いた。さらに、Lie 微分で書いておくと、αn^{μ} の成分を露わに書かないことで

$$\mathcal{L}_{\alpha n}\gamma_{\mu\nu} = \alpha n^{\sigma}\nabla_{\sigma}\gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\sigma\nu}\nabla_{\mu}(\alpha n^{\sigma}) + \gamma_{\mu\sigma}\nabla_{\nu}(\alpha n^{\sigma}) \tag{27}$$
$$= -2\alpha K_{\mu\nu} \tag{28}$$

となる。ここで外的曲率がでてくるので、計量の時間発展を知るには外的曲率の時間発展も必要になる。

射影テンソルを作用させるとテンソルの空間成分を取り出す事になり、また n^{μ} を作用させるとテンソルの時間成分を取り出すことになる。外的曲率の時間発展を記述する式は、Einstein 方程式を空間-空間成分に射影したものになる。Einstein 方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \tag{29}$$

より、適当に変形した

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \tag{30}$$

の方が今の議論には便利である。ただし、$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ であり、全エネルギー密度 $E := T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$、応力テンソル $S_{\mu\nu} := T_{\sigma\rho}\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu$ とそのトレース $S := \gamma^{ij}S_{ij} = g^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ を用いる[*1]と $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}T_{\mu\nu} - n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \gamma^{\rho\sigma}\gamma^\mu{}_\rho\gamma^\nu{}_\sigma T_{\mu\nu} - E = \gamma^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma} - E = S - E$ を得る。これを空間に射影すると、

$$\text{R.H.S.} = 8\pi\left[S_{ij} - \frac{1}{2}(S-E)\gamma_{ij}\right] \tag{33}$$

$$\text{L.H.S.} = \gamma^\sigma{}_i\gamma^\rho{}_j R_{\sigma\rho} \tag{34}$$

となる。左辺を計算するには、Gauss の関係式というものが必要になる。

Gauss の関係式は、三次元の共変微分 D_μ による Riemann テンソル $Q^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ と四次元の共変微分 ∇_μ による Riemann テンソル ${}^4R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ を関係づける式である。三次元の Riemann テンソルの定義は空間的な任意のベクトル v^μ に対して

$$D_\sigma D_\rho v^\mu - D_\rho D_\sigma v^\mu = Q^\mu{}_{\nu\sigma\rho}v^\nu \tag{35}$$

であるが、ここで D_μ が ∇_μ を作用させた後に空間に射影したものだったことを考えると、$\gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu$ に起因する色々な項が出る。その結果、最終的に

$$\gamma^\tau{}_\sigma\gamma^\phi{}_\rho\gamma^\mu{}_\lambda\gamma^\theta{}_\nu{}^4R^\nu_{\theta\tau\phi} - K_{\rho\nu}K^\mu{}_\sigma + K_{\sigma\nu}K^\mu{}_\rho = R^\mu{}_{\nu\sigma\rho} \tag{36}$$

という関係式を得られる。これが Gauss の関係式である。

さらに、Einstein 方程式に出てくるのは縮約した Ricci テンソルなので、ここでも μ と σ の縮約を取ることで

$$\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu R_{\sigma\rho} + \gamma_{\mu\sigma}n^\rho\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = Q_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K_{\mu\sigma}K^\sigma{}_\nu \tag{37}$$

を得る。ここで、Riemann テンソルの定義から左辺第二項は

$$\gamma_{\mu\sigma}n^\rho\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = \gamma_{\mu\sigma}n^\tau\gamma^\lambda{}_\nu(\nabla_\lambda\nabla_\tau n^\sigma - \nabla_\tau\nabla_\lambda n^\sigma) \tag{38}$$

であり、ここでまた外的曲率などを使うと

$$\gamma_{\mu\sigma}n^\rho\gamma^\lambda{}_\nu n^\tau R^\sigma{}_{\rho\lambda\tau} = -K_{\mu\sigma}K^\sigma{}_\nu + \alpha^{-1}D_\nu D_\mu\alpha + \gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu n^\lambda\nabla_\lambda K_{\sigma\rho} \tag{39}$$

を得る。いま、外的曲率の Lie 微分は

$$\mathcal{L}_{\alpha n}K_{\mu\nu} = \alpha n^\sigma\nabla_\sigma K_{\mu\nu} + K_{\sigma\nu}\nabla_\mu(\alpha n^\sigma) + K_{\mu\sigma}\nabla_\nu(\alpha n^\sigma) \tag{40}$$

であるが、これに射影テンソルを作用させることで

$$\mathcal{L}_{\alpha n}K_{\mu\nu} = \alpha\gamma^\lambda{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu n^\sigma\nabla_\sigma K_{\lambda\rho} - 2\alpha K_{\nu\sigma}K^\sigma{}_\mu \tag{41}$$

を得る。この右辺第一項は Gauss の関係式を縮約した式の右辺第三項の α 倍なので

$$\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu R_{\sigma\rho} = -\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}_{\alpha n}K_{\mu\nu} - \frac{1}{\alpha}D_\mu D_\nu\alpha + Q_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - 2K_{\mu\sigma}K^\sigma{}_\nu \tag{42}$$

となる。これを空間射影した Einstein 方程式に代入して整理すると、発展方程式

$$\mathcal{L}_{\alpha n}K_{ij} = -D_iD_j\alpha + \alpha(Q_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K^k{}_j + 4\pi[(S-E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]) \tag{43}$$

[*1] 上付きの $\gamma^{\mu\nu}$ を $\gamma_{\mu\nu}$ の逆行列ではなく

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu \tag{31}$$

と定義する。$S_{\mu\nu}$ は T を射影したものなので n とは直交するため、$g^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$。さらに、成分表示すると

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{ij} \end{pmatrix} \tag{32}$$

であるから、$\gamma^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \gamma^{ij}S_{ij} = S$ となる。

を得る。

時間発展の式は出せたが、Einstein 方程式は 10 個の方程式だが、そのうち 4 つは二階微分の発展方程式ではなく、一階微分の束縛方程式である。つまり、条件式である。以下ではさらに束縛方程式を導く。その一つは、時間-時間方向への射影で得られる。もともとの Einstein 方程式に n^μ を二つ作用させると

$$R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu + \frac{1}{2}R = 8\pi T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \tag{44}$$

である。縮約 Gauss の関係式の trace を取ると、

$$R + 2R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = Q + K^2 - K_{ij}K^{ij} \tag{45}$$

とちょうど上式左辺の二倍が出てくるので、この方程式は

$$Q + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 16\pi E = 0 \tag{46}$$

となる。これは Hamiltonian constraint と呼ばれる。

最後に、時間-空間方向への射影を考える。これは

$$R_{\sigma\rho}n^\sigma \gamma^\rho{}_\mu = -8\pi S_\mu \tag{47}$$

となる。ただし $S_\mu = -T_{\sigma\nu}n^\sigma\gamma^\nu{}_\mu$ は運動量密度。この左辺は縮約 Codazzi の関係式というもので計算する。

四次元の Riemann テンソルの定義から

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)n^\sigma = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}n^\rho \tag{48}$$

であり、これを超曲面上に射影すると、計算ののち

$$\gamma^\sigma{}_\mu\gamma^\rho{}_\nu\gamma^\lambda{}_\tau R^\tau{}_{\theta\sigma\rho}n^\theta = -D_\mu K^\lambda{}_\nu + D_\nu K^\lambda{}_\mu \tag{49}$$

を得る。これは Codazzi の関係式と呼ばれる。さらに λ と μ の縮約を取ると、

$$\gamma^\rho{}_\mu n^\sigma R_{\sigma\rho} = D_\mu K - D_\sigma K^\sigma{}_\mu \tag{50}$$

を得る。これを用いると、Einstein 方程式の時間-空間射影は

$$D_i K - D_j K^j{}_i + 8\pi S_i = 0 \tag{51}$$

を得る。これは momentum constraint と呼ばれる。

1.3 共形分解と初期条件

Einstein 方程式の $3+1$ 分解に対して、どのように初期条件を与えるべきだろうか。発展方程式は γ_{ij} と K_{ij} の計 12 本あるので、12 個の値を初期超曲面の各点に与えなければならないが、これらの初期条件は Hamiltonian constraint と momentum constraint を満たさなければならない。これらは合計 4 つの自由度を定めるので、実質的に自由に与えられる値の数は 8 である。どの 8 つを与え、どの 4 つを定めるかをここで議論する。

Hamiltonian constraint から γ_{ij} に関連する量 (行列式に対応) を 1 つ、momentum constraint から K_{ij} に関する量 (K_{ij} の traceless-longitudinal part) を 3 つ、定める方法がしばしば使われる。このために、空間計量を共形分解する：

$$\phi = \frac{12}{\ln}\left(\frac{\gamma}{\hat{\gamma}}\right) \tag{52}$$

によって定める共形因子 ϕ によって、

$$\bar{\gamma}_{ij} = \mathrm{e}^{-4\phi}\gamma_{ij} \tag{53}$$

という共形計量 $\bar{\gamma}_{ij}$ を定義する。ここで、$\hat{\gamma}$ は平坦空間を仮定した場合の計量の行列式であり、例えば直交座標なら 1、極座標なら $r^4 \sin^2\theta$ となる。この定義から共形計量の行列式 $\bar{\gamma}$ は $\bar{\gamma} = \hat{\gamma}$ という条件を満たす。つまり、共形計量の自由度は 5 である。また、外的曲率を分解するために、まずその traceless part A_{ij} を

$$A_{ij} = K_{ij} - \frac{1}{3} K\gamma_{ij} \tag{54}$$

で定義する。これの分解には任意性があるが、ここでは

$$\bar{A}_{ij} = \mathrm{e}^{-4\phi} A_{ij} \tag{55}$$

と

$$\tilde{A}_{ij} = \mathrm{e}^{-2\phi} A_{ij} \tag{56}$$

の二通りを考える。単に式が簡単になるかどうかというだけだが、初期条件生成の段階では後者を考え、BSSN 形式による時間発展は前者を考える。初期条件で考えるのは、$\tilde{A}_{ij}$ の longitudinal part X^i である。これは、

$$\bar{D}_j \bar{D}^j X^i + \frac{1}{3}\bar{D}^i \bar{D}_j X^j + \bar{R}^i{}_j X^j = \bar{D}_j \tilde{A}^{ij} \tag{57}$$

で定義される。ここで、$\bar{D}_i$ は $\bar{\gamma}_{ij}$ で Christoffel 記号を作る共変微分であり、$\bar{R}_{ij}$ は $\bar{D}_i$ による Ricci テンソルである。バー付きの量は $\bar{\gamma}_{ij}$ で添字を上げ下げする。X^i の $\tilde{A}^{ij}$ への寄与は

$$(LX)^{ij} = \bar{D}^i X^j + \bar{D}^j X^i - \frac{2}{3}\bar{D}_k X^k \bar{\gamma}^{ij} \tag{58}$$

という形で与えられ、traceless transverse part は

$$\tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}} = \tilde{A}^{ij} - (LX)^{ij} \tag{59}$$

で求める。実際、これの trace は 0 になり、また divergence も 0 になる。

これらの量を用いて、共形版の constraints を導く。Hamiltonian constraint は、Q の扱い以外は単に代入するだけでよい。Q_{ij} は D_i に付随する Ricci テンソルで、$\bar{R}_{ij}$ は $\bar{D}_i$ に付随する Ricci テンソルだったので、任意のベクトル v^i を用いて

$$(D_i D_j - D_j D_i) v^i = Q_{ij} v^i \tag{60}$$
$$(\bar{D}_i \bar{D}_j - \bar{D}_j \bar{D}_i) v^i = \bar{R}_{ij} v^i \tag{61}$$

となる。また、D_i と $\bar{D}_i$ それぞれの Christoffel 記号を $G^i{}_{jk}$ と $\bar{G}^i{}_{jk}$ とし、それらの差を $C^i{}_{jk} = G^i{}_{jk} - \bar{G}^i{}_{jk}$ すると、

$$D_i v^j = \bar{D}_i v^j + C^j{}_{ik} v^k \tag{62}$$

となるので、これらの関係を用いて

$$Q_{ij} = \bar{R}_{ij} + \bar{D}_l C^l{}_{ij} - C^k{}_{li} C^l{}_{kj} + C^l{}_{lk} C^k{}_{ij} - \bar{D}_i C^k{}_{kj} \tag{63}$$

を導くことができる。ここで、$\bar{D}_i$ を γ_{jk} に作用させることを考えると、$D_i \gamma_{jk} = 0$ であることから

$$C^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\bar{D}_j \gamma_{lk} + \bar{D}_k \gamma_{jl} - \bar{D}_l \gamma_{jk}) \tag{64}$$

であるので、この γ_{ij} を ϕ と $\bar{\gamma}_{ij}$ で表すことで

$$C^i{}_{jk} = 2(\delta^i{}_j \bar{D}_k \phi + \delta^i{}_k \bar{D}_j \phi - \bar{\gamma}_{jk} \bar{D}^i \phi) \tag{65}$$

と表すことができる。これを使うと、

$$Q_{ij} = \bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i \bar{D}_j \phi - 2\bar{\gamma}_{ij} \bar{D}_k \bar{D}^k \phi + 4\bar{D}_i \phi \bar{D}_j \phi - 4\bar{\gamma}_{ij} \bar{D}_k \phi \bar{D}^k \phi \tag{66}$$

となり、この trace を取ると

$$Q(=\gamma^{ij}Q_{ij}) = \mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{R} - 8(\bar{D}_k\bar{D}^k\phi + \bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi)) \tag{67}$$

となる。これを使うと、Hamiltonian constraint は

$$\mathrm{e}^{\phi}\bar{D}_k\bar{D}^k\phi + \mathrm{e}^{\phi}\bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi - \frac{1}{8}\bar{R}\mathrm{e}^{\phi} + \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij}\mathrm{e}^{-7\phi} - \frac{1}{12}K^2\mathrm{e}^{5\phi} + 2\pi E\mathrm{e}^{5\phi} = 0 \tag{68}$$

となり、$\tilde{A}_{ij}$ の代わりに $\bar{A}_{ij}$ を用いると

$$\frac{2}{3}K^2 - \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} - 16\pi E + \mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{R} - 8\bar{D}_k\bar{D}^k\phi - 8\bar{D}_k\phi\bar{D}^k\phi) = 0 \tag{69}$$

となる。

また、momentum constraint も共形分解する。

$$D_iK = \bar{D}_iK \tag{70}$$

$$D_jK^j{}_i = D_j\left(A^j{}_i + \frac{1}{3}K\delta^j{}_i\right) = D_jA^j{}_i + \frac{1}{3}D_iK \tag{71}$$

さらに

$$\begin{aligned}
D_jA^j{}_i &= \bar{D}_j(\mathrm{e}^{-6\phi}\tilde{A}^j{}_i) + \mathrm{e}^{-6\phi}C^j{}_{jl}\tilde{A}^l{}_i - \mathrm{e}^{-6\phi}C^l{}_{ji}\tilde{A}^j{}_l & (72)\\
&= \mathrm{e}^{-6\phi}\bar{D}_j\tilde{A}^j{}_i - 6\mathrm{e}^{-6\phi}\bar{D}_j\phi\tilde{A}^j{}_i + 6\mathrm{e}^{-6\phi}\tilde{A}^l{}_i\bar{D}_l\phi - 2\mathrm{e}^{-6\phi}\tilde{A}^j{}_l\delta^l{}_j\bar{D}_i\phi - 2\mathrm{e}^{-6\phi}\tilde{A}^j{}_i\bar{D}_j\phi + 2\mathrm{e}^{-6\phi}\tilde{A}_{ij}\bar{D}^j\phi & (73)\\
&= \mathrm{e}^{-6\phi}\bar{D}_j\tilde{A}^j{}_i & (74)
\end{aligned}$$

を用いて、

$$\frac{2}{3}\mathrm{e}^{6\phi}\bar{D}_iK - \bar{\gamma}_{ik}\bar{D}_j\tilde{A}^{jk} + 8\pi\mathrm{e}^{6\phi}S_i = 0 \tag{75}$$

となる。さらに、これを X^i で書き直すと

$$\bar{D}_j(LX)^{ji} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{6\phi}\bar{D}^iK = 8\pi\mathrm{e}^{6\phi}\bar{\gamma}^{ik}S_k \tag{76}$$

となる。一方で、$\tilde{A}$ の代わりに $\bar{A}$ を用いると

$$\frac{2}{3}\bar{D}_iK - \bar{\gamma}_{ik}\bar{D}_j\bar{A}^{jk} - 6\bar{\gamma}_{ik}\bar{A}^{jk}\bar{D}_j\phi + 8\pi S_i = 0 \tag{77}$$

となる。

以上の方程式系を用いて、初期条件を構成できる。即ち、$\bar{\gamma}_{ij}$、$\tilde{A}^{ij}_{\mathrm{TT}}$、$K$、および物質場の量を自由に与え、以上の Hamiltonian constraint と momentum constraint から ϕ と X^i を求め、初期条件を作る。

1.4 Einstein 方程式の共形分解

現在数値相対論で主流の BSSN 形式では、前節の共形分解を、発展方程式全体に適用する。空間計量の発展方程式を共形因子と共形計量で表すと

$$4\mathrm{e}^{4\phi}\bar{\gamma}_{ij}\mathcal{L}_{\alpha n}\phi + \mathrm{e}^{4\phi}\mathcal{L}_{\alpha n}\bar{\gamma}_{ij} = -2\alpha A_{ij} - \frac{2}{3}K\mathrm{e}^{4\phi}\bar{\gamma}_{ij} \tag{78}$$

となる。この式を $\bar{\gamma}^{ij}$ で trace を取ると、$\bar{\gamma} = \hat{\gamma}$ であり、これが時間に依存しないことを用いて

$$\mathcal{L}_{\alpha n}\phi = \frac{1}{6}(\bar{D}_i\beta^i - \alpha K) \tag{79}$$

という共形因子の発展方程式が導ける。さらに、trace を取る前の式の $\mathcal{L}_{\alpha n}\phi$ を上式で置き換えれば、

$$\mathcal{L}_{\alpha n}\bar{\gamma}_{ij} - 2\alpha\bar{A}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\gamma}_{ij}\bar{D}_k\beta^k \tag{80}$$

と共形計量の発展方程式になる。

外的曲率の発展方程式は、trace と traceless part の発展方程式に分解する。外的曲率の時間発展の式の γ^{ij} による trace を取ると

$$\text{L.H.S.} = \gamma^{ij}\mathcal{L}_{\alpha n}K - 2\alpha K_{ij}K^{ij} \tag{81}$$

及び

$$\text{R.H.S.} = -D_iD^i\alpha + \alpha(Q + K^2 - 2K_{ij}K^{ij} + 4\pi(3(S-E) - 2S)) \tag{82}$$

から

$$\mathcal{L}_{\alpha n}K = -D_iD^i\alpha + \alpha(Q + K^2 + 4\pi(S - 3E)) \tag{83}$$

となる。さらに Hamiltonian constraint $Q + K^2 = K_{ij}K^{ij} + 16\pi E$ から

$$\mathcal{L}_{\alpha n}K = -D_iD^i\alpha + \alpha(4\pi(S+E) + K_{ij}K^{ij}) \tag{84}$$

を得る。これを更に共形版にすると、D_i を $\bar{D}_i$ に変えることで

$$D_iD^i\alpha = -4\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{D}_i\phi\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_j\alpha + \mathrm{e}^{-4\phi}\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 6\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{\gamma}^{jk}\bar{D}_j\phi\bar{D}_k\alpha = \mathrm{e}^{-4\phi}\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 2\mathrm{e}^{-4\phi}\bar{\gamma}^{jk}\bar{D}_j\phi\bar{D}_k\alpha \tag{85}$$

を得て、さらに traceless 性を用いて

$$K_{ij}K^{ij} = \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2 \tag{86}$$

を得る。これらを組み合わせて、

$$\mathcal{L}_{\alpha n}K = -\mathrm{e}^{-4\phi}(\bar{D}_i\bar{D}^i\alpha + 2\bar{D}_i\phi\bar{D}^i\alpha) + \alpha\left[4\pi(E+S) + \bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} + \frac{K^2}{3}\right] \tag{87}$$

を得る。

次に、traceless part の時間発展は

$$\mathcal{L}_{\alpha n}A_{ij} = \mathcal{L}_{\alpha n}K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\mathcal{L}_{\alpha n}K + \frac{2}{3}\alpha KK_{ij} \tag{88}$$

であるから、これまで求めてきた K や K_{ij} の発展方程式を代入することで

$$\mathcal{L}_{\alpha n}A_{ij} = \frac{1}{3}\alpha KA_{ij} - 2\alpha A_{ik}A^k{}_j + (-D_iD_j\alpha + \alpha Q_{ij} - 8\pi\alpha S_{ij})^{\mathrm{TF}} \tag{89}$$

とまとめることができる。ただし上付き添字 TF は traceless 部分 (trace free) であることを表し、なんらかの二階共変テンソル T_{ij} の TF 部分は $T_{ij} - \frac{1}{3}T\gamma_{ij}$ で表す。

以上の式をまた共形因子と共形計量で表すと、Q_{ij} と $\bar{R}_{ij}$ を結びつける式や $\mathcal{L}_{\alpha n}\phi$ の式等も組み合わせて、多少面倒な計算の末に

$$\begin{aligned}\partial_\perp\bar{A}_{ij} = &-\frac{2}{3}\bar{D}_k\beta^k\bar{A}_{ij} + \alpha K\bar{A}_{ij} - 2\alpha\bar{A}_{ik}A^k{}_j \\ &+\mathrm{e}^{-4\phi}(-\bar{D}_i\bar{D}_j\alpha + 4\bar{D}_{(i}\alpha\bar{D}_{j)}\phi + \alpha(\bar{R}_{ij} - 2\bar{D}_i\bar{D}_j\phi + 4\bar{D}_i\phi\bar{D}_j\phi - 8\pi S_{ij}))^{\mathrm{TF}}\end{aligned} \tag{90}$$

を得られる。ここでの TF は γ^{ij} でなく $\bar{\gamma}^{ij}$ による trace が 0 になるようにしてある。つまり、二階テンソル T_{ij} に対し $T^{\mathrm{TF}}_{ij} = T_{ij} - T_{kl}\bar{\gamma}^{kl}\bar{\gamma}_{ij}/3$ である。

1.5 BSSN 形式

BSSN 形式の最後のピースとして、Ricci テンソルの表式を求める。まずは Ricci テンソルの構造を調べる。いま、三次元平坦空間の Christoffel 記号を $\hat{G}^i{}_{jk}$ と表し、共形計量の Christoffel 記号との差を

$$\Delta\Gamma^i{}_{jk} = \bar{G}^i{}_{jk} - \hat{G}^i{}_{jk} \tag{91}$$

を定義する。$\hat{G}^i{}_{jk}$ を用いた平坦空間の共変微分を $\hat{D}_i$ も定義すると、

$$\Delta\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{il}(\hat{D}_j\bar{\gamma}_{lk} + \hat{D}_k\bar{\gamma}_{jl} - \hat{D}_l\bar{\gamma}_{jk}) \tag{92}$$

である。これらを用いると、

$$\bar{R}_{ij} = \partial_k\bar{G}^k{}_{ij} - \partial_i\bar{G}^k{}_{kj} + \bar{G}^l{}_{lk}\bar{G}^k{}_{ij} - \bar{G}^k{}_{li}\bar{G}^l{}_{kj} \tag{93}$$

$$= \hat{R}_{ij} + \hat{D}_l\Delta\Gamma^l{}_{ij} - \hat{D}_i\Delta\Gamma^k{}_{kj} - \Delta\Gamma^k{}_{li}\Delta\Gamma^l{}_{kj} + \Delta\Gamma^l{}_{lk}\Delta\Gamma^k{}_{ij} \tag{94}$$

となる。$\hat{R}_{ij}$ は $\hat{D}_i$ による Ricci テンソルであるが、これは平坦空間の曲率なので 0 である。さらに $\Delta\Gamma^i{}_{jk}$ の対称性等を利用すると

$$\bar{R}_{ij} = \frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}(\hat{D}_k\hat{D}_i\bar{\gamma}_{jl} + \hat{D}_k\hat{D}_j\bar{\gamma}_{il} - \hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij} - \hat{D}_i\hat{D}_j\bar{\gamma}_{kl}) + \bar{\gamma}^{kl}(\Delta\Gamma^m{}_{lj}\Delta\Gamma_{mki} - \Delta\Gamma^m{}_{kl}\Delta\Gamma_{mij}) \tag{95}$$

となる。支配方程式の中で、γ_{ij} の時間二階微分は γ_{ij} の一階微分と K_{ij} の一階微分に分けているが、空間二階微分は全てこの形で Ricci テンソルに押し付けられている。一方で、この表式では非 Laplacian 的な混合微分の項が含まれており、このような形の微分は数値計算のために差分化したときは数値不安定を導いてしまう。BSSN 形式は、空間一階微分も新たな変数を導入してこの問題を避けるための定式化である。

まず、接続ベクトル $\Delta\Gamma^k := \bar{\gamma}^{ij}\Delta\Gamma^k{}_{ij}$ を定義する。このとき、$\bar{\gamma} = \hat{\gamma}$ と $\hat{D}_i\hat{\gamma}_{ij} = 0$ を利用すれば

$$\Delta\Gamma^k = -\hat{D}_l\bar{\gamma}^{kl} \tag{96}$$

となる。この関係式を用いると、Ricci テンソルは

$$\bar{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{k(i}\hat{D}_{j)}\Delta\Gamma^k + \Delta\Gamma^k\Delta\Gamma_{(ij)k} + \bar{\gamma}^{kl}(2\Delta\Gamma^m{}_{k(i}\Delta\Gamma_{j)ml} + \Delta\Gamma^m{}_{ik}\Delta\Gamma_{mjl}) \tag{97}$$

と書ける。BSSN 形式の肝として、ここで新しい変数 $\bar{\Lambda}^k$ を導入する。これは、解析的には $\bar{\Lambda}^k = \Delta\Gamma^k$ である。これを用いて、

$$\bar{R}_{ij} = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}^{kl}\hat{D}_k\hat{D}_l\bar{\gamma}_{ij} + \bar{\gamma}_{k(i}\hat{D}_{j)}\bar{\Lambda}^k + \Delta\Gamma^k\Delta\Gamma_{(ij)k} + \bar{\gamma}^{kl}(2\Delta\Gamma^m{}_{k(i}\Delta\Gamma_{j)ml} + \Delta\Gamma^m{}_{ik}\Delta\Gamma_{mjl}) \tag{98}$$

と Ricci テンソルを計算する。

$\bar{\Lambda}^k$ の発展方程式を次に求める。

$$\partial_t\bar{\Lambda}^k = -\partial_t\hat{D}_l\bar{\gamma}^{kl} = -\hat{D}_l\partial_t\gamma^{kl} \tag{99}$$

となるから、γ_{ij} の発展方程式の添字を持ち上げた上で $\hat{D}_j$ による divergence を取ると、さらに計算を進めることができて

$$\frac{\partial\bar{\Lambda}^i}{\partial t} = -2\alpha\hat{D}_j\bar{A}^{ij} - 2\bar{A}^{ij}\hat{D}_j\alpha + \beta^k\hat{D}_k\bar{\Lambda}^i - \bar{\Lambda}^k\hat{D}_k\beta^i + \frac{2}{3}\bar{\Lambda}^i\hat{D}_k\beta^k + \bar{\gamma}^{jk}\hat{D}_j\hat{D}_k\beta^i + \frac{1}{3}\bar{\gamma}^{ij}\hat{D}_j\hat{D}_k\beta^k \tag{100}$$

となる。単にこれを解くだけでは混合微分による差分誤差のせいで計算が破綻するのを防ぐことはできない。ここで計算が破綻するというのは、誤差がたまることで本来初期条件で満たされれば常に満たされ続けるはずの constraints が満たされなくなっていくという現象を伴う。そこで、$\bar{\Lambda}^k$ の発展方程式に一部 constraint を組み込むことで、constraint が満たされるように誤差を (ある程度) 打ち消すような時間発展をさせることができ

る。具体的には、$\hat{D}_j\bar{A}^{ij}$ を $\bar{D}_j\bar{A}^{ij}$ と $\Delta\Gamma^i{}_{jk}$ で書き直し、後者を momentum constraint を用いて書き換えることで

$$\partial_\perp\bar{\Lambda}^i=\bar{\gamma}^{jk}\hat{D}_j\hat{D}_k\beta^i+\frac{2}{3}\Delta\Gamma^i\bar{D}_j\beta^j+\frac{1}{3}\bar{\gamma}^{ik}\bar{D}_k\bar{D}_j\beta^j-2\bar{A}^{jk}(\delta^i{}_j\partial_k\alpha-6\alpha\delta^i{}_j\partial_k\phi-\alpha\Delta\Gamma^i{}_{jk})-\frac{4}{3}\alpha\bar{\gamma}^{ij}\partial_jK-16\pi\alpha\bar{\gamma}^{ij}S_j \tag{101}$$

を得る。この方程式で発展させる $\bar{\Lambda}^k$ を用いて Ricci テンソルを評価すれば、$\bar{A}_{ij}$ の方程式を閉じることができる。

以上が最初にまとめた BSSN 形式である。

1.6 ゲージの定め方

以上までで BSSN 形式と初期条件の求め方を議論したが、ゲージの自由度の定め方はまだ議論していない。Lapse と shift は自分で好きなように定めてよいので、ある特定のゲージを定めることで、そのゲージ条件を満たすように Lapse と shift の時間発展を定めることにする。α は空間超曲面のスライスのしかたを決める、つまり時間座標の張り方の自由度に関係し、β^i は空間座標の張り方の自由度に対応する。しばしば使われるのは moving puncture 条件と呼ばれるもので、lapse は $1+\log$ slicing、shift は Gamma driver という手法で発展させるものである。

$1+\log$ slicing とは、

$$\mathcal{L}_{\alpha n}\alpha=-2\alpha K \tag{102}$$

という方程式で α を発展させる方法である。これは特定の条件下では

$$\alpha=1+\ln\gamma \tag{103}$$

となる。ブラックホール原点のような特異点では固有体積要素 $\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^3x$ が 0 になり、数値計算が破綻してしまうが、この超曲面の切り方を採用すると、固有体積要素が小さくなって特異点に近づくと時間の刻み方をゆるやかにし、なかなか超曲面が特異点にぶつからないように選ぶことができる。なおかつ、双曲型方程式なので計算コストも少なくて済む。

Gamma driver 条件とは、

$$\partial_t\beta^i=B^i \tag{104}$$

$$\partial_tB^i=\frac{3}{4}\partial_t\Delta\Gamma^i \tag{105}$$

という方程式で β^i を発展させる方法である。これは $\Delta\Gamma^k=-\hat{D}_j\gamma^{kj}$ を小さくする方向に β^i を動かし、座標の歪み具合をなるべく抑えるような方程式になっている。