Ｍ１理論演習『恒星』
第七回まとめ

2011/06/09
岡アキラ

概 要

第七回は、3 章 1 節を読む。3 章 1 節では、恒星の内部で何が起きているかを知るために必要となる基礎方程式を概観する。

基本的な仮定

この章では、簡単のために、星の磁場および自転は無視し、星の形を球対称であるとする。さらに、星の内部の各点で静水圧平衡、すなわち、圧力勾配と重力が釣り合っていることを仮定する。もし、静水圧平衡が破れて、ガスに加速度が生じたとすると、その変化のタイムスケールは自由落下程度であり、星の進化の時間よりもはるかに長く[1]、静水圧平衡は良い近似であることがわかる。

重力と熱の関係

静水圧平衡を表す式

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \tag{1}$$

と、理想気体の状態方程式

$$P \propto T\rho$$

より、重力と温度との間の関係

$$T \propto \frac{M}{R} \tag{2}$$

が得られる。エネルギーについても同等の関係（ビリアル定理）

$$E_{\mathrm{Gravity}} = -3(\gamma - 1)E_{\mathrm{Thermal}}$$

が得られる。ここで、γ はガスの比熱比である。したがって、星の持つ全エネルギーは、

$$E_{\mathrm{Total}} = E_{\mathrm{Gravity}} + E_{\mathrm{Thermal}} = -(3\gamma - 4)E_{\mathrm{Thermal}} = -\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}(-E_{\mathrm{Gravity}})$$

で与えられる。この式からわかるように、星が安定に存在するためには、$\gamma > 4/3$ であることが必要である。

[1] 自由落下のタイムスケールは、太陽で３０分、赤色巨星で１年程度である。

星はこのエネルギーの放出によって輝いている。ここで、内部での核融合反応がなく、星はエネルギーを放出する一方であるような状況を考える。このときの星の放出する光のエネルギーは、

$$L = -\frac{dE_{\text{Total}}}{dt} = (3\gamma - 4)\frac{dE_{\text{Thermal}}}{dt} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\frac{d(-E_{\text{Gravity}})}{dt}$$

となり、星は重力のエネルギーを解放しながら輝き、また、そのとき温度を上昇させることがわかる。また、(2) 式から、このとき、星は縮むことがわかる。これを重力収縮と呼ぶ。ただし、重力収縮が進み、星を構成するガスが理想気体としてふるまえなくなり、電子が縮退を始めると、温度を上げるよりも電子が縮退する方がエネルギーが低いので、温度は減少し始める。

星内部でのエネルギー輸送

静水圧平衡（(1) 式）および、星中心からの距離とその距離のところに表面を持つ同心球の内側にある質量との間の関係 $dM_r/dr = 4\pi r^2 \rho$ において、独立変数を M_r とすると、方程式 2 つに対して未知数が P, ρ, r の 3 つなので、方程式が閉じていない。したがって、この方程式を解くために、エネルギーの輸送の式、エネルギー保存則が必要である。

エネルギー輸送の形態は、放射、電子熱伝導、対流の 3 つがある。

放射

大気のところで詳しく説明したように、放射輸送の式は、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu)\rho I_\nu + \rho\eta_\nu$$

で与えられる。したがって、恒星内部で LTE が成立しているとすると、放射フラックスは、上の式に $\cos\theta$ をかけて全立体角にわたって積分したものなので、

$$F_\nu = -\frac{1}{(\kappa_\nu + \sigma_\nu)\rho}\frac{4\pi}{3}\frac{dB_\nu}{dT}\frac{dT}{dr}$$

と与えられる。半径 r の球面を単位時間あたりに通過するエネルギーは、放射フラックスを全振動数で積分したものに球面の表面積を乗じたものなので、

$$L_{\text{rad}}(r) = 4\pi r^2 \int_0^\infty d\nu F_\nu = -4\pi r^2 \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr}$$

で与えられる。あるいは、放射圧を用いて、

$$L_{\text{rad}}(r) = -4\pi r^2 \frac{c}{\kappa\rho}\frac{dP_{\text{rad}}}{dr}$$

と書くこともできる。ここで、$a = 4\sigma_{\rm SB}/c$ であり、κ はロスランド平均不透明度と呼ばれる量で、

$$\frac{1}{\kappa} \equiv \int_0^\infty d\nu \frac{1}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \frac{B_\nu}{dT} \Big(\int_0^\infty d\nu \frac{B_\nu}{dT} \Big)^{-1}$$

と、定義される。

電子熱伝導

電子による熱伝導係数を $k_{\rm cond}$ と書くと、熱伝導フラックスは、

$$F_{\rm cond} = -k_{\rm cond} \frac{dT}{dr}$$

で与えられる。放射との対応を付けるために、熱伝導不透明度を、

$$\frac{1}{\kappa_{\rm cond}} \equiv \frac{3\rho k_{\rm cond}}{4acT^3}$$

と定義することで、熱伝導フラックスは、

$$F_{\rm cond} = -\frac{4ac}{3\kappa_{\rm cond}\rho} T^3 \frac{dT}{dr}$$

と書くことができて、放射と熱伝導を合わせたフラックスは、

$$L_{\rm rad}(r) + F_{\rm cond} = -\frac{4ac}{3\rho} \Big(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa_{\rm cond}} \Big) T^3 \frac{dT}{dr}$$

と書ける。エネルギーの輸送は、星内部のガスが理想気体に近いふるまいをするときは放射によって、電子が縮退しているときは熱伝導によってなされる。

対流

温度勾配が大きくなると、放射によってエネルギーを輸送するよりも、ガスが流動することによってエネルギーを輸送した方が効率の良くなる。定量的には、

$$\nabla_{\rm rad} < \nabla_{\rm ad}$$

が成立しているときである。ここで、$\nabla \equiv (d \ln T / d \ln P)$ である。いま現在、対流によるエネルギー輸送を正確に記述することはできていない。

エネルギー保存則

星の内部で、中心からの距離が r の球と $r + dr$ の球に挟まれた球殻で成り立つエネルギー保存則は、

$$T \frac{dS}{dt} dM_r = L_r - (L_r + dL_r) + (\epsilon_{\rm n} - \epsilon_\nu) dM_r$$

で与えられる。ここで、$\epsilon_{\rm n}$ は原子核反応によって生み出される単位質量あたりのエネルギー、ϵ_ν はニュートリノが持ち去るエネルギーである。

ニュートリノの発生機構

ニュートリノの発生機構は以下の通りである。

対消滅ニュートリノ

$T > 10^9 K$ では、電子陽電子対消滅にともなって、電子ニュートリノ、反電子ニュートリノが生成される。

光ニュートリノ

コンプトン散乱において、光が散乱される代わりに、電子ニュートリノ、反電子ニュートリノが生成される。

制動放射ニュートリノ

制動放射において、光が放出される代わりに、電子ニュートリノ、 反電子ニュートリノが生成される。

プラズマニュートリノ

プラズマ中を伝搬する光は $\hbar\omega_{\mathrm{p}}/c^2$ を静止質量とする粒子（プラズモン）だとみなすことができる。プラズモンが崩壊して、電子ニュートリノ、反電子ニュートリノが生成される。

ニュートリノがエネルギーを持ち去る影響が効いてくるのは、図 3.5（テキスト 144 p）より、主系列星よりもはるかに高温高密度状態の星に対してのみであることがわかる。また、さらに、進化の進んだ星では、ウルカ過程と呼ばれる、原子核の電子捕獲と β 崩壊が続けて起こることにより、電子ニュートリノ、反電子ニュートリノが生成される現象が重要になる。

基礎方程式まとめ

以上の議論で得られた基礎方程式は、

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dM_r} &= \frac{GM_r}{4\pi r^2} \\
\frac{dr}{dM_r} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\
\frac{dT}{dM_r} &= -\frac{GM_r T}{4\pi r^4 P} \nabla_T \\
\frac{dL_r}{M_r} &= \epsilon_{\mathrm{n}} - \epsilon \nu + \epsilon_{\mathrm{g}}
\end{aligned}
$$

である。上から順に、静水圧平衡の式、r と M_r の変数変換の式、エネルギー輸送の式、エネルギー保存則を表している。適当な境界条件と元素組成が与えられれば、これらの式を解いて星の内部構造を調べることができる。