

The dynamic and gravitational instabilities of spherical shocks

Vishniac (1983)

I. Introduction

- 星間ガス中を伝播する衝撃波は
 - 銀河のガスの運動
 - 宇宙線
 - 星形成
- の起源として重要
- シェルの不安定性については実験的にも理論的にもあまりよくわかっていない。
- Elmegreen & Elmegreen(1978)
 - 圧力の不連続面で作られるシェルについての不安定性を計算
 - 不安定になるまでの時間が長過ぎる
- 本論文では、より現実的な設定(衝撃波上流からのラム圧を考慮)でシェルの不安定性を議論する。

II. 自己重力なし、dynamical に不安定性が駆動されるとき

- ここでは、thin-shell approximation を使う。
 - 例えば、超新星衝撃波の雪かきフェイズ

$$h/R_s < kh \ll 1 ,$$

h: シェルの厚み
R_s: 衝撃波の半径
k: 摂動の波数

a) 摂動方程式

- 流体方程式 (2.1)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \{ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \} + \nabla P = 0,$$

$$\sigma \equiv R_s^{-2} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 dr,$$

$$V_r \equiv \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 v_r dr,$$

$$V_T \equiv \frac{1}{\sigma R_s^2} \int_{R_i}^{R_s} \rho r^2 v_T dr,$$

- thin-shell approx. を用いて角度方向にならす

$$\partial_t \sigma = -2(V_s/R_s)\sigma + \rho_E V_s - \sigma(\nabla_T \cdot V_T) \quad (2.5)$$

$$\partial_t V_r = -\sigma^{-1} \{ \rho_E V_s V_r - P_i \} \quad (2.6)$$

$$\partial_t V_T = -\left(\frac{\rho_E V_s}{\sigma}\right) V_T - \left(\frac{V_s}{R_s}\right) V_T - \frac{c_s^2}{\sigma} \nabla_T \sigma - \frac{P_i}{\sigma} \nabla_T R_s \quad (2.12)$$

ρ_E : 衝撃波の外側の密度 (一様)

P_i : シェルの内側の圧力

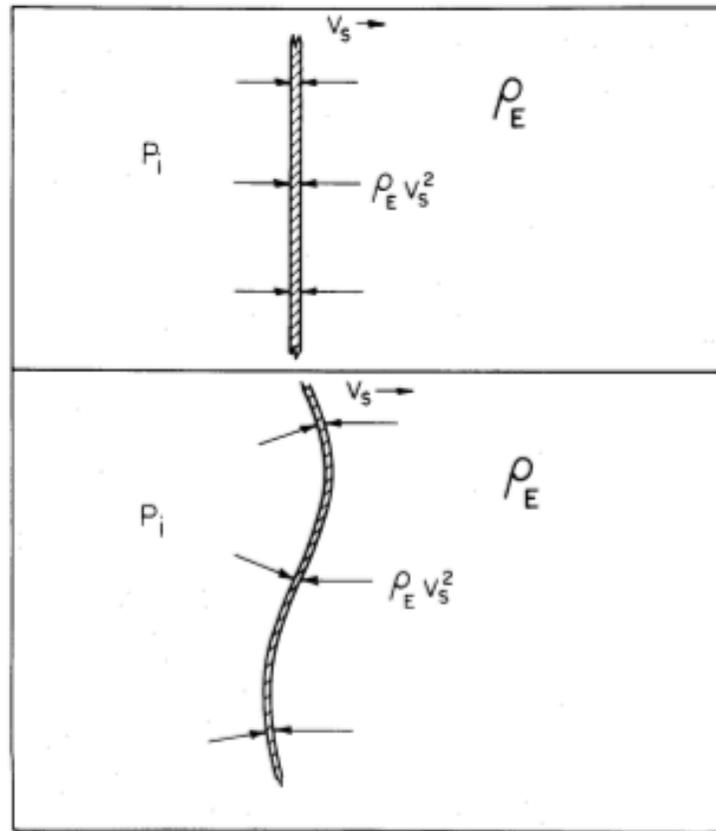


FIG. 1.—An idealized thin shock is propagating through a uniform medium. The ram pressure on the shock (directed from the right) is always oriented parallel to the direction of shock propagation. The thermal pressure on the shock (directed from the left) is always normal to the surface. When the shock surface is rippled, there are unbalanced forces in the plane of the shock.

• 0 次 (2.14)

$$\begin{aligned}\partial_t \sigma_0 &= -2V_s \sigma_0 / R_0 + \rho_E V_s, \\ \partial_t V_s &= -\sigma_0^{-1} \{ \rho_E V_s^2 - P_i \}.\end{aligned}$$

シエルの面密度

$$\sigma = \sigma_0(1 + \delta)$$

衝撃波の半径

$$R_s = R_0 + \Delta R$$

衝撃波の速度

$$V_s \rightarrow V_s + \partial_t \Delta R$$

• 1 次 (2.15)

$$\begin{aligned}\partial_t \delta &= R_0^{-1} \partial_t \Delta R + 2V_s \Delta R R_0^{-2} - \rho_E V_s \delta R_0^{-1} - \nabla_T \cdot V_T, \\ \partial_t^2 \Delta R &= -\delta \partial_t V_s - 2(\rho_E V_s / \sigma_0) \partial_t \Delta R, \\ \partial_t V_T &= -\left(\frac{V_s}{R_s}\right) V_T - \left(\frac{\rho_E V_s}{\sigma_0}\right) V_T - c_s^2 \nabla_T \delta - \frac{P_i}{\sigma_0} \nabla_T \Delta R.\end{aligned}$$

b) 摂動方程式の解

- $\beta \equiv P_i/(\rho_E V_s^2)$ は order of unity
 - (2.15c) の第3項は第4項に比べて無視
 - 衝撃波の半径の摂動 ΔR は $\propto t^M$ で成長する
 - 衝撃波が伝播する外側の密度は一様 ρ_E
- たいていの衝撃波では成り立つ
- という仮定をして、摂動方程式 (2.14), (2.15) の解を求める
 - (2.14b) $\rightarrow \beta = (4 - 1/M)/3$
 - (2.15) \rightarrow
$$(\partial_t + 3M/t)\delta = R_0^{-1}(\partial_t + 2M/t)\Delta R - \nabla_T \cdot V_T$$
$$(\partial_t + 6M/t)\partial_t \Delta R = M(1 - M)\delta R_0/t^2,$$
$$(\partial_t + 4M/t)V_T = -3\beta M^2(R_0/t^2)\nabla_T \Delta R.$$

- (2.16b), (2.16c)より $\Delta R \propto t^{M+s-2}$, $V_T \propto t^{s+2M-1}$ で、

$$\delta = \delta_0 (t/t_0)^s Y_{lm}, \quad (2.17)$$

$$\Delta R = R_0 \delta_0 M(1-M)[(M+s)(7M-1+s)]^{-1} (t/t_0)^s Y_{lm},$$

$$V_T = -3\beta M^3(1-M)[(s+5M-1)(M+s)(7M-1+s)]^{-1} (R_0^2/t)(t/t_0)^s \nabla_T Y_{lm}$$

- 欲しい式 (2.17d)

$$(s+3M)(s+5M-1)[(s+M)(s+7M-1) - M(1-M)] = -3\beta M^3(1-M)l(l+1)$$

- $L(L+1)$ が非常に大きいモードに対して、成長率 s は
 $s \approx [3\beta M^3(1-M)l(l+1)]^{1/4} \exp\{i(\pi/4) + n(\pi/2)\}$, $n = 0, 1, 2, 3$
- に漸近。つまり、摂動は成長、収束両方のモードを持つ。

- (2.18) の結果は、以下のようにしても出る:
- 無限に薄い、平行平板の衝撃波に対して

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \delta = -\nabla_T \cdot V_T, \\ \partial_t^2 \Delta R = -\delta \partial_t V_s, \\ \partial_t V_T = -\frac{P_i}{\sigma} \nabla^2 (\Delta R), \end{array} \right.$$

- まとめると $\partial_t^4 \delta = -\frac{P_i}{\sigma} (\partial_t V_s) \nabla^2 \delta$
- $\delta \propto \exp(\Gamma_d t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ とすると、成長率 Γ_d は

$$\Gamma_d = (P_i k^2 \partial_t V_s / \sigma)^{1/4}$$

- $\partial_t V_s > 0$ のとき (内側からの駆動があるとき)、不安定 (Rayleigh-Taylor 不安定)。

(2.17d)の解釈

- L が小さいモードでは、 s の実部は負になる。
 - シェルへのガス降着、シェルの膨張の効果で安定に
- あるモード L_c からは過安定に。
- s の実部をゼロにする $L(L_c)$ は、自明解 $s=0$ の他に

$$l_c(l_c + 1) = [6\beta M^2(1 - M)]^{-1} [\frac{1}{2}M(23M - 5)^2 + (23M - 5)(8M - 1)^2 - 12M(5M - 1)(4M - 1)].$$

このとき s の虚部 $= \pm v(23M-5)M/2$

- L が大きすぎるモードでは、thin-shell 近似が破綻。
 - Erpenbeck(1962)より、厚みのあるシェルは安定
- 従って、不安定なモードは $L_c < L < R_0/h$

実際の衝撃波では

- MCS フェイズ

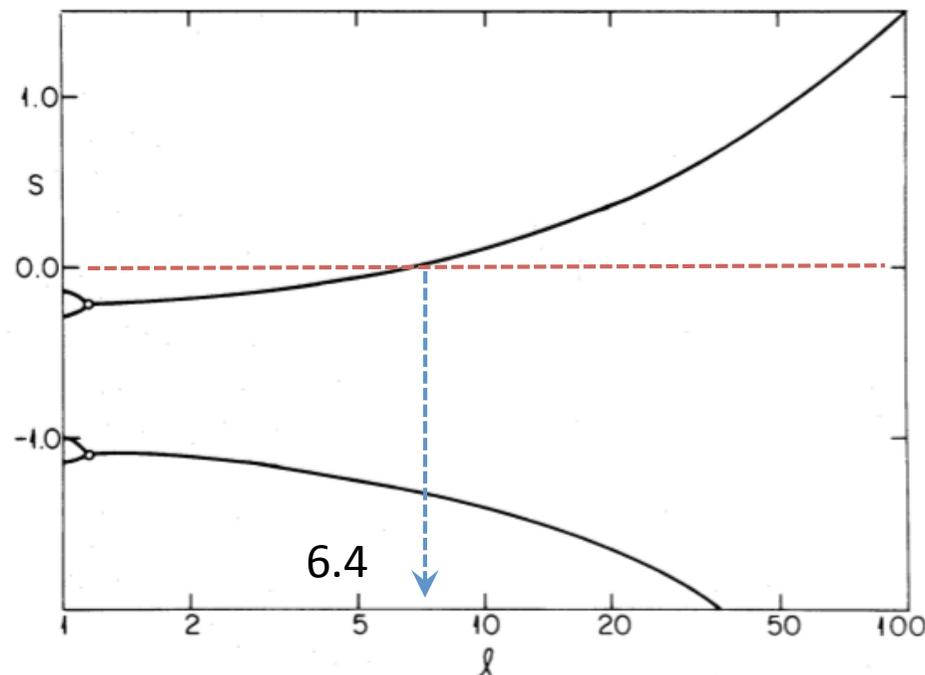
- $R \propto t^{2/7}$, $\beta=1/6$ [(2.17d)と $P_i(R_0^3)^{5/3}=\text{const.}$ から]

- 不安定なモード $6.4 < L < 3\mathcal{M}^2$

- $\mathcal{M}=V_s/c_s$ はマッハ数

- たいていマッハ数は10–100

$$\begin{aligned} \rho_E V_s^2 &= (\sigma_0/h) c_s^2 \text{ より、} \\ R_0/h &\sim R_0 / (\sigma_0 c_s^2 / \rho_E V_s^2) \\ &= (3/\rho_E) (\rho_E V_s^2 / c_s^2) \\ &= 3V_s^2 / c_s^2 \end{aligned}$$



実際の衝撃波では

- 断熱的に膨張する衝撃波 (Sedov解)
 - $R \propto t^{2/5}$, $\beta=1/2$, $\rho(R_s)/\rho_E=(\gamma+1)/(\gamma-1)$
 - 不安定なモード $20.4 < L < 3(\gamma+1)/(\gamma-1)$
 - $\gamma=5/3$ より、不安定なモードは存在しない
 - Newman (1980) の結果と一致

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \rho_E R_0 / 3, \quad \rho(R_s) = \sigma_0 / h \text{ より、} \\ \rho(R_s) / \rho_E &= R_0 / 3h \\ \text{jump condition より} \\ (\gamma+1) / (\gamma-1) &= R_0 / 3h \end{aligned}$$

摂動の成長時間

- L が大きいほど早く成長する
- 不安定になる L の最大値 $L \sim R_0/h$ ($kh \sim 1$) で、

$$\Gamma_d \approx [P_i \partial_t V_s / (\sigma h^2)]^{1/4} \sim \beta^{1/4} c_s / h$$

$$P_i = \beta \rho_E V_s^2, \partial_t V_s \sim \rho_E V_s^2 / \sigma \text{ より、}$$

$$\Gamma_d \sim [\beta (\rho_E V_s^2)^2 / \sigma^2 h^2]^{1/4}$$

$$= (\beta \rho^2 c_s^4 / \rho^2 h^4)^{1/4} \langle \rho c_s^2 \sim \rho_E V_s^2 \rangle$$

c) 粘性と磁場の影響

- 粘性と磁場は不安定性を抑制する効果を持つかもしれない。
 - 粘性: 輸送によって角度方向の摂動をならす
 - 磁場: 磁気圧で摂動をならし、磁力線の張力でセルに波が立つのを抑える
- 結論から言えば、二つともあまり影響をしない。

粘性の影響は無視できる

- 粘性による項を加える

粘性係数 $\nu = c_s \lambda_{\text{mfp}}$

$$\partial_t V_T = - \left(\frac{\rho_E V_s}{\sigma} \right) V_T - \left(\frac{V_s}{R_s} \right) V_T - \frac{P_i}{\sigma} \nabla_T R_s - \underline{\nu k^2 V_T}$$

- 粘性による成長率 $\begin{cases} \partial_t \delta = -\nabla_T \cdot V_T, \\ \partial_t V_T = -\nu k^2 V_T \end{cases}$

– $\Gamma_{d, \text{粘性}} \sim k^2 c_s \lambda_{\text{mfp}}$

- 圧力による摂動の成長率との比が

$\Gamma_{d, \text{粘性}} / \Gamma_{d, \text{圧力}} \ll 1$ となる条件は

– $\lambda_{\text{mfp}} \ll \beta^{1/4} h (kh)^{-2}$ (2.25)

- kh が十分小さい(シェルが薄い)とき、シェルの密度が上昇して λ_{mfp} が小さくなる。

– (2.25) は自動的に満たされる

磁場の影響

- 磁場による力

$$\text{Force} = -\frac{1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

- 磁気圧

- ショックの圧縮を抑える
 - thin-shell が破綻するLの値が小さくなる
 - 不安定モードLの範囲が狭くなる

- 磁力線の張力

- 単位面積あたりの力

$$\int_{R_i}^{R_s} \rho \partial_t V_r dr \sim 2P_B k^2 \Delta R h$$

シエルの曲がり具合
($\nabla_T \Delta R$)に比例

- 磁場がないときの摂動の成長率との比

$$\frac{P_B}{\Gamma_d^2 \sigma} (k^2 h) \sim kh$$

- thin-shell 近似が成り立っている限り、この比は $\ll 1$ 。

- 磁場は、不安定になるモードの幅を狭める

III. 自己重力がある場合

- 運動方程式に重力が加わる

$$\begin{aligned}
 \partial_t \sigma &= -2(V_s/R_s)\sigma + \rho_E[V_s - V_{Er}(R_s)] - \sigma \nabla_T \cdot V_T, \\
 \partial_t V_s &= -\sigma^{-1} \{ \rho_E [V_s - V_{Er}(R_s)]^2 - P_i \} - \partial_r \Phi \Big|_{r=R_s}, \\
 \partial_t V_T &= \left(\frac{\rho_E}{\sigma} \right) [V_s - V_{Er}(R_s)] (V_{ET} - V_T) - \left(\frac{V_s}{R_s} \right) V_T - \nabla_T \Phi \Big|_{r=R_s} - \frac{c_s^2}{\sigma} \nabla_T \sigma
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

- 重力ポテンシャルを求めるのが大変
- ここでは、一様密度場 ρ_E にシェルが乗っている密度構造での Φ を計算

– ポアソンの式 $\nabla^2 \Phi = \sigma \delta(r - R_s) + \rho_E \eta(r - R_s)$

– 中心値問題として解くと

$$\nabla \Phi \Big|_{r=R_s} = \frac{2\pi G}{3} \rho_E R_0 \left\{ \hat{r} + \sum_{lm} \left[\frac{2l(l+2)a_{lm} + c_{lm}}{2l+1} Y_{lm} \hat{r} - \frac{2c_{lm} + 3a_{lm}}{2l+1} R_0 \nabla Y_{lm} \right] \right\} \tag{3.5}$$

- 宇宙膨張、シエル外部の密度摂動 δ も考慮
 - シエル外部の密度 $\rho_F(1+\delta)$

$$\partial_t^2 \delta + 2(\dot{a}/a)\partial_t \delta + [c_s^2 k^2 - \frac{3}{2}(\dot{a}/a)^2]\delta = 0$$

- 速度場 V_E

$$\partial_t V_E + V_E \cdot \nabla V_E + \nabla \Phi = 0$$

擾動方程式

• 0次

$$\begin{aligned}\partial_t \sigma_0 &= -2(\partial_t R_0/R_0)\sigma_0 + \rho_E[\partial_t R_0 - 2R_0/(3t)] \\ \partial_t^2 R_0 &= -\sigma_0^{-1} \left[\rho_E \left(\partial_t R_0 - \frac{2R_0}{3t} \right)^2 - P_i \right] - \frac{2R_0}{9t^2}\end{aligned}$$

• 1次

$$\left\{ \begin{aligned} V_T &= \sum_{lm} T_{lm} R_0 \nabla Y_{lm}, \\ V_{Er} &= \frac{2r}{3t} + \sum_{lm} R_{lm} Y_{lm}, \\ V_{ET} &= \sum_{lm} E_{lm} r \nabla Y_{lm}. \end{aligned} \right.$$

$$\partial_t c_{lm} = -3c_{lm} \left\{ \partial_t \ln R_0 - \frac{2}{3t} \right\} + \partial_t a_{lm} + 3a_{lm} \left\{ \partial_t \ln R_0 - \frac{2}{3t} \right\} - \frac{3R_{lm}(R_0)}{R_0} + \frac{l(l+1)T_{lm}}{R_0},$$

$$\begin{aligned}\partial_t^2 a_{lm} &= 4\partial_t a_{lm} \left\{ -2\partial_t \ln R_0 + \frac{1}{t} \right\} - a_{lm} \left\{ \frac{\partial_t^2 R_0}{R_0} + 6 \left(\partial_t \ln R_0 - \frac{2}{3t} \right)^2 + \frac{2l(l+2)}{9t^2(2l+1)} \right\} \\ &\quad - c_{lm} \left\{ \frac{2(l+1)}{9t^2(2l+1)} + \frac{\partial_t^2 R_0}{R_0} \right\} + \frac{6}{R_0} R_{lm}(R_0) \left\{ \partial_t \ln R_0 - \frac{2}{3t} \right\},\end{aligned}$$

$$\partial_t T_{lm} = 3 \left\{ \partial_t \ln R_0 - \frac{2}{3t} \right\} E_{lm}(R_0) - \left\{ 4\partial_t \ln R_0 - \frac{2}{t} \right\} T_{lm} + \frac{R_0 (2c_{lm} + 3a_{lm})}{9t^2 (2l+1)} - \frac{c_s^2}{R_0} c_{lm}, \quad (3.12)$$

$$\partial_t R_{lm} \left[\frac{a(t)r_1}{a(t_1)} \right] = -\frac{2}{3t} R_{lm} \left[\frac{a(t)r_1}{a(t_1)} \right] - \frac{2R_0}{9t^2} \frac{[c_{lm} + (l-1)a_{lm}](l+1)}{2l+1} \left[\frac{R_0 a(t_1)}{r_1 a(t)} \right]^{l+2},$$

$$\partial_t E_{lm} \left[\frac{a(t)r_1}{a(t_1)} \right] = -\frac{2}{3t} E_{lm} \left[\frac{a(t)r_1}{a(t_1)} \right] + \frac{2R_0}{9t^2} \frac{c_{lm} + (l-1)a_{lm}}{2l+1} \left[\frac{R_0 a(t_1)}{r_1 a(t)} \right]^{l+2},$$

摂動方程式の解

$$\Gamma_g \sim \left\{ l(l+1) \left[\frac{4\pi G\sigma_0}{(2l+1)R_0} - \frac{c_s^2}{R_0^2} \right] \right\}^{1/2} = \left\{ l(l+1) \left[\frac{2}{9t^2(2l+1)} - \frac{c_s^2}{R_0^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.13)$$

- 重力的に束縛されていると((3.13)式>0)、成長率 Γ_g は正(摂動が成長)。
- dynamical な摂動の成長率との比較

$$\frac{\Gamma_d}{\Gamma_g} \sim \frac{(P_i k^2 \partial_t V_s / \sigma)^{1/4}}{(2\pi G \sigma k)^{1/2}} \sim \beta^{1/4} \frac{t_J}{t} \sim \beta^{1/4} \mathcal{M}_0 \frac{\lambda_J}{R_s}$$

t=シエルのsound crossing time
k=L/R₀

- もともとガスが重力的に不安定($t_J < t$)のとき、重力成長の方が早い
- thin-shell 近似が破綻する大きいモードでは重力的にのみ不安定

IV. Discussion & Conclusion

- 現実的な設定で衝撃波が作るシェルの不安定性を議論
 - 不安定になるモードを計算
 - cold shell (等温)では、不安定になるモードが存在
 - 断熱のときは存在しない
 - 粘性は不安定性を抑制しない
 - 磁場は不安定になるモードの幅を狭くする
 - 重力より dynamical な効果が重要
 - 例外1: もともと重力的に不安定なガスに衝撃波が伝播するとき
 - 例外2: thin-shell 近似が破綻するモード